

ПЕРЕХОДНЫЕ ЭТАПЫ ДВИЖЕНИЯ ГИБКОЙ НИТИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ

Г. С. Мороз

(Москва)

Явление поперечного удара по гибкой деформируемой нити для случая бесконечно длинной нити теоретически было исследовано Х. А. Рахматулиным^[1,2,3].

В том случае, когда концы нити, по которой производится поперечный удар, жестко закреплены, а скорость удара остается постоянной, продольные волны напряжения будут отражаться от концов нити и накладываться на первичные продольные волны. Суммарное напряжение в нити будет скачкообразно возрастать в процессе удара до тех пор, пока нить не разрушится или в точке удара, или в точке закрепления концов нити.

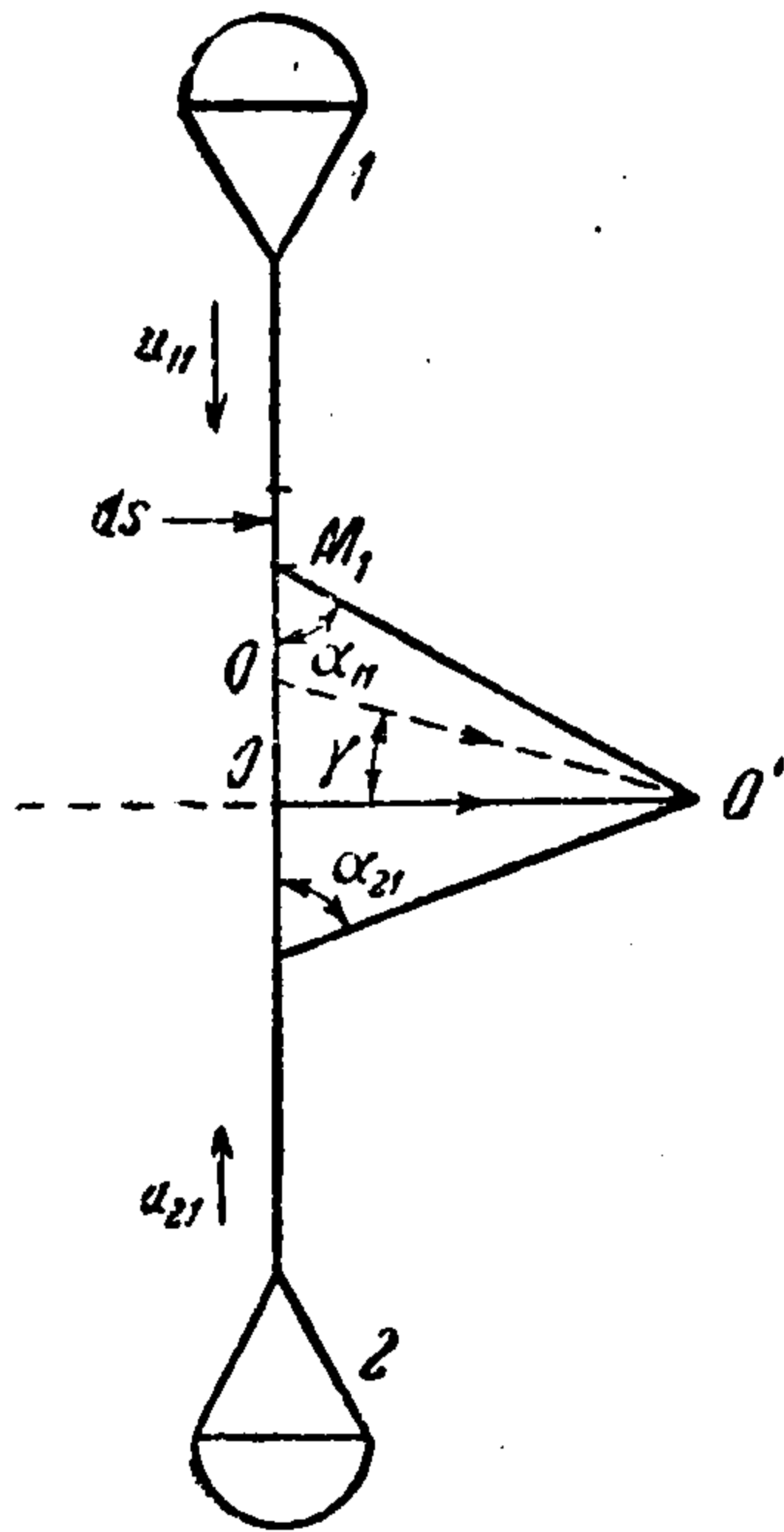
Для практики большой интерес представляет задача о поперечном ударе по нити, концы которой свободны или имеют силовую связь. В случае, когда концы нити свободны, движение нити при поперечном ударе, начиная с момента отражения продольных волн от концов, будет резко отличаться от движения нити при жестком закреплении концов. При отражении первичной продольной волны напряжения от свободного конца нити первичное динамическое напряжение в нити будет сниматься, а скорость продольного перемещения элементов нити удваиваться. В свою очередь при прохождении разгрузочной волны через гребень (фронт) поперечной волны возникает вторичная продольная волна напряжения, которая при отражении от свободного конца будет снова увеличивать продольную скорость нити и т. д. При продолжительном поперечном ударе свободные концы нити приобретут скорость продольного перемещения большую, чем скорость ударяющего тела. С этого момента начнется забрасывание ветвей нити за линию движения ударяющего тела и захлестывание концов нити при ударе. Для предотвращения захлестывания концов нити в процессе поперечного удара продольное перемещение ветвей нити необходимо каким-либо образом затормаживать, например, прикрепив на концах нити тормозящие элементы. В этом случае траектория движения концов нити будет целиком определяться величиной силы сопротивления этих элементов и погонной массой нити.

В данной работе приводятся результаты теоретических исследований переходных этапов движения гибкой нити конечной длины при поперечном ударе для случая, когда к концам нити приложена сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости.

1. Первый переходный этап движения гибкой нити, имеющей на своих концах тормозные элементы. Волновое движение гибкой деформируемой нити конечной длины в переходных этапах поперечного удара является очень сложным вследствие того, что в нити происходит многократное наложение продольных и поперечных волн, амплитуды которых связаны между собой, а скорости распространения волн различны. Для нитей с малым удлинением, например для стальной струны, скорость распространения продольных упругих волн значительно больше (в 10—20 раз) скорости распространения поперечных волн. В этом случае задачу о переходных этапах волнового движения нити, имеющей на своих

концах тормозные элементы, можно значительно упростить. Вследствие того, что скорость распространения продольных упругих волн очень велика, натяжение в ветвях нити будет быстро выравниваться по их длине и приближаться к величине силы сопротивления данного тормозного элемента. Будем полагать, что сопротивление тормозных элементов пропорционально квадрату скорости, поэтому натяжение в ветвях нити будет

$$T_1 = \frac{c_{x1} F_1 \rho}{2} u_1^2, \quad T_2 = \frac{c_{x2} F_2 \rho}{2} u_2^2 \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь T_1 и T_2 — натяжения в первой и второй ветвях нити, u_1 и u_2 — скорости перемещения концов нити, c_{x1} и c_{x2} — коэффициенты лобового сопротивления тормозных элементов, $c_{x1} F_1$ и $c_{x2} F_2$ — приведенные площади тормозных элементов для первой и второй ветвей, F_1 и F_2 — истинные площади тормозных элементов, ρ — плотность среды.

Рассмотрим сначала первый переходный этап движения гибкой нити при прямом поперечном ударе, когда поперечные волны еще не дошли до концов нити (фиг. 1). Будем полагать, что скорость поперечного удара постоянная и что собственное сопротивление нити и ее вес малы и ими можно пренебречь при исследовании. Для удобства введем двойные индексы величин, при этом первый индекс будет обозначать номер ветви нити, а второй — номер переходного этапа.

На участках нити, куда поперечная волна еще не дошла, элементы нити смещаются только в продольном направлении.

Рассмотрим сначала верхнюю ветвь (фиг. 1). Напишем уравнения изменения количества движения элемента нити ds при действии на него поперечной волны. Пусть u_{11} — скорость перемещения конца нити, v_{11} и w_{11} — скорости перемещения нити по оси x и y . Тогда

$$dm v_{11} = T_{11} \sin \alpha_{11} d\tau, \quad dm (w_{11} - u_{11}) = T_{11} (\cos \alpha_{11} - 1) d\tau \quad \left(dm = \frac{q}{g} ds \right) \quad (1.2)$$

Здесь dm — масса элемента нити ds , q — погонный вес нити, α_{11} — угол отклонения нити в зоне поперечной деформации, τ — время.

Согласно определению скорость распространения поперечной волны $b = ds/d\tau$, поэтому

$$\sin \alpha_{11} = \frac{v_{11} d\tau}{ds} = \frac{v_{11}}{b_{11}} \quad (1.3)$$

Вставляя в уравнение (1.2) значения $\sin \alpha_{11}$ и dm , а затем T_{11} согласно (1.1), получим

$$\frac{q ds}{g} v_{11} = T_{11} \frac{v_{11}}{b_{11}} d\tau \quad \text{или} \quad b_{11} = \sqrt{\frac{g T_{11}}{q}} = \kappa_1 u_{11} \quad \left(\kappa_1 = \sqrt{\frac{c_{x1} F_1 g \rho}{2q}} \right) \quad (1.4)$$

Компоненты скорости перемещения нити в зоне поперечной деформации при постоянной скорости ударяющего тела $v = \text{const}$ будут

$$v_{11} = v_0 - u_{s1} \sin \alpha_{11}, \quad w_{11} = -u_{s1} \cos \alpha_{11} \quad (1.5)$$

Подставив в (1.3) выражения (1.5) и (1.4) для v_{11} и b_{11} , находим

$$\sin \alpha_{11} = \frac{v_0}{\kappa_1 u_{11} + u_{s1}} = \frac{1}{\kappa_1 U_{11} + U_{s1}} \quad \left(U_{11} = \frac{u_{11}}{v_0}, U_{s1} = \frac{u_{s1}}{v_0} \right) \quad (1.6)$$

Здесь u_{s1} — скорость скольжения нити в точке контакта с ударяющим телом.

Из второго уравнения (1.2) получим $u_{s1} \cos \alpha_{11} + u_{11} = b_{11} (1 - \cos \alpha_{11})$; отсюда

$$\cos \alpha_{11} = \frac{(\kappa_1 - 1) u_{11}}{\kappa_1 u_{11} + u_{s1}} = \frac{(\kappa_1 - 1) U_{11}}{\kappa_1 U_{11} + U_{s1}} \quad (1.7)$$

Пользуясь выражениями (1.6), (1.7) и исключая α_{11} , получим следующее уравнение:

$$U_{11}^2 - \frac{2\kappa_1}{2\kappa_1 - 1} U_{s1} U_{11} - \frac{1 - U_{s1}^2}{2\kappa_1 - 1} = 0 \quad (1.8)$$

Отсюда, решая относительно U_{11} , находим

$$U_{11} = \frac{\sqrt{2\kappa_1 - 1 + (\kappa_1 - 1)^2 U_{s1}^2} - \kappa_1 U_{s1}}{2\kappa_1 - 1} \quad (1.9)$$

Второй корень уравнения (1.8), как не имеющий физического смысла, отбрасываем. Для нижней ветви нити соответствующее решение получим, если в формулах (1.9) и (1.7) изменим знак при U_s и индекс при κ :

$$U_{21} = \frac{\sqrt{2\kappa_2 - 1 + (\kappa_2 - 1)^2 U_{s1}^2} + \kappa_2 U_{s1}}{2\kappa_2 - 1} \quad \left(U_{21} = \frac{u_{21}}{v_0} \right) \quad (1.10)$$

$$\cos \alpha_{21} = \frac{(\kappa_2 - 1) U_{21}}{\kappa_2 U_{21} - U_{s1}} \quad \left(\kappa_2 = \sqrt{\frac{C x_2 F_2 g^2}{2q}} \right) \quad (1.11)$$

Если скорость скольжения нити u_s не равна нулю и $\kappa_1 > \kappa_2$, то T_{11} и T_{21} связаны между собой формулой Эйлера для трения гибкой нити, переброшенной через неподвижный блок:

$$T_{11} - \frac{q u_{s1}^2}{g} = e^{f(\alpha_{11} + \alpha_{21})} \left(T_{21} - \frac{q u_{s1}^2}{g} \right) \quad (1.12)$$

где f — коэффициент трения нити по блоку. Из этого равенства имеем

$$e^{f(\alpha_{11} + \alpha_{21})} = \frac{\kappa_1^2 U_{11}^2 - U_{s1}^2}{\kappa_2^2 U_{21}^2 - U_{s1}^2} \quad \text{или} \quad f = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{21}} \ln \frac{\kappa_1^2 U_{11}^2 - U_{s1}^2}{\kappa_2^2 U_{21}^2 - U_{s1}^2} \quad (1.13)$$

Здесь α_{11} и α_{21} определяются из формул (1.7) и (1.11). Таким образом, пользуясь формулами (1.9), (1.10) и (1.7), (1.11), (1.13), по заданным параметрам κ_1 , κ_2 и f можно вычислить U_{11} , U_{21} , α_{11} , α_{21} и U_{s1} . Более удобно производить расчет, если задавать κ_1 , κ_2 и U_{s1} и вычислять U_{11} , U_{21} , α_{11} , α_{21} и f .

Проанализируем полученное решение.

Движение ветвей нити характеризуется величиной определяющего параметра κ . Если $\kappa > 1$, тогда данная ветвь нити не перебрасывается за линию движения ударяющего тела (фиг. 2а). При $\kappa = 1$ $\alpha = 90^\circ$ и ветвь нити идет по линии движения ударяющего тела (фиг. 2б). Если $\kappa < 1$, тогда $\alpha > 90^\circ$ и ветвь нити будет перебрасываться за линию движения ударяющего тела (фиг. 2в). При $\kappa \leq 1/2$ имеет место захлестывание конца нити при поперечном ударе. В этом случае $U \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 180^\circ$. Для правильного движения ветвей нити без захлестывания

Таблица 1

$\begin{matrix} \backslash \\ x_2 \\ / \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ / \\ \backslash \end{matrix}$	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
1	0	0,042	0,110	0,178	0,244	0,305	0,361
1.5	-0,042	0	0,075	0,152	0,227	0,296	0,363
2.0	-0,110	-0,075	0	0,082	0,160	0,234	0,304
2.5	-0,178	-0,152	-0,082	0	0,080	0,160	0,231
3.0	-0,244	-0,227	-0,160	-0,079	0	0,080	0,154
3.5	-0,302	-0,296	-0,234	-0,158	-0,080	0	0,070
4.0	-0,364	-0,366	-0,306	-0,231	-0,154	-0,070	0

их концов и без переброса за линию движения ударяющего тела необходимо, чтобы $x \geq 1$. Для приведенной площади тормозного элемента соответственно должно быть

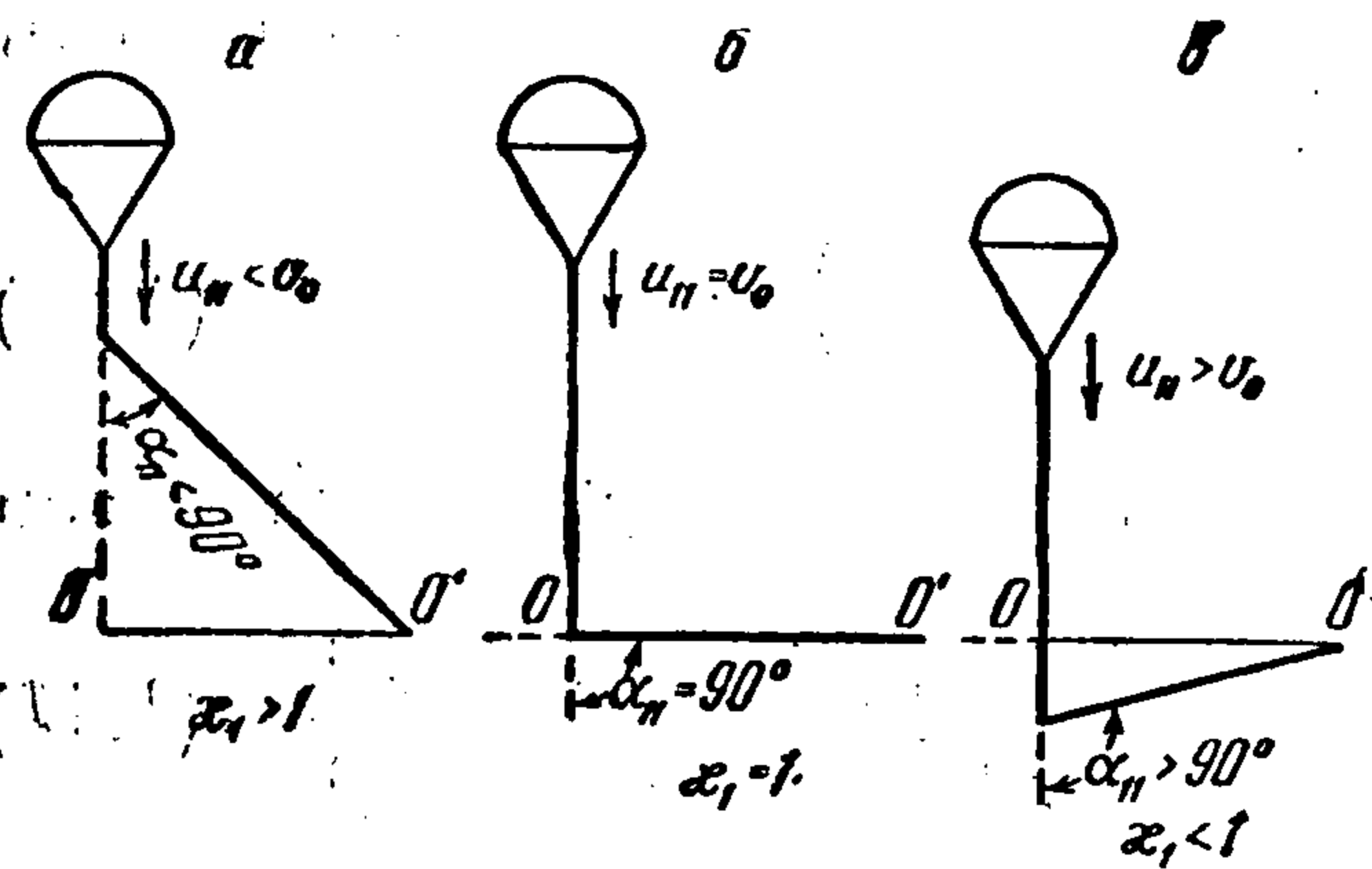
$$c_x F \geq \frac{2q}{g\rho} \quad (1.14)$$

Скольжение нити в точке контакта с ударяющим телом возможно только при определенном соотношении параметров x_1 , x_2 и f . Условие начала скольжения нити в виде выражения для f_0 — коэффициента трения при трогании — найдем из (1.13), если положим $U_{s1} = 0$ и вставим значения U_{11} , U_{21} , α_{11} и α_{21} :

$$f_0 = \ln \frac{(2x_2 - 1)x_1^2}{(2x_1 - 1)x_2^2} \left(\arcsin \left[\frac{(x_1 - 1)\sqrt{2x_2 - 1} + (x_2 - 1)\sqrt{2x_1 - 1}}{x_1 x_2} \right] \right)^{-1} \quad (1.15)$$

В табл. 1 приводятся значения f_0 для различных значений x_1 и x_2 .

При отрицательных значениях f_0 скольжение нити происходит в обратную сторону, т. е. сверху вниз.



Фиг. 2

При косом ударе по гибкой нити порядок вывода формул для U_{11} , U_{21} и f_0 такой же, как при прямом ударе. Компоненты скорости перемещения верхней ветви нити в зоне поперечной деформации при косом ударе будут

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_0 \cos \gamma - u_{s1} \sin \alpha_{11} \\ w_{11} &= v_0 \sin \gamma - u_{s1} \cos \alpha_{11} \end{aligned}$$

где γ — угол между вектором скорости ударяющего тела и плоскостью, проведенной перпендикулярно к нити. Положение вектора скорости в этом случае на фиг. 1 показано пунктиром.

Из уравнений изменения количества движения элемента нити ds при прохождении поперечной волны получим (верхняя ветвь нити)

$$\cos \alpha_{11} = \frac{(x_1 - 1)U_{11} + \sin \gamma}{x_1 U_{11} + U_{s1}}, \quad \sin \alpha_{11} = \frac{\cos \gamma}{x_1 U_{11} + U_{s1}} \quad (1.16)$$

Исключая из (1.16) угол α_{11} , получим

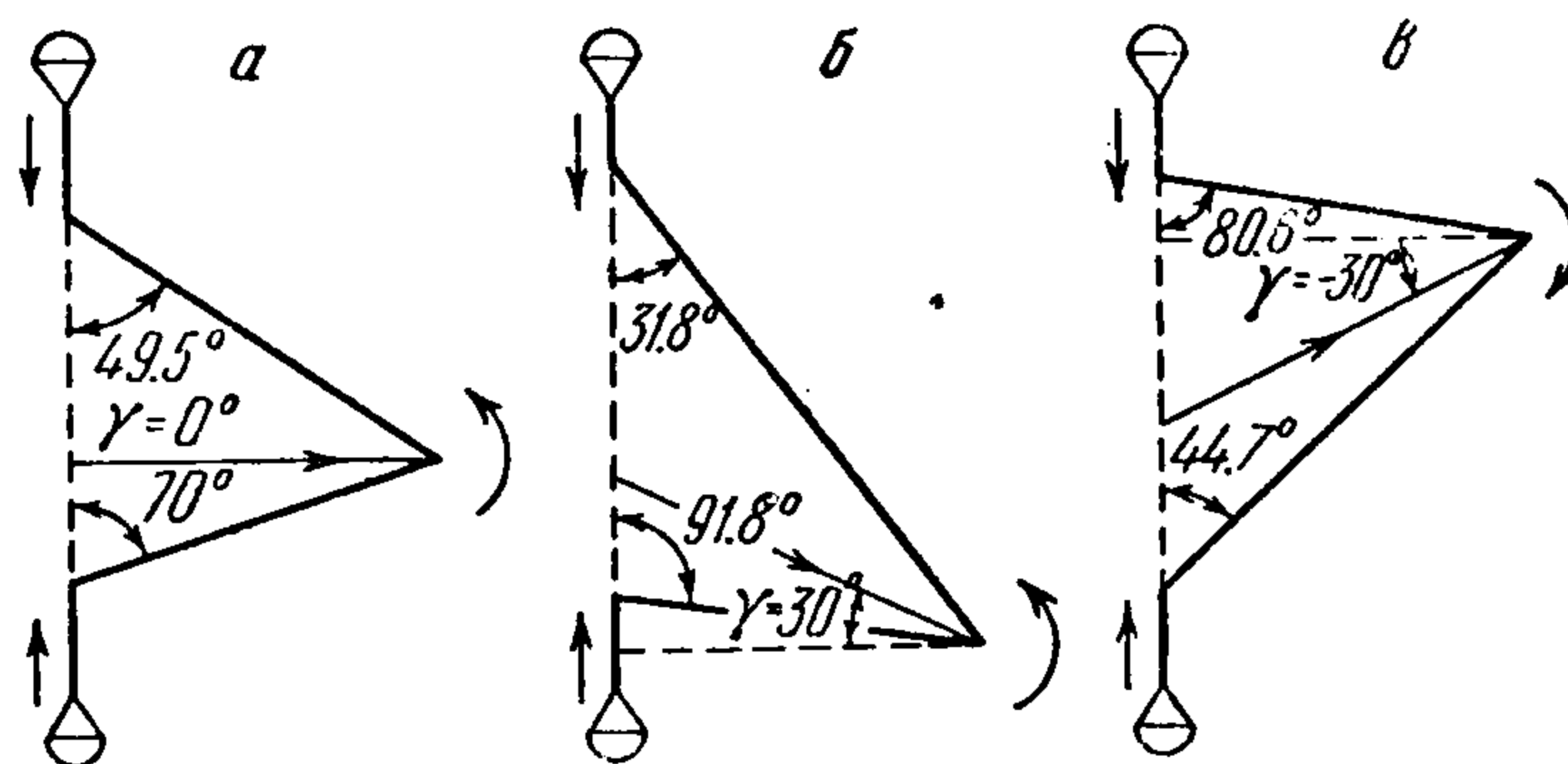
$$U_{11}^2 - \frac{2}{2x_1 - 1} [(x_1 - 1) \sin \gamma - x_1 U_{s1}] U_{11} - \frac{1 - U_{s1}^2}{2x_1 - 1} = 0 \quad (1.17)$$

Отсюда

$$U_{11} = \frac{\sqrt{[(x_1 - 1) \sin \gamma - x_1 U_{s1}]^2 + (2x_1 - 1)(1 - U_{s1}^2)} + (x_1 - 1) \sin \gamma - x_1 U_{s1}}{2x_1 - 1} \quad (1.18)$$

Для нижней ветви нити формулы для определения α_{21} и U_{21} будут те же, что и для верхней, но знак для γ и U_{s1} надо изменить на обратный. Зависимость U_s от f может быть определена по формуле (1.13). Условие начала скольжения нити при косом ударе найдем из (1.13) при $U_{s1} = 0$:

$$f_0 = \frac{2}{\alpha_{11} + \alpha_{21}} \ln \frac{x_1 U_{11}}{x_2 U_{21}} \quad (1.19)$$



Фиг. 3

Характер движения ветвей гибкой нити при косом ударе определяется также параметрами x_1 и x_2 . Переброс и захлестывание ветвей нити происходят при $x < 1$. При $x_1 = x_2 = 1$ движение ветвей нити будет происходить по линии движения ударяющего тела.

На фиг. 3 приводится схема расположения ветвей гибкой нити в переходном этапе при прямом и косом ударах при $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ и $f = 0.15$. Расчетные данные для случаев $\gamma = +0^\circ$ и $\gamma = \pm 30^\circ$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Случай	γ°	α_{11}°	α_{21}°	U_{11}	U_{21}	U_{s1}
a	0	49.5	70	0.430	0.734	0.034
б	30	31.8	97.8	0.456	0.775	0.292
в	-30	80.6	44.7	0.326	0.760	-0.09

2. Последующие переходные этапы движения гибкой нити при прямом поперечном ударе. Первый переходный этап движения для данной ветви нити закончится в момент прихода поперечной волны к концу нити. При отражении поперечной волны от конца нити с тормозным элементом угол отклонения нити и скорость ее продольного перемещения изменяются скачком. С этого момента наступит второй переходный этап движения данной ветви нити. После прохождения отраженной волны установится некоторое новое направление ветви нити (фиг. 4). Второй переходный этап движения ветви нити будет продолжаться до момента прихода поперечной волны к точке удара. Движение элементов нити на втором этапе происходит только в продольном направлении, так как предполагается, что сила сопротивления тормозного элемента [всегда направлена вдоль нити. Напишем уравнение изменения количества движения элемента нити при воздействии на него отраженной поперечной волны, идущей обратно к точке удара для верхней ветви:

$$dm (v_0 - u_{s2} \sin \alpha_{11} - u_{12} \sin \alpha_{12}) = T_{12} (\sin \alpha_{11} - \sin \alpha_{12}) d\tau \quad (2.1)$$

$$dm (u_{12} \cos \alpha_{12} + u_{s2} \cos \alpha_{11}) = T_{12} (\cos \alpha_{11} - \cos \alpha_{12}) d\tau \quad (2.2)$$

где u_{s2} — скорость скольжения нити на втором переходном этапе.

Скорость распространения поперечной волны на втором переходном этапе будет

$$b_{12} = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\frac{gT_{12}}{q}} \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.2) получим

$$\sin \alpha_{12} = \frac{1 + (\kappa_1 U_{12} - U_{s2}) \sin \alpha_{11}}{(1 + \kappa_1) U_{12}}, \quad \cos \alpha_{12} = \frac{\kappa_1 U_{12} - U_{s2}}{(1 + \kappa_1) U_{12}} \cos \alpha_{11} \quad (2.4)$$

Исключая отсюда угол α_{12} , получим

$$U_{12}^2 - \frac{2\kappa_1}{2\kappa_1 + 1} (\sin \alpha_{11} - U_{s2}) U_{12} - \frac{1 + U_{s2}^2 - 2U_{s2} \sin \alpha_{11}}{2\kappa_1 + 1} = 0 \quad (2.5)$$

Решая уравнение (2.5), получим

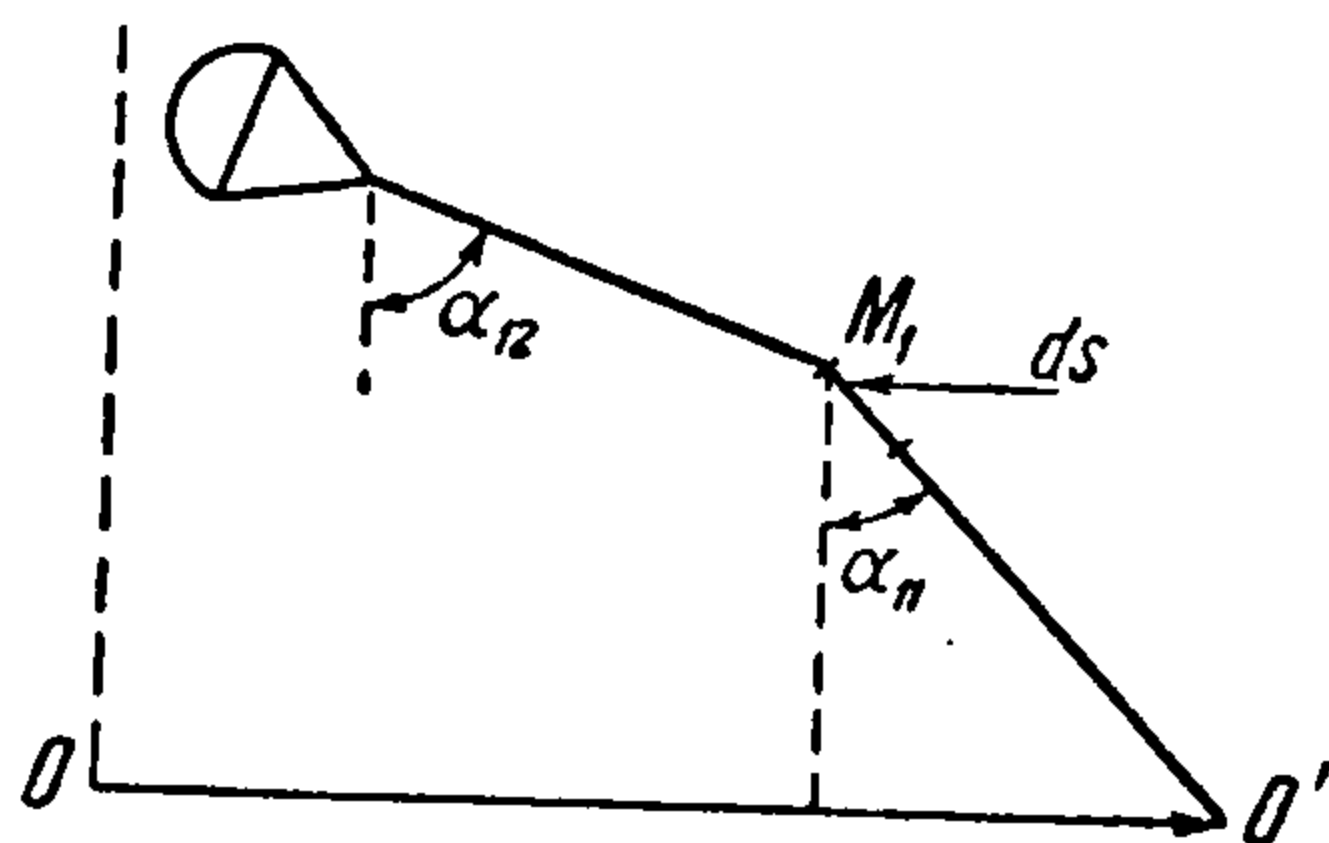
$$U_{12} = \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 1} \left[\sqrt{(\sin \alpha_{11} - U_{s2})^2 + \frac{2\kappa_1 + 1}{\kappa_1^2} (1 + U_{s2}^2 - 2U_{s2} \sin \alpha_{11})} + \sin \alpha_{11} - U_{s2} \right] \quad (2.6)$$

Если скольжения нити на первом и втором этапах нет, тогда

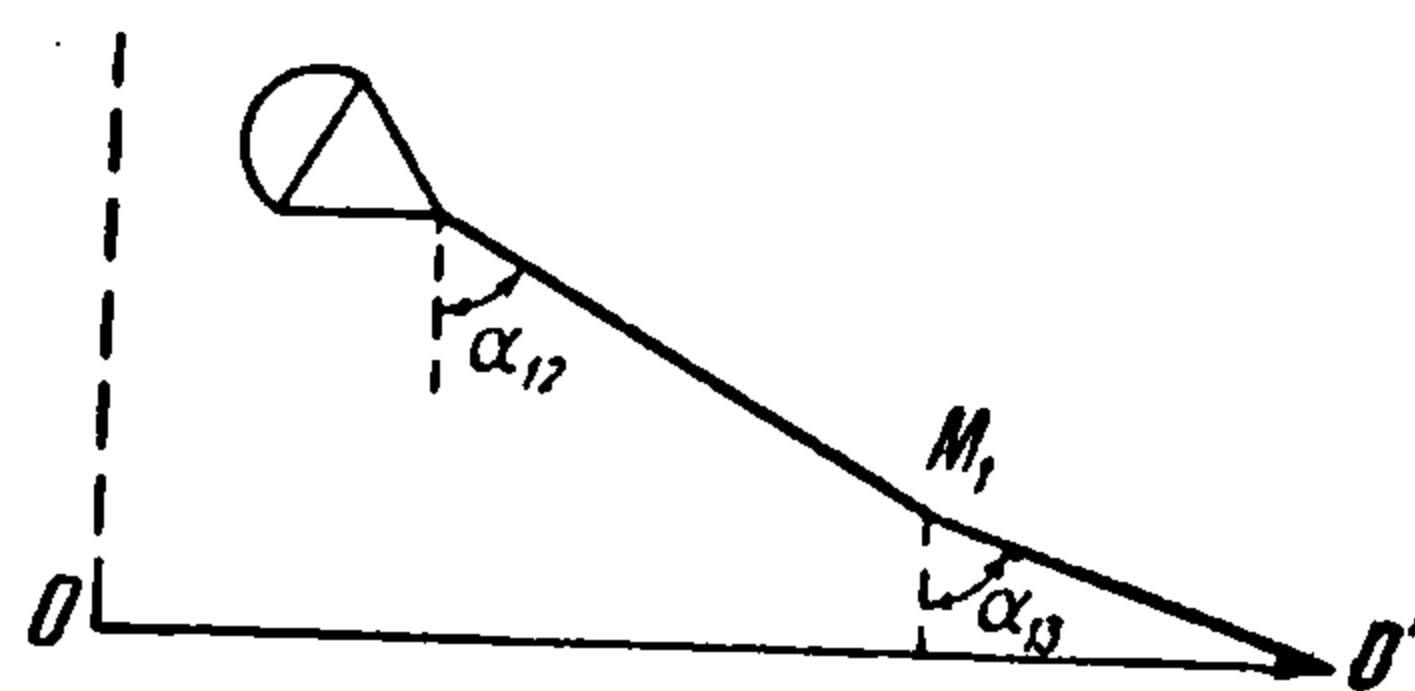
$$U_{s1} = U_{s2} = 0, \quad U_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_1 - 1}}, \quad U_{12} = \frac{2\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{2\kappa_1 - 1}}{2\kappa_1 + 1} \quad (2.7)$$

$$\sin \alpha_{11} = \frac{\sqrt{2\kappa_1 - 1}}{\kappa_1}, \quad \cos \alpha_{12} = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \quad (2.8)$$

Сравнивая формулы выражения (1.9) и (2.6) или U_{11} и U_{12} , легко убедиться, что при $\kappa_1 > 1$ скорость движения конца нити на втором этапе больше, чем на первом этапе, а при $\kappa_1 < 1$, наоборот, меньше, чем на



Фиг. 4



Фиг. 5

первом этапе. В том и другом случаях скорость движения нити на втором этапе значительно ближе к скорости ударяющего тела, чем на первом этапе. Так, например, при $\kappa_1 = 2$ $U_{11} = 0.578$, $\alpha_{11} = 60^\circ$, $U_{12} = 0.912$ и $\alpha_{12} = 70^\circ$, а при $\kappa_1 = 0.6$ $U_{11} = 1.58$, $\alpha_{11} = 106,5^\circ$, $U_{12} = 0,962$, $\alpha_{12} = 100^\circ$.

На третьем переходном этапе движения нити поперечная волна распространяется от точки удара к концу нити (фиг. 5). При действии третьей поперечной волны элементы нити скачком изменяют скорость и угол наклона. Компоненты скорости движения на третьем этапе будут

$$\begin{aligned} v_{13} &= v_0 - u_{s3} \sin \alpha_{13}, & W_{13} &= -u_{s3} \cos \alpha_{13} \\ v_{12}' &= -u_{s3} \sin \alpha_{12}, & W_{12}' &= -u_{s3} \cos \alpha_{12} \end{aligned}$$

где u_{s3} — скорость скольжения нити на третьем этапе. Из уравнений изменения количества движения элемента нити при действии третьей попе-

речной волны получим

$$\sin \alpha_{13} = \frac{1 + U_{13}(\kappa_1 - 1)}{\kappa_1 U_{13} + U_{s3}} \sin \alpha_{12}, \quad \cos \alpha_{13} = \frac{(\kappa_1 - 1) U_{13}}{\kappa_1 U_{13} + U_{s3}} \cos \alpha_{12} \quad (2.9)$$

Отсюда уравнение для U_{13} будет

$$U_{13}^2 - \frac{2}{2\kappa_1 - 1} [(\kappa_1 - 1) \sin \alpha_{12} - \kappa_1 U_{s3}] U_{13} - \frac{1 - U_{s3}^2}{2\kappa_1 - 1} = 0 \quad (2.10)$$

Решая уравнение, получим

$$U_{13} = \frac{\sqrt{[(\kappa_1 - 1) \sin \alpha_{12} - \kappa_1 U_{s3}]^2 + (2\kappa_1 - 1)(1 - U_{s3}^2)} + (\kappa_1 - 1) \sin \alpha_{12} - \kappa_1 U_{s3}}{2\kappa_1 - 1} \quad (2.11)$$

Если $U_s = 0$, тогда

$$\cos \alpha_{13} = \frac{(\kappa_1 - 1)^2}{\kappa_1(\kappa_1 + 1)}, \quad U_{13} = \frac{\sqrt{(2\kappa_1 - 1)(\kappa_1 + 1)^2 + 4\kappa_1(\kappa_1 - 1)^2} + 2(\kappa_1 - 1) \sqrt{\kappa_1}}{(2\kappa_1 - 1)(\kappa_1 + 1)} \quad (2.12)$$

Четвертый переходный этап движения ветви нити характеризуется обратным распространением поперечной волны от конца нити к точке удара. Четвертый этап аналогичен второму этапу.

Из уравнений изменения количества движения найдем

$$\cos \alpha_{14} = \frac{\kappa_1 U_{14} - U_{s4}}{(\kappa_1 + 1) U_{14}} \quad (2.13)$$

$$U_{14} = \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 1} \left[\sqrt{(\sin \alpha_{13} - U_{13})^2 + \frac{2\kappa_1 + 1}{\kappa_1^2} (1 + U_{s3}^2 - 2U_{s3} \sin \alpha_{13})} + \sin \alpha_{13} - U_{s3} \right]$$

Вообще для четного этапа получим формулы

$$\cos \alpha_{12n} = \frac{\kappa_1 U_{12n} - U_{s2n}}{(\kappa_1 + 1) U_{12n}} \cos \alpha_{12n-1} \quad (2.14)$$

$$U_{12n} = \frac{\kappa_1}{2\kappa_1 + 1} \left[\sqrt{(\sin \alpha_{12n-1} - U_{s2n})^2 + \frac{2\kappa_1 + 1}{\kappa_1^2} (1 + U_{s2n}^2 - 2U_{s2n} \sin \alpha_{12n-1})} + \sin \alpha_{12n-1} - U_{s2n} \right]$$

Для нечетного этапа

$$\cos \alpha_{12n+1} = \frac{(\kappa_1 - 1) U_{12n+1}}{\kappa_1 U_{12n+1} + U_{s2n+1}} \cos \alpha_{12n} \quad (2.15)$$

$$U_{12n+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{[(\kappa_1 - 1) \sin \alpha_{12n} - \kappa_1 U_{s2n+1}]^2 + (2\kappa_1 - 1)(1 - U_{s2n+1}^2)} + (\kappa_1 - 1) \sin \alpha_{12n} - \kappa_1 U_{s2n+1}}{2\kappa_1 - 1}$$

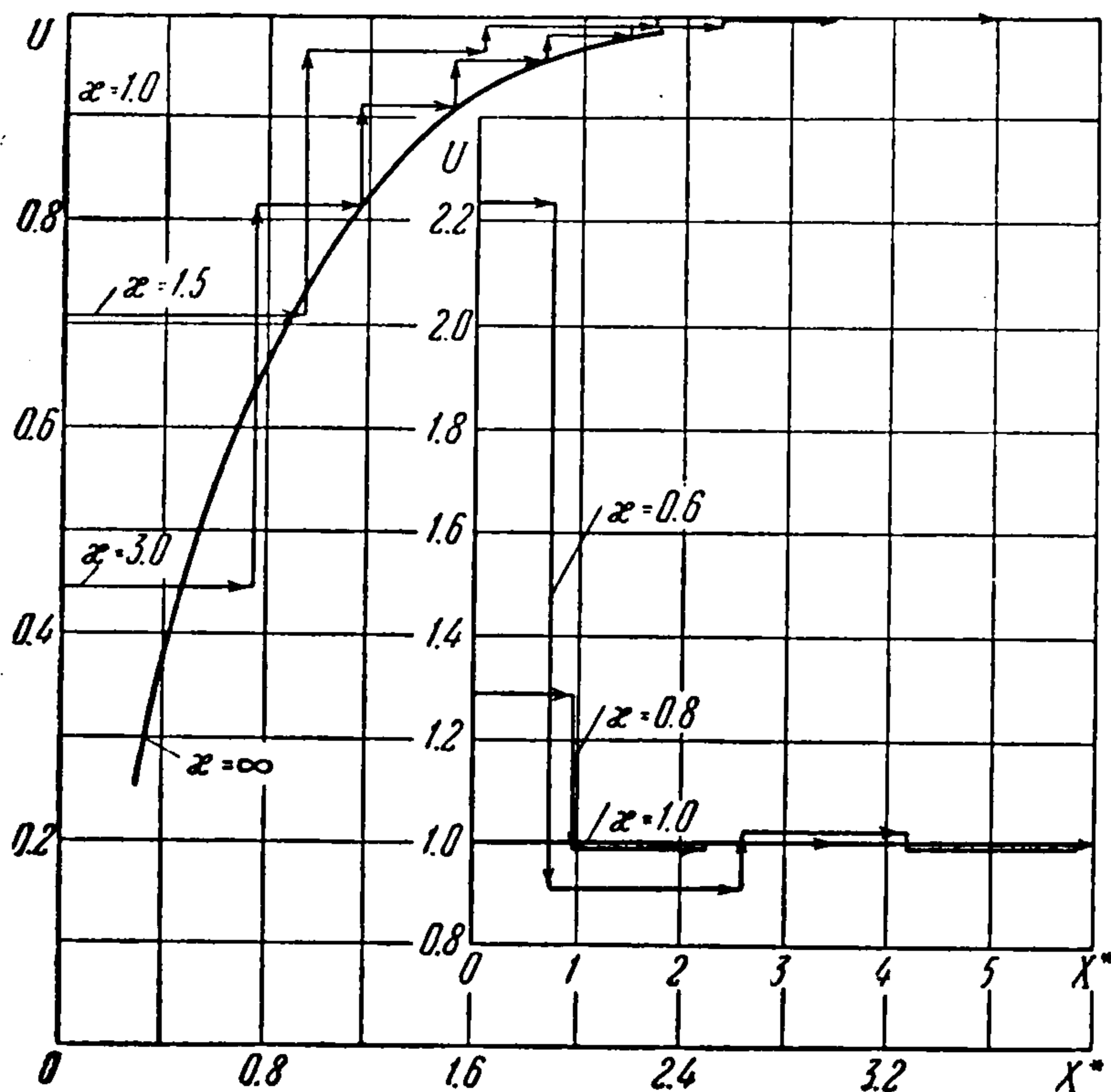
Таким образом, по приведенным формулам всегда можно определить значения угла отклонения нити α и скорости ее продольного движения u для последующего переходного этапа по данным предыдущего этапа.

Формулы, выведенные для верхней (первой) ветви нити, могут быть применены для нижней ветви (второй), если первый индекс заменить на 2, а знак скорости скольжения u_s изменить на обратный. Связь между скоростью скольжения нити u_s и коэффициентом трения f в общем случае

найдем из формулы Эйлера (1.12). Однако надо иметь в виду, что при разных длинах верхней и нижней ветвей нити переходные этапы в ветвях могут не совпадать. Если для верхней ветви имеет место i -й переходный этап, а для нижней k -й, то скорость скольжения u_{si} должна быть равна u_{sk} , а коэффициент трения f должен удовлетворять равенству

$$f = \frac{1}{\alpha_{1i} + \alpha_{2k}} \ln \frac{\kappa_1^2 U_{1i}^2 - U_{si}^2}{\kappa_2^2 U_{2k}^2 - U_{si}^2} \quad (2.16)$$

Продолжительность переходных этапов движения нити неодинакова и при $\kappa > 1$ убывает с увеличением номера этапа. Продолжительность



Фиг. 6

этапа определяется временем хода поперечной волны по данной ветви нити. Пусть начальная длина ветви нити, например верхней, равна l_{10} , продолжительность первого переходного этапа τ_{11} , путь, пройденный ударяющим телом, x_{11} ; тогда

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{l_{10}}{b_{11}} = \frac{l_{10}}{\kappa_1 u_{11}} \\ x_{11} &= v_0 \tau_{11} = \frac{l_{10}}{\kappa_1 U_{11}} \\ \bar{x}_{11} &= \frac{x_{11}}{l_{10}} = \frac{1}{\kappa_1 U_{11}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Длина ветви к концу первого этапа будет

$$l_{11} = l_{10} + u_{s1} \tau_{11} = l_{10} (1 + U_{s1} \bar{x}_{11}) \quad (2.18)$$

Координаты конца ветви нити с тормозным элементом в конце первого переходного этапа будут

$$x_{11}' = 0, \quad y_{11}' = l_{10} - u_{11} \tau_{11} \quad \text{или} \quad \bar{y}_{11}' = \frac{y_{11}'}{l_{10}} = 1 - U_{11} \bar{x}_{11} = 1 - \frac{1}{\kappa_1} \quad (2.19)$$

Продолжительность второго переходного этапа будет

$$\tau_{12} = \frac{l_{12}}{b_{12}} = \frac{l_{10} + u_{s1} \tau_{11} + u_{s2} \tau_{12}}{\kappa_1 u_{12}} \quad \text{или} \quad v_0 \tau_{12} = \frac{l_{11}}{\kappa U_{12} - U_{s2}}$$

Отсюда

$$\bar{x}_{12} = \frac{x_{12}}{l_{10}} = \frac{1 + U_{s1} \bar{x}_{11}}{\kappa_1 U_{12} - U_{s2}}, \quad l_{12} = l_{10} (1 + U_{s1} \bar{x}_{11} + U_{s2} \bar{x}_{12}) \quad (2.20)$$

Координаты конца ветви с тормозным элементом будут

$$\bar{x}_{12}' = U_{12} \bar{x}_{12} \sin \alpha_{12}, \quad \bar{y}_{12}' = \bar{y}_{11}' - U_{12} \bar{x}_{12} \cos \alpha_{12} \quad (2.21)$$

Для третьего переходного этапа получим

$$\tau_{13} = \frac{l_{13}}{b_{13}} = \frac{l_{12}}{\kappa_1 u_{13}}, \quad \bar{x}_{13} = \frac{1 + U_{s1} \bar{x}_{11} + U_{s2} \bar{x}_{12}}{\kappa_1 U_{13}} \quad (2.22)$$

$$l_{13} = l_{10} (1 + U_{s1} \bar{x}_{11} + U_{s2} \bar{x}_{12} + U_{s3} \bar{x}_{13})$$

$$\bar{x}_{13}' = \bar{x}_{12}' + U_{13} \bar{x}_{13} \sin \alpha_{12}, \quad \bar{y}_{13}' = \bar{y}_{12}' - U_{13} \bar{x}_{13} \cos \alpha_{12} \quad (2.23)$$

Вообще для четного переходного этапа будем иметь

$$\bar{x}_{12n} = \frac{1}{\kappa U_{12n} - U_{s2n}} \left(1 + \sum_1^{2n-1} U_{si} \bar{x}_{1i} \right), \quad l_{12n} = l_{10} \left(1 + \sum_1^{2n} U_{si} \bar{x}_{1i} \right) \quad (2.24)$$

$$\bar{x}'_{12n} = \bar{x}'_{12n-1} + U_{12n} \bar{x}_{12n} \sin \alpha_{12n}, \quad \bar{y}'_{12n} = \bar{y}'_{12n-1} - U_{12n} \bar{x}_{12n} \cos \alpha_{12n} \quad (2.25)$$

Для нечетного переходного этапа получим

$$\bar{x}_{12n+1} = \frac{1}{\kappa_1 U_{12n+1}} \left(1 + \sum_1^{2n} U_{si} \bar{x}_{1i} \right), \quad l_{12n+1} = l_{10} \left(1 + \sum_1^{2n+1} U_{si} \bar{x}_{1i} \right) \quad (2.26)$$

$$\bar{x}'_{12n+1} = \bar{x}'_{12n} + U_{12n+1} \bar{x}_{12n+1} \sin \alpha_{12n}, \quad \bar{y}'_{12n+1} = \bar{y}'_{12n} - U_{12n+1} \bar{x}_{12n+1} \cos \alpha_{12n} \quad (2.27)$$

Общий путь x^* , пройденный ударяющим телом за m переходных этапов, будет

$$x^* = l_{10} (\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_m) \quad (2.28)$$

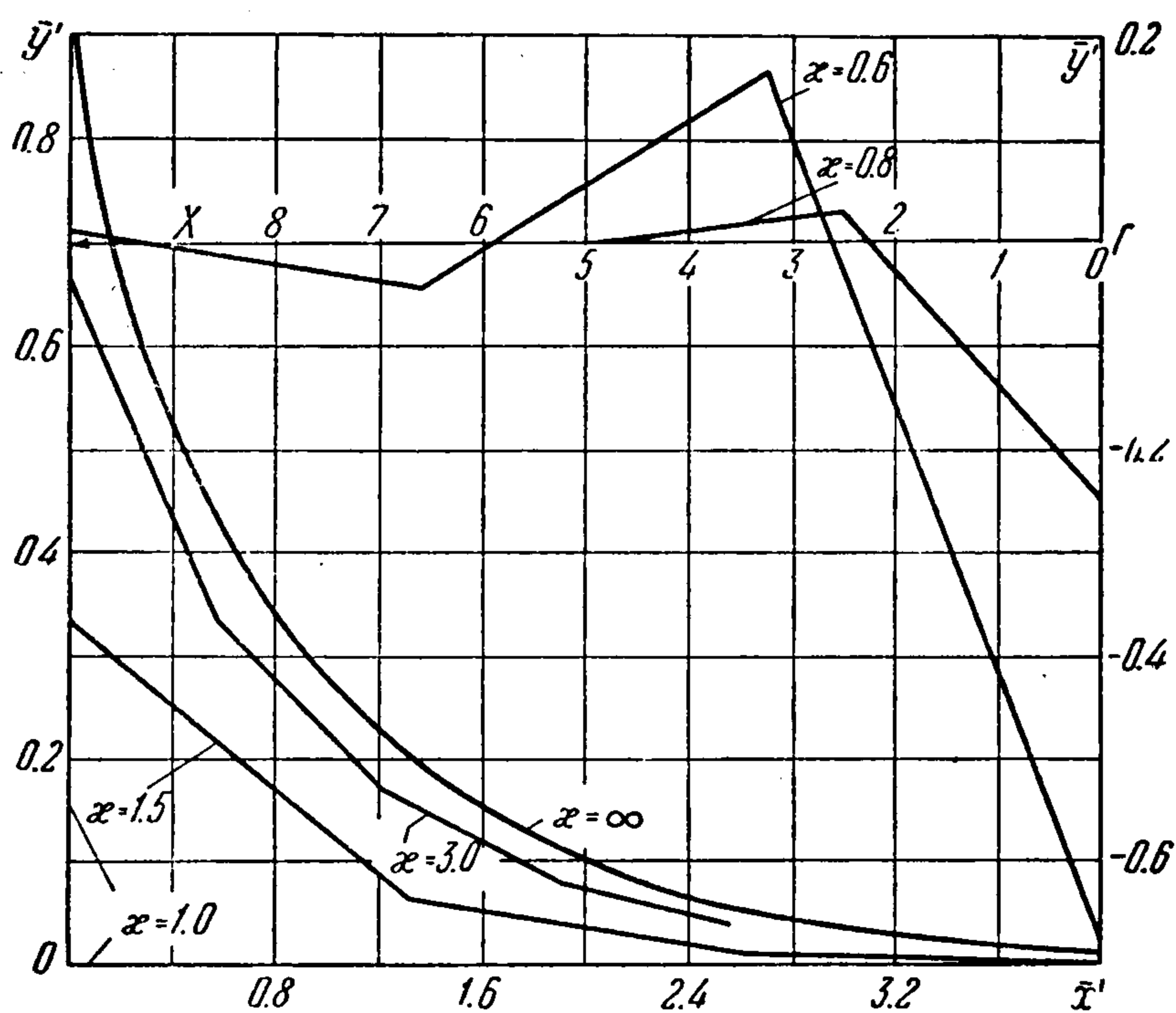
Для второй (нижней) ветви нити в расчетных формулах надо изменить первый индекс на 2 и переменить знак перед U_s . В табл. 3 приводятся вычисленные значения α , u/v_0 , \bar{x} , \bar{x}' и \bar{y}' для разных значений κ в различных переходных этапах при $u_s = 0$.

Таблица 3

Этап	κ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1-й	α	3.142	2.30	2.016	1.824	1.681	1.571	1.240	1.047	0.925	0.841
	U	∞	2.24	1.58	1.29	1.117	1	0.707	0.578	0.500	0.446
	\bar{x}	0	0.744	0.905	0.969	0.994	1	0.943	0.866	0.800	0.747
	\bar{x}'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-й	\bar{y}'	-1	-0.667	-0.43	-0.250	-0.11	0	0.334	0.5	0.6	0.667
	α	1.911	1.842	1.748	1.682	1.624	1.571	1.370	1.231	1.125	1.047
	U	0.707	0.908	0.961	0.987	0.997	1	0.966	0.912	0.862	0.815
	\bar{x}	2.830	1.834	1.488	1.267	1.112	1	0.690	0.548	0.464	0.409
3-й	\bar{x}'	1.886	1.61	1.406	1.242	1.110	1	0.653	0.471	0.361	0.289
	\bar{y}'	-0.334	-0.251	-0.178	-0.111	-0.051	0	0.201	0.333	0.428	0.500
	α	1.231	1.403	1.495	1.543	1.565	1.571	1.504	1.403	1.310	1.231
	U	1.06	1.02	1.01	1.002	1.002	1	0.991	0.972	0.944	0.912
4-й	\bar{x}	1.89	1.63	1.416	1.250	1.110	1	0.672	0.515	0.424	0.364
	\bar{x}'	3.772	3.22	2.812	2.487	2.220	2	1.306	0.942	0.722	0.577
	\bar{y}'	0.332	0.165	0.074	0.028	0.008	0	0.068	0.166	0.257	0.334
	α	1.460	1.508	1.540	1.559	1.568	1.571	1.531	1.460	1.386	1.318
5-й	U	0.983	0.995	1	1	1	1	0.998	0.990	0.976	0.957
	\bar{x}	2.040	1.672	1.430	1.250	1.110	1	0.668	0.505	0.410	0.348
	\bar{x}'	5.762	4.888	4.242	3.737	3.330	3	1.971	1.438	1.116	0.899
	\bar{y}'	0.110	0.060	0.030	0.013	0.005	0	0.041	0.110	0.183	0.251

На фиг. 6 приводятся графики зависимости $U = u/v_0$ от $X^* = x^*/l_{10}$ для различных значений κ . Из графиков видно, что при $\kappa = 1$ скорость конца нити с тормозным элементом равна скорости ударяющего тела для всех переходных этапов при $\kappa > 1$, скорость u скачкообразно увеличивается и уже при $X^* \approx 2$ практически достигает предельного значения, равного скорости ударяющего тела v_0 . Плавная кривая соответствует зависимости u/v_0 от X^* для идеальной невесомой нити. Для идеальной нити, несущей на своих концах тормозные элементы, переходный период при поперечном ударе будет характеризоваться непрерывным изменением наклона нити и

ее скорости движения. Параметр κ в этом случае будет равен ∞ . Угол отклонения нити α будет изменяться от 0 до 90° , а скорость конца нити при отсутствии скольжения нити на ударяющем теле будет $u = v_0 \sin \alpha$.



Фиг. 7

дуг в свою очередь то больше, то меньше 90° . Ветвь нити будет совершать затухающее колебательное движение. При $\kappa \leq 0.5$ ветвь нити в первом переходном этапе входит в режим захлестывания, так как $u \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 180^\circ$.

На фиг. 7 приводятся графики траекторий конца нити с тормозными элементами для различных значений κ при $u_s = 0$.

Поступила 12 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, т. IX, № 4, 1945.
2. Рахматулин Х. А. Об ударе по гибкой нити. ПММ, т. XI, вып. 3, 1947.
3. Рахматулин Х. А. Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

Изменение угла α за время $d\tau$ будет

$$d\alpha = \frac{v_0 \cos \alpha}{l} d\tau \quad (2.29)$$

При $l = \text{const}$ из (2.29) найдем

$$\frac{u}{v_0} = \sin \alpha = \text{th } X^* \quad (2.30)$$

$$\left(X^* = \frac{v_0 \tau}{l} \right)$$

При $\kappa < 1$ скорость движения ветви нити в нечетном переходном этапе будет больше, а в четном меньше, чем скорость движения ударяющего тела, углы отклонения нити бу-