

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕМСЯ В КОНТАКТЕ С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

К. И. Маркова, Е. И. Шемякин

(Ленинград)

В работе рассматривается в линейной постановке задача о распространении волн давления в слое жидкости, покоящемся на упругом полупространстве. Источником, возбуждающим такие волны, может быть, например, искровой разряд в воде. Возникающие при этом в слое жидкости процессы описываются линеаризованными уравнениями гидродинамики (уравнениями гидроакустики), а процессы в полупространстве описываются классическими уравнениями динамической теории упругости. Исследуются однократные отражения волн давления от свободной поверхности слоя жидкости и от границы упругого полупространства и не рассматривается поле преломленных в полупространство волн.

§ 1. Постановка задачи. Вид решения, построенного методом неполного разделения переменных [1]. Рассматривается слой жидкости с двумя граничными поверхностями (фиг. 1), характеризующийся двумя параметрами: ρ^0 — плотность невозмущенной жидкости, $1/c^0$ — скорость звука. Среда ниже поверхности AA характеризуется параметрами λ , μ и ρ .

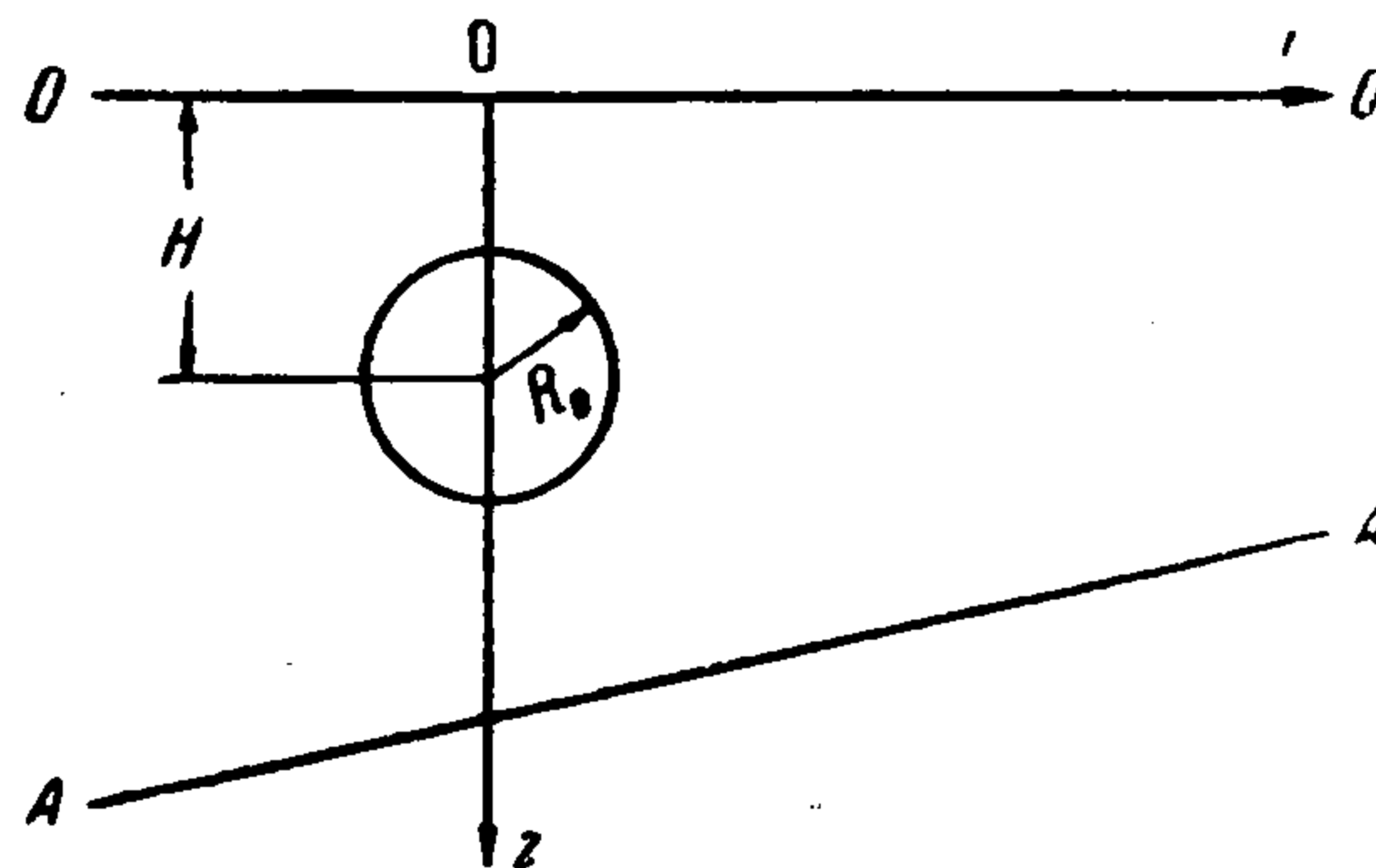
Предполагаем, что при $t < 0$ вся система находится в покое, а в момент $t = 0$ в точке ($r = 0$, $z = -H$) начинает действовать источник типа «центр расширения». Распространяющиеся от источника волны достигают свободной поверхности OO и границы AA и порождают сложное волновое поле давлений в слое жидкости.

Разобьем задачу на две (что допустимо в силу линейности постановки): задачу об отражении волн давления от свободной поверхности OO и задачу об отражении волн давления от упругого полупространства AA .

1°. Первая задача. Пусть на сфере радиуса

$$R = R_0 \quad (R = \sqrt{r^2 + (z - H)^2})$$

при $t = 0$ задано поле давлений как функция времени¹, например, по закону $P_0 e^{-t/\theta}$, $\theta = \text{const}$.



Фиг. 1

¹ В начальной стадии процесс является существенно нелинейным. Поэтому считаем, что линеаризация задачи законна для расчета волнового поля вне сферы радиуса $R = R_0$.

Процесс распространения волн управляется уравнением

$$\Delta \varphi = c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1.1)$$

где $\varphi(r, z, t)$ — потенциал поля давлений в жидкости.

Интегрирование уравнения (1.1) согласно физическим условиям задачи должно быть выполнено при следующих нулевых начальных условиях и граничном условии:

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \left[\rho^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p \right]_{z=0} = 0 \quad (1.2)$$

т. е. при условии, что суммарное давление падающей и отраженной волн на свободной поверхности равно нулю.

Если падающая от источника волна давления описывается формулой

$$p^0(r, z, t) = \frac{P_0 \cdot R_0}{\sqrt{r^2 + (z-H)^2}} \exp\left(-\frac{1}{\theta} [t' - c_0 \sqrt{r^2 + (z-H)^2}]\right) \quad \left(\begin{array}{l} P_0 = \text{const} \\ t' = t + c_0 R_0 \end{array} \right) \quad (1.3)$$

то, как известно, волна, отраженная от свободной поверхности, будет нести отрицательное давление:

$$p'(r, z, t) = \frac{-P_0 R_0}{\sqrt{r^2 + (z+H)^2}} \exp\left(-\frac{1}{\theta} [t' - c_0 \sqrt{r^2 + (z+H)^2}]\right) \quad (1.4)$$

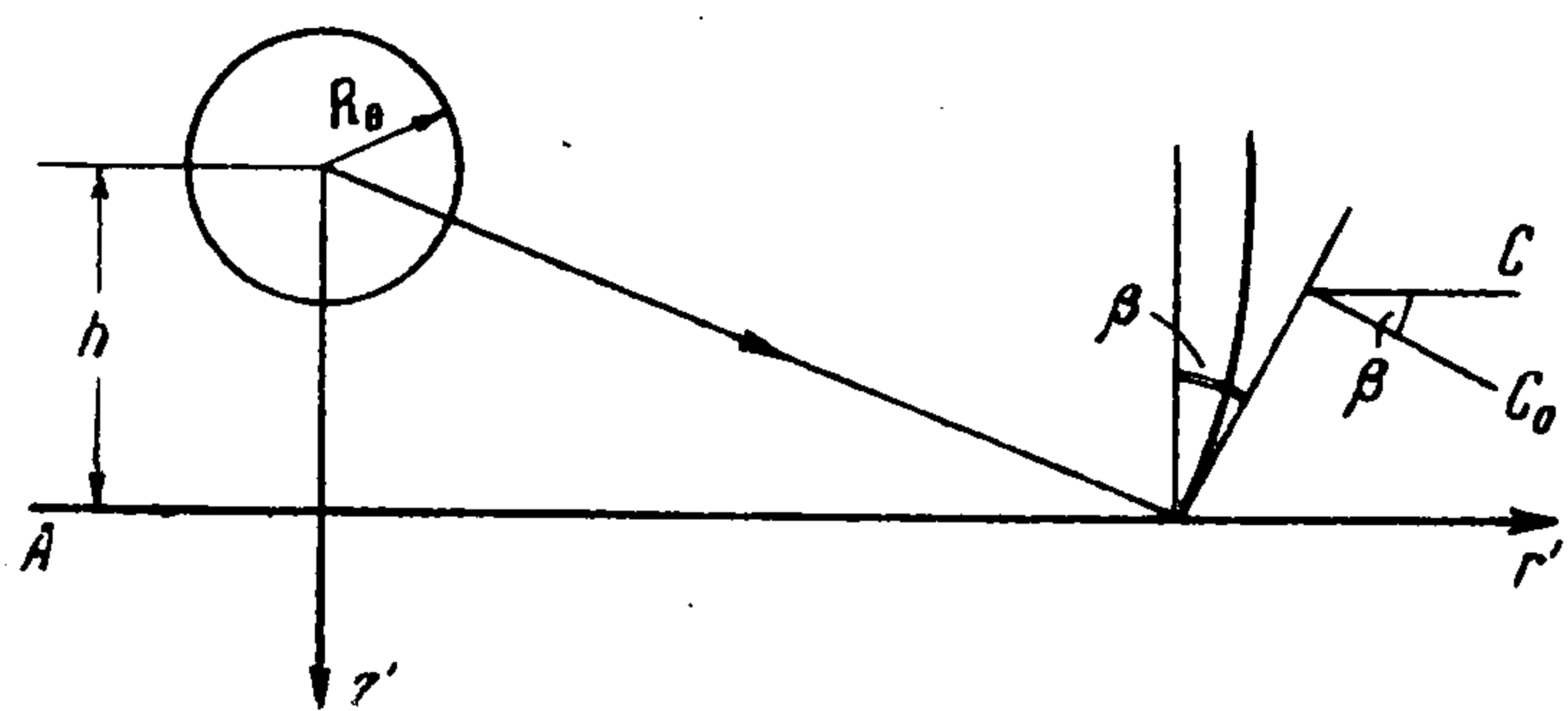
При вычислении импульса падающей волны I_0 , испытавшей влияние свободной поверхности, следует учесть, что роль волны (1.4) сводится лишь к срезанию эпюры волны (1.3). Так что величину импульса можно определить по формуле

$$I_0 = \frac{-P_0 R_0 \theta}{\sqrt{r^2 + (z-H)^2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right) \right] \quad (1.5)$$

где τ — так называемое время действия падающей волны давления с учетом свободной поверхности:

$$\tau = c_0 \left[\sqrt{r^2 + (z+H)^2} - \sqrt{r^2 + (z-H)^2} \right] \quad (1.6)$$

2°. Вторая задача (фиг. 2). В силу центральной симметрии источника можно выбрать новую систему координат (r', z', t) , в которой поле давлений



Фиг. 2

в слое жидкости над поверхностью AA будет обладать осевой симметрией. В этой системе координат (примем для нее прежние обозначения r, z, t) граница раздела жидкой и упругой сред проходит по поверхности $z = 0$.

Пусть поле волн давления, падающих на границу раздела, описывается потенциалом $\varphi^0(r, z, t)$. Ставится задача отыскания поля давлений

в отраженной волне $p_0(r, z, t)$ (или потенциала $\varphi_0(r, z, t)$, $p_0 = \rho_0 \partial \varphi_0 / \partial t$) и поля смещений в упругом полупространстве. Если в упругой среде ввести потенциалы $\psi_1(r, z, t)$ и $\psi_2(r, z, z)$, связанные с составляющими поля смещений u_r, u_z формулами

$$u_r = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\psi_2}{r} \quad (1.7)$$

то приходим к следующей задаче. Требуется найти функции $\varphi_0(r, z, t)$, $\psi_1(r, z, t)$ и $\psi_2(r, z, t)$ из уравнений

$$\Delta \varphi_0 = c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_1 = a^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \left(\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\psi_2}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = b^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad \left(\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \right) \quad (1.9)$$

где $1/a$ — скорость продольных волн, а $1/b$ — скорость поперечных волн в упругом теле при нулевых начальных условиях при $t = 0$:

$$\varphi_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

В качестве граничных условий принимаем обычные в таких задачах условия «жесткого» контакта при $z = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial z} [\varphi^0 + \varphi_0] = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\mu \left[(b^2 - 2a^2) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] = \rho_0 \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} \right] \quad (1.12)$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} + b^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0 \quad (1.13)$$

3°. Предположим сначала, что в задаче (1.8) — (1.13) давление в источнике (на сфере $R = R_0$) изменяется по закону $p_0(t) = \delta(t)$ (здесь δ — функция Дирака). Решение поставленной задачи для этого случая удастся исследовать наиболее простым путем (назовем это решение $p_{0\delta}(r, z, t)$, а переход от $p_{0\delta}$ к решению задачи при произвольном законе изменения давления на сфере $R = R_0$ осуществляется в силу линейности задачи при помощи интеграла Дюамеля.

Выпишем решение $p_{0\delta}$ в том виде, как оно получается по методу неполного разделения переменных:

$$p_{0\delta}(r, z, t) = \frac{R_0}{b} \int_0^\infty k J_0(kr) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{T^*(\zeta)}{\gamma T(\zeta)} \exp\left(k \left[(z-h)\gamma + \zeta \frac{t'}{b} \right] \right) d\zeta \right\} dk \quad (1.14)$$

Здесь $J_0(kr)$ — функция Бесселя вещественного аргумента; контур (l) проходит в правой полуплоскости комплексного переменного ζ параллельно мнимой оси и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T^*(\zeta) &= (2 + \zeta^2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 - \sigma\zeta^4 \frac{\alpha}{\gamma} \\ T(\zeta) &= (2 + \zeta^2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + \sigma\zeta^4 \frac{\alpha}{\gamma} \end{aligned} \quad \left(\sigma = \frac{\rho_0}{\rho} < 1 \right) \quad (1.15)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \delta_1^2 \zeta^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1 + \zeta^2}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \delta_2^2 \zeta^2}, \quad \delta_1 = \frac{a}{b}, \quad \gamma \delta_2 = \frac{c^0}{b}$$

при этом ветви радикалов фиксированы условиями

$$\arg \alpha_1 = \arg \alpha_2 = \arg \gamma = 0 \quad \text{при } \zeta > 0$$

Если же, например, закон изменения давления на сфере $R = R_0$ задан в виде

$$P_0 e^{-t/\theta}, \quad P_0 = \text{const}, \quad \theta = \text{const}$$

то решение $p_0(r, z, t)$ в этом случае получается из (1.14) просто, а именно

$$p_0(r, z, t) = P_0 \int_0^t \exp \frac{\tau}{\theta} P_{0\delta}(r, z, t - \tau) d\tau \quad (1.16)$$

Можно показать, что (1.14) и (1.16) являются решением задачи (1.8) — (1.13) (для (1.14) и (1.16) в граничных условиях соответственно свои $\varphi^\circ(r, z, t)$), т. е. точно удовлетворяют уравнениям и поставленным условиям в определенном классе обобщенных решений.

§ 2. Исследование решения¹. 1°. Рассмотрим контурный интеграл из (1.14) на комплексной плоскости ζ . Подинтегральная функция будет однозначной на плоскости с разрезами, проведенными из точек ветвления радикалов $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$:

$$\zeta = \pm \frac{i}{\delta_2}, \quad \zeta = \pm i, \quad \zeta = \pm \frac{i}{\delta_1} \quad (2.1)$$

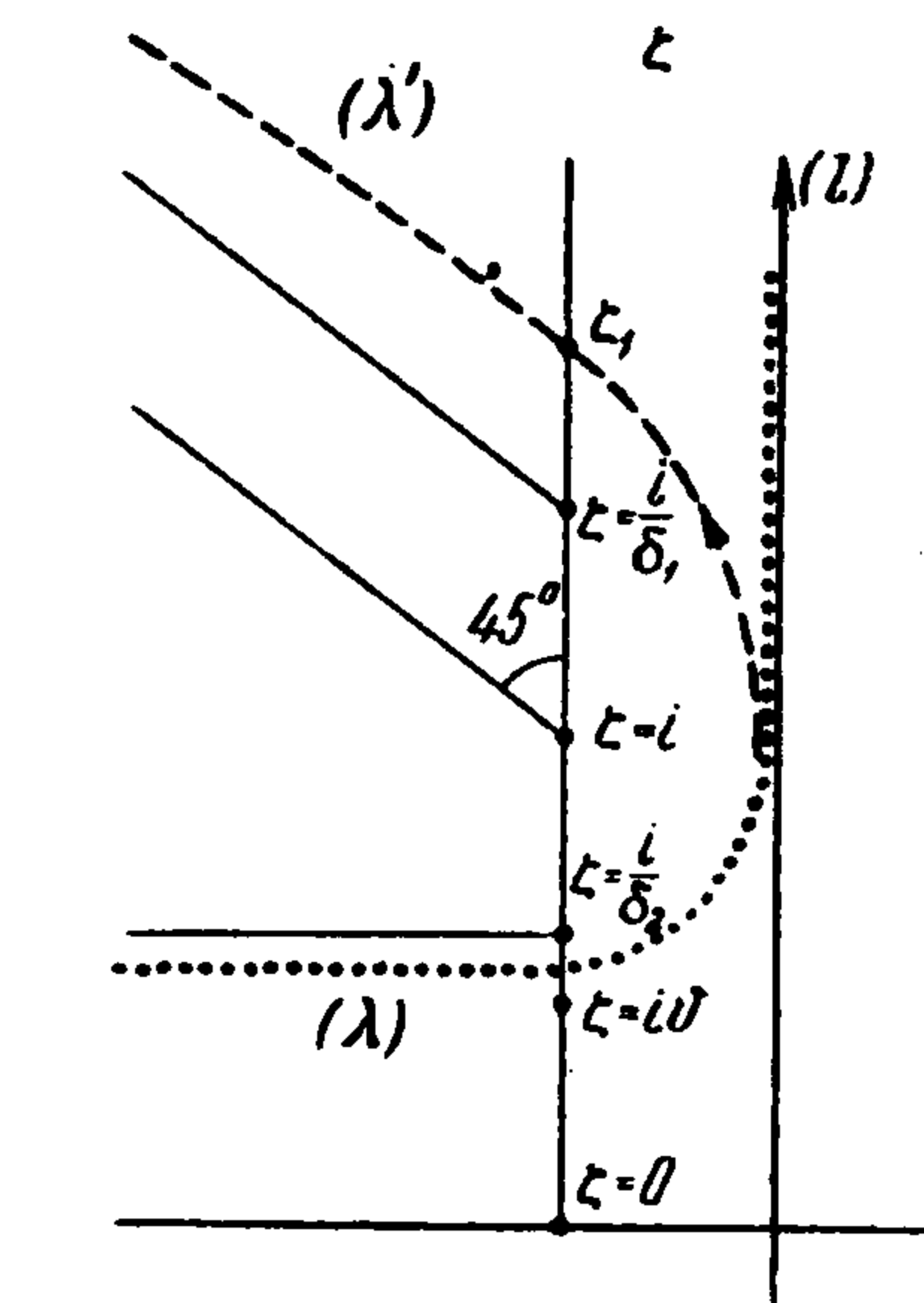
как указано на фиг. 3 (положим для определенности $\delta_1 < 1 < \delta_2$).

Подинтегральное выражение имеет следующие особые точки.

а) Полюсы в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \pm i\vartheta$, при этом $\vartheta < 1/\delta_2$, а значения $\zeta = 0$ и $\zeta = \pm i\vartheta$ — корни уравнения $T(\zeta) = 0$.

Заметим, что $T(\zeta)$ и $T^*(\zeta)$ имеют точку $\zeta = 0$ нулем второй кратности, поэтому $\zeta = 0$ — устранимая особенность подинтегральной функции.

б) Точки ветвления радикалов (2.1).



Фиг. 3

В соответствии с отмеченными особенностями в подобных задачах^[5,10] обычно осуществляется следующий план исследований:

- сначала вычисляется поле по вычетам в точках $\zeta = \pm i\vartheta$, при этом контур (l) деформируется в контур (λ) , указанный на фиг. 3 пунктиром;
- затем асимптотическими методами вычисляется интеграл по контуру (λ) .

Вычисление поля контурного интеграла по вычетам в точках $\zeta = \pm i\vartheta$, последующее интегрирование результата по Фурье—Бесселю и дополнительное интегрирование согласно (1.16) приводят к описанию «поверхностной» волны давления, распространяющейся по границам раздела жидкой и упругой сред. Свойства этой волны во многом напоминают свойства обычной релеевской волны на свободной границе полупространства^[5]. Если произвести учет многократных отражений волн давления в слое жидкости, то можно установить своеобразную дисперсию этих волн, отмеченную в^[1].

Запишем интеграл по контуру (λ) в виде

$$M = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} F(\zeta) \exp kf(\zeta) d\zeta \quad (2.2)$$

¹ Заметим, что в работах^[1,2,3,4], посвященных этой же задаче, были затронуты аналогичные проблемы, но авторы этих работ или ограничивались построением решения^[2,3], или преследовали другие цели (например, исследование интерференционного поля скоростей или смещений в^[1,4]). Ниже изучается поле давлений.

К изучению таких интегралов применяется метод стационарной фазы [6]. По терминологии этого метода $F(\zeta) = T^*(\zeta)/T(\zeta)$ — медленно меняющаяся функция, а $f(\zeta) = \zeta t'/b + (z-h)\gamma$ — фазовая функция. Стационарные точки последней

$$\zeta_{1,2} = \pm \frac{i}{\delta_2} \frac{t'}{\sqrt{t'^2 - c_0^2(h-z)^2}}, \quad f'(\zeta_{1,2}) = 0 \quad (2.3)$$

Интеграл $M \neq 0$ при $t' > c_0(h-z)$.

В теории метода стационарной фазы доказывається, что главный член асимптотического представления интеграла получается интегрированием по окрестности стационарных точек (2.3). В то же время, как это следует из (2.3), эти точки могут быть расположены в любом из трех промежутков (рассматриваем в силу симметрии только полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$):

$$\left(\frac{i}{\delta_2}, i\right), \quad \left(i, \frac{i}{\delta_1}\right), \quad \left(\frac{i}{\delta_1}, i\infty\right) \quad (2.4)$$

Как будет видно из дальнейшего, в каждом из случаев имеются свои особенности волнового процесса. Рассмотрим, например, третий случай:

$$\frac{1}{\delta_1} < |\zeta_1| < \infty \quad (2.5)$$

Положение стационарной точки и деформированный контур (λ') указаны на фиг. 3 (контур (λ') — штрихами). В этом случае можно не воспроизводить подробных выкладок по методу стационарной фазы, а воспользоваться готовыми формулами [7].

Разложим $T^*(\zeta)/T(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta = \zeta_1$ и ограничимся первым членом разложения¹.

Тогда

$$M \approx \frac{T^*(\zeta_1)}{T(\zeta_1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda')} \frac{1}{\gamma} \exp\left(k \left[\zeta \frac{t'}{b} - (h-z)\gamma\right]\right) d\zeta \quad (2.6)$$

Теперь в качестве контура интегрирования можно взять опять меллиновский контур: $\text{Re} \zeta = \sigma > 0$. Полученный интеграл

$$M^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_2^2 \zeta^2}} \exp\left(k \left[\zeta \frac{t'}{k} - (h-z)\sqrt{1 + \delta_2^2 \zeta^2}\right]\right) d\zeta$$

вычисляется и равен

$$\begin{aligned} M^* &= 0 && \text{для } t' < c_0(h-z), \\ M^* &= bJ_0\left(\frac{k}{c_0} \sqrt{t'^2 - c_0^2(h-z)^2}\right) && \text{для } t' > c_0(h-z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если подставить полученный результат в интеграл по k и выполнить интегрирование, то получим следующий результат:

$$p_{0\delta}(r, z, t) = R_0 A \frac{\delta(t' + c_0 \sqrt{r^2 + (h-z)^2})}{\sqrt{r^2 + (h-z)^2}}, \quad A = \frac{T^*(\delta_1)}{T(\zeta_1)} \quad (2.8)$$

¹ Точными оценками можно убедиться, что учет последующих членов разложения $T^*(\zeta)/T(\zeta)$ не изменяет главного члена в асимптотическом представлении, полученном ниже.

где $\delta(\xi_{c_0})$ — функция Дирака¹; ζ_1 можно взять в виде

$$\zeta_1 = \frac{i \sqrt{r^2 + (h-z)^2}}{\delta_2 r} = \frac{l}{\delta_2 \cos \beta} \quad (2.9)$$

а $\xi_{c_0} = 0$ — уравнение фронта отраженной волны:

$$\xi_{c_0} \equiv t' - c_0 \sqrt{r^2 + (h-z)^2} \quad (2.10)$$

2°. Перейдем к случаю, когда точка ζ_1 расположена в промежутке $(i, i/\delta_1)$. Если воспользоваться прямыми рассуждениями метода стационарной фазы и деформировать контур, как указано на фиг. 4, то можно получить приближенное представление контурного интеграла в окрестности седловой точки.

Если полученный результат проинтегрировать по k , то для $p_{0\delta}$ в этом случае можно выписать приближенные формулы²

$$p_{0\delta}(r, z, t) = \frac{R_0}{\sqrt{r} |f''(\zeta_1)| \sqrt{\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1}} \left[A_1 \delta \left(r - \frac{1}{c_0} \sqrt{t'^2 - c_0^2 (h-z)^2} \right) - B_1 \left(-r + \frac{1}{c_0} \sqrt{t'^2 - c_0^2 (h-z)^2} \right)^{-1} \right] \quad (2.11)$$

где A_1 и B_1 при фиксированных параметрах, характеризующих среды, зависят только от угла падения β (или угла отражения) и описываются формулами

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1} \left[(2 - |\zeta_1|^2)^4 + 16 (1 - \delta_1 |\zeta_1|^2) \left((|\zeta_1|^2 - 1) - \sigma^2 |\zeta_1|^8 \frac{1}{16 (\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1)} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi \Delta_1} \left(2\sigma |\zeta_1|^4 (2 - |\zeta_1|^2)^2 \frac{\sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}}{\sqrt{\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1}} \right)$$

$$\Delta_1 = \left\{ (2 - |\zeta_1|^2)^4 + \left[4 \sqrt{|\zeta_1|^2 - 1} \sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2} + \sigma |\zeta_1|^4 \frac{\sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}}{\sqrt{\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1}} \right]^2 \right\}$$

При вычислении величин A_1 и B_1 опять можно считать ζ_1 по (2.9).

Существенно то, что в этом случае нельзя ограничиться одним коэффициентом отражения для характеристики амплитуды отраженной волны, а приходится рассматривать две самостоятельные величины A_1 и B_1 ; первая из них играет роль коэффициента отражения, а вторая характеризует искажение формы отраженной волны давления по сравнению с первым случаем.

Кроме того, в этом случае вычисление необходимо дополнить изучением интеграла по разрезу (фиг. 4). Приближенное значение этого интеграла (если выполнить заодно интегрирование по k) описывается формулой

$$P_0^{(k)} \delta(r, z, t) = \frac{K_0 R_0}{\sqrt{r}} \varepsilon \left(\frac{t'}{a} - r - \frac{h-z}{\delta_1} \sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2} \right) \left(\frac{t'}{b} - \frac{(h-z) \delta_2^2}{\sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}} \right)^{-3/2} \quad (2.13)$$

$$K_0 = \frac{\sigma \delta_1^4 \sqrt{\delta_1}}{(\delta_2^2 - \delta_1^2) [2\delta_1^2 - 1]^2}$$

¹ Здесь и ниже в аналогичных формулах мы ставим знаки равенства, на самом деле эти равенства содержат в правой части лишь главные члены асимптотических разложений соответствующих функций.

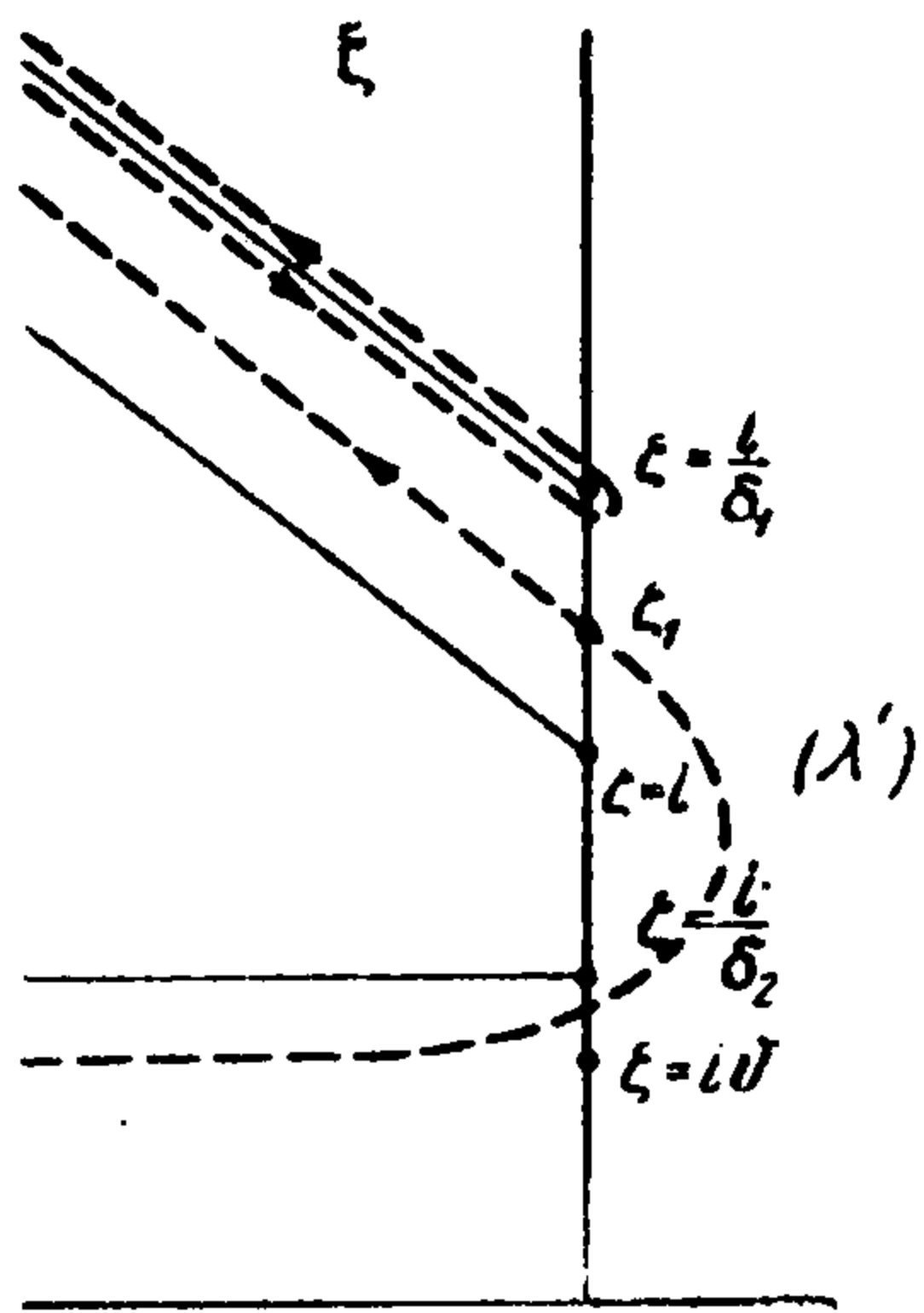
² (2.11) дает главный член асимптотического представления функции $p_{0\delta}$ при

$$\frac{kt'}{c_0} \gg 1, \quad \frac{1}{c_0} \sqrt{t'^2 - c_0^2 (h-z)^2} \gg 1$$

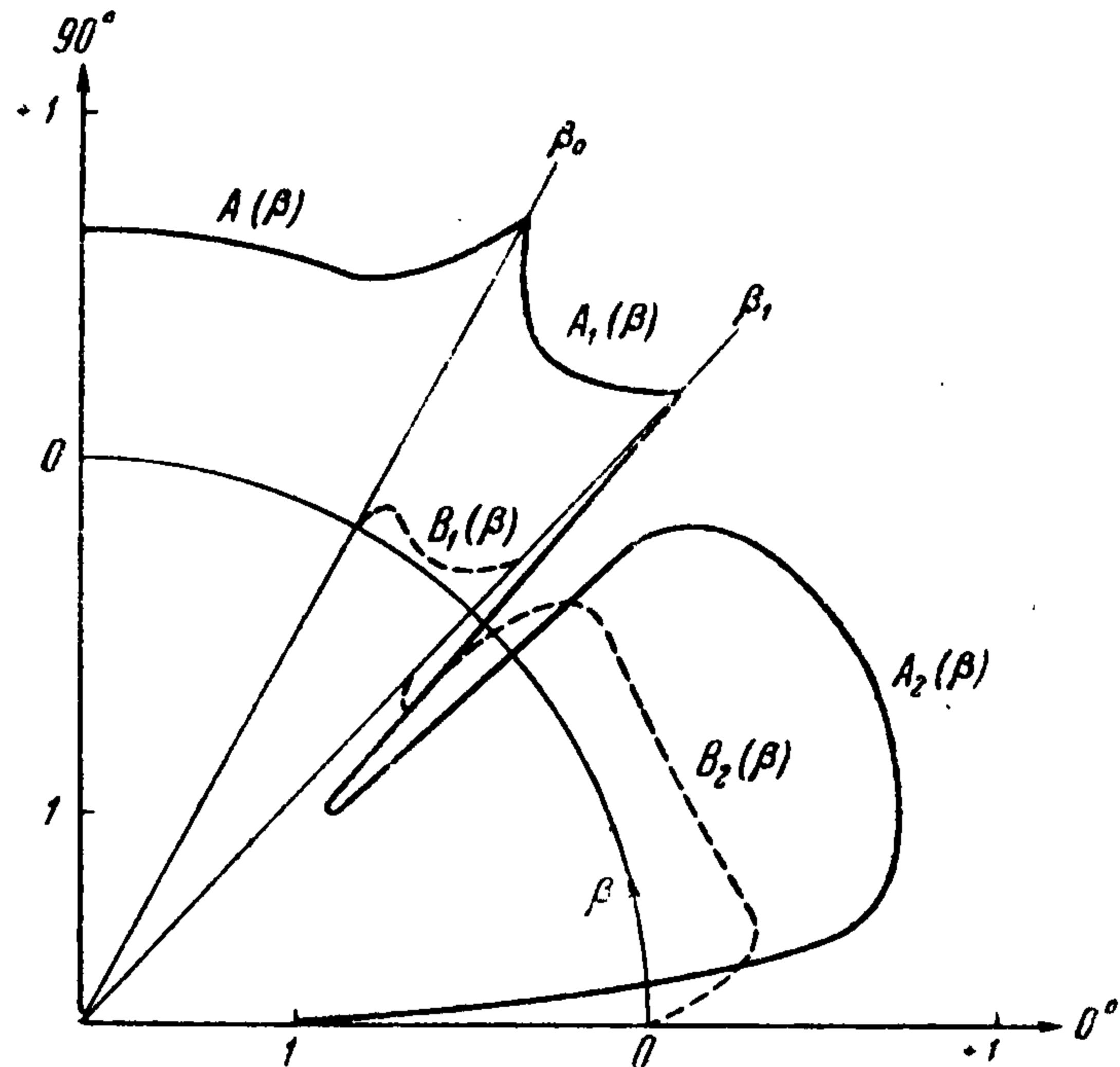
где $\varepsilon(\xi_{k_1})$ — единичная функция Хевисайда:

$$\varepsilon(\xi_{k_1}) = \begin{cases} 0, & \xi_{k_1} < 0 \\ 1, & \xi_{k_1} > 0 \end{cases} \quad \left(\xi_{k_1} \equiv \frac{t'}{a} - r - \frac{h-z}{\delta_1} \sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2} \right)$$

При этом $\xi_{k_1} = 0$ — уравнение конического фронта этой волны. Наконец, если точка ζ_1 расположена в промежутке $(i/\delta_2, i)$, где $\delta_2 > 1$, то прибли-



Фиг. 4



Фиг. 5

женное вычисление приведет к формуле для давления $p_{отр\delta}$ в отраженной волне (2.11), только вместо A_1, B_1 нужно подставить величины A_2, B_2 :

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ [(2 - |\zeta_1|^2)^2 - 4\sqrt{1 - |\zeta_1|^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}]^2 - \sigma^2 |\zeta_1|^8 \frac{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}{\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1} \right\} \quad (2.14)$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi \Delta_2} \left\{ 2\sigma |\zeta_1|^4 \frac{\sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}}{\sqrt{\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1}} [(2 - |\zeta_1|^2)^2 - 4\sqrt{1 - |\zeta_1|^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}] \right\}$$

$$\Delta_2 = [(2 - |\zeta_1|^2)^2 - 4\sqrt{1 - |\zeta_0|^2} \sqrt{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}]^2 + \sigma^2 |\zeta_1|^8 \frac{1 - \delta_1^2 |\zeta_1|^2}{\delta_2^2 |\zeta_1|^2 - 1} \quad (2.15)$$

Характер изменения величин A, A_1, B_1, A_2 и B_2 в зависимости от угла β указан на фиг. 5.

В этом случае также имеет место волна (2.13); кроме того, появляется еще одна волна с коническим фронтом:

$$p_0^{(k_2)} \delta = \frac{R_0}{Vr} \left(\frac{t'}{b} - \frac{(h-z)\delta_2^2}{V\delta_2^2 - 1} \right)^{-3/2} \left\{ K_1 \varepsilon \left(\frac{t'}{b} - r - [h-z] \sqrt{\delta_2^2 - 1} \right) - K_2 \ln \left| \frac{t'}{b} - r - [h-z] \sqrt{\delta_2^2 - 1} \right| \right\} \quad (2.16)$$

$$K_1 = \frac{8\sigma(1 - \delta_1^2) [\sigma^2 \delta_1^2 + \delta_2^2 - (1 + \sigma^2)]}{[\sigma^2 \delta_1^2 + \delta_2^2 - 1 - \sigma^2]^2 + 4\sigma^2(1 - \delta_1^2)(\delta_2^2 - 1)}$$

$$K_2 = \frac{16\sigma(1 - \delta_1^2)^{3/2} \sqrt{\delta_2^2 - 1}}{[\sigma^2 \delta_1^2 + \delta_2^2 - 1 - \sigma^2]^2 + 4\sigma^2(1 - \delta_1^2)(\delta_2^2 - 1)}$$

Наличие дополнительной особенности, характеризуемой функцией $\ln |\xi_{k_2}|$, является, по-видимому, следствием того, что волна давления (2.16) распространяется в поле давлений, созданном волной (2.13).

Если исследовать поле преломленных волн, то легко обнаружить связь конических волн (2.13) и (2.16) с полем продольных и поперечных волн в упругом полупространстве.

3°. Если выполнить приближенное интегрирование (2.11), (2.13) и (2.16) с ядром $\exp[-t/\theta]$ согласно (1.16), то можно получить эпюры волн давления в отраженной и конических волнах. При этом удается полно охарактеризовать поле давлений по амплитудам и импульсам в зависимости от P_0 и R_0 .

Выпишем окончательные формулы для определения поля давлений в окрестности фронта отраженной волны и затем дадим качественное описание общей картины волн в слое жидкости.

Для того чтобы разграничить описанные выше три случая, прибегнем к геометрической интерпретации. Введем в рассмотрение кажущуюся скорость падающей волны вдоль границы раздела жидкой и упругой сред (фиг. 2):

$$c = \frac{1}{\cos \beta}$$

При падении волн, близком к нормальному, c превосходит величину скорости продольных волн a^{-1} в упругом полупространстве и при уменьшении β уменьшается. Наконец, при некотором β_0 она становится равной a^{-1} , т. е.

$$\frac{1}{c_0 \cos \beta_0} = \frac{1}{a} \quad \text{или} \quad \beta_0 = \arccos \frac{a}{c_0} \quad (2.17)$$

Легко видеть, что при $\beta > \beta_0$ имеем первый (рассмотренный в п. 2°) случай, а при $\beta < \beta_0$ — второй. Соответственно этому при $\beta > \beta_0$

$$p_0(r, z, t) = \frac{P_0 R_0 A}{\sqrt{r^2 + (h-z)^2}} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} [t' - c_0 \sqrt{r^2 + (h-z)^2}]\right\} \quad (2.18)$$

а при $\beta < \beta_0$

$$p_0(r, z, t) = \frac{P_0 R_0}{\sqrt{r^2 + (h-z)^2}} \exp\left[-\frac{1}{\theta} (t' - t_{\text{отр}})\right] \times \\ \times \left[A_1 \varepsilon(t' - t_{\text{отр}}) - B_1 \bar{\text{Ei}}\left(\frac{t' - t_{\text{отр}}}{\theta}\right)\right] \quad (2.19)$$

$$t_0 = c_0 \sqrt{r^2 + (h-z)^2}$$

Здесь $\bar{\text{Ei}}(x)$ — символ функции Эйлера, значения которой могут быть взяты из таблиц [8].

Аналогичное описание эпюры давления было предложено в [9] при отражении плоской волны от границы раздела двух жидких сред.

При $\beta < \beta_0$ продольные возмущения по грунту обгоняют волну давления в слое жидкости и порождают в слое жидкости коническую волну, приближенное описание которой

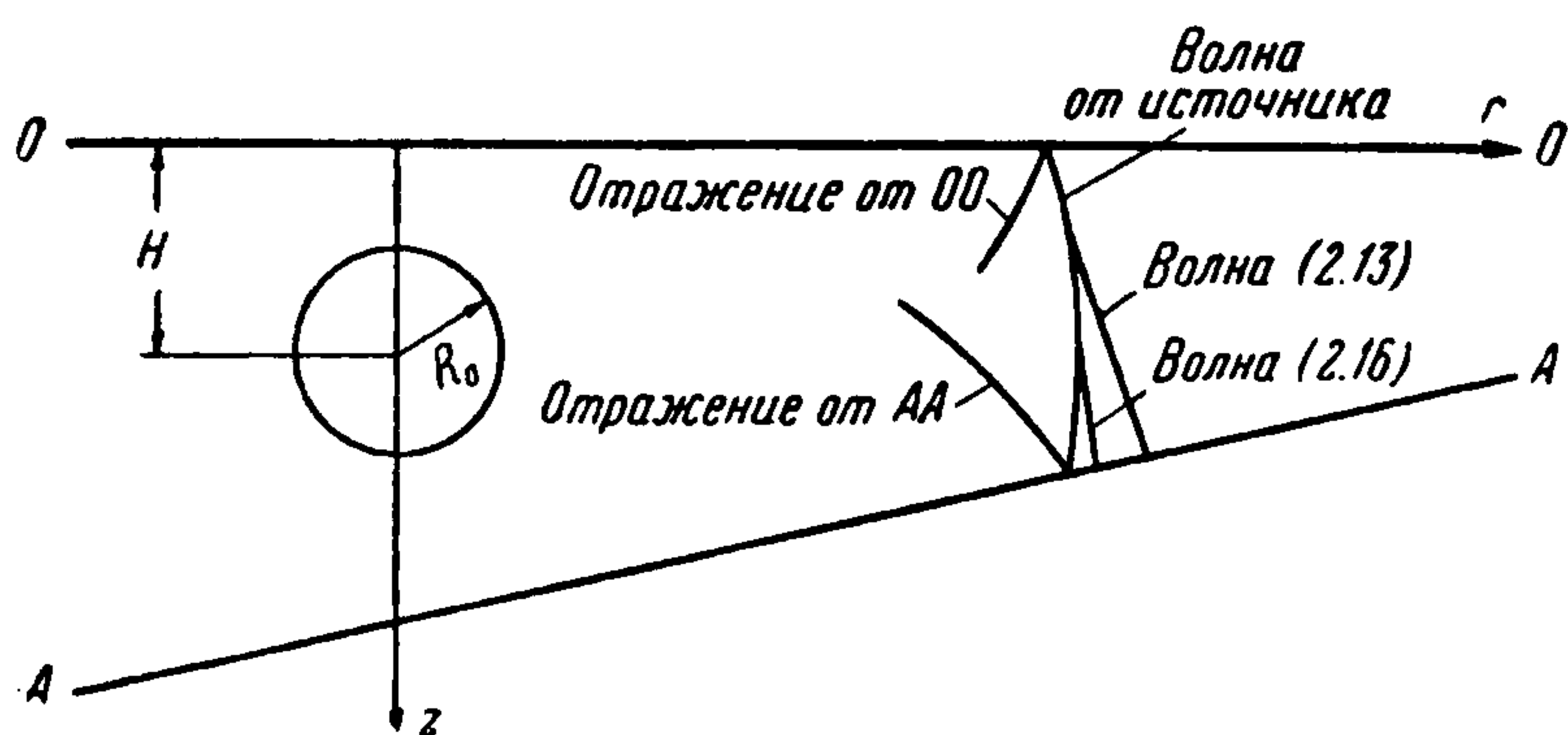
$$p_0^{(k_1)} = \frac{P_0 R_0 K_0 \theta}{\sqrt{r} [t'/b - \delta_2^2 (h-z) / \sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}]^{3/2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t' - t_2}{\theta}\right)\right] \\ t_1 = a \left(r + \frac{h-z}{\delta_1} \sqrt{\delta_2^2 - \delta_1^2}\right) \quad (2.20)$$

При получении этой формулы из (2.13) при помощи (1.16) можно пренебречь изменением знаменателя в промежутке изменения времени $t_1 < \tau < t_1 + 10\theta$ вследствие малости θ .

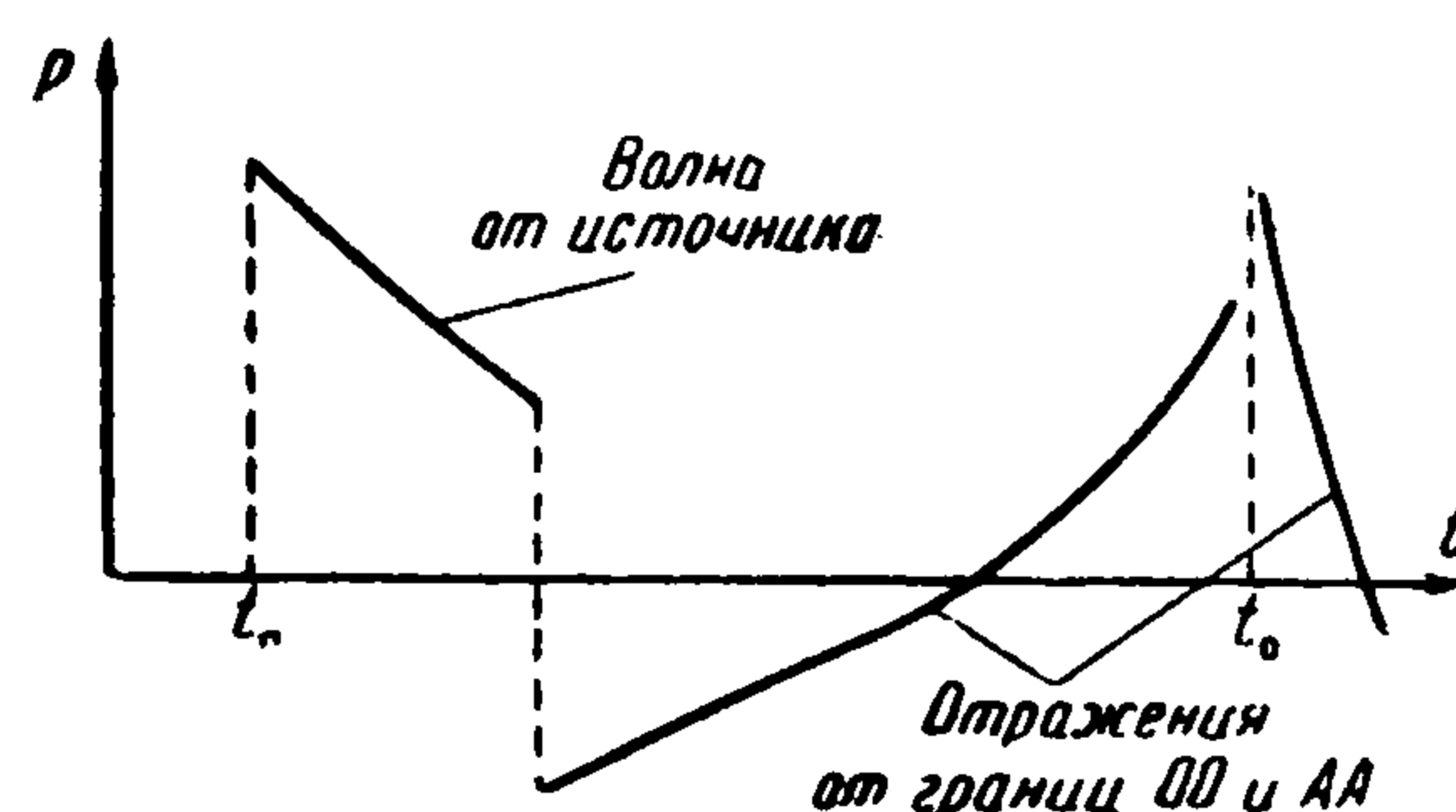
При дальнейшем увеличении r угол β уменьшается, с уменьшается также и при некотором β_1 становится равным скорости поперечных возмущений в упругой среде b^{-1} , т. е.

$$\frac{1}{c_0 \cos \beta_1} = \frac{1}{b} \quad \text{или} \quad \beta_1 = \arccos \frac{b}{c_0} \quad (2.21)$$

Как и следовало ожидать, описание $p_0(r, z, t)$ в этом случае дается формулой (2.19), но вместо A_1 и B_1 нужно взять величины A_2, B_2 из (2.15). Поскольку при $\beta < \beta_1$ поперечные возмущения в упругой среде обгоняют волны давления в слое жидкости, то они также порождают дополнительное поле давления в слое жидкости — вторую коническую волну, описание которой легко получить по аналогии с (2.20) при помощи формул (1.16) и (2.16).



Фиг. 6



Фиг. 7

Укажем также формулу для вычисления импульса отраженной волны при $\beta < \beta_0$

$$I_0 = \frac{P_0 R_0 \theta}{\sqrt{r^2 + (h-z)^2}} \left[A \left(1 - \left[\exp - \frac{t^* - t_0}{\theta} \right] \right) - B_\nu \left(\exp \frac{t_0 - t_1}{\theta} \bar{Ei} \left(- \frac{t_0 - t_1}{\theta} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \exp \left[- \frac{t^* - t_0}{\theta} \right] \bar{Ei} \left(\frac{t^* - t_0}{\theta} \right) - \ln \frac{t_0 - t_1}{t^* - t_0} \right) \right] \quad (\nu = 1, 2) \quad (2.22)$$

Здесь смысл всех обозначений ясен из предыдущего, только величина t^* подлежит определению из уравнения

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \bar{Ei} \left(\frac{t^* - t_0}{\theta} \right)$$

которое можно быстро решить графически.

Общая волновая картина в слое жидкости при этом представляется следующей (фиг. 6): к наблюдателю в точку (r, z) приходят две конические, падающая и отраженные от границ волны. Если же наблюдатель расположен вблизи границы раздела жидкой и упругой сред, к нему приходят и волны давления, вызванные «поверхностной» волной (см. п. 1°).

Времена прихода этих волн могут быть вычислены по приведенным формулам. (Следует учесть при этом, что окончательное представление решения задач об отражении от свободной поверхности и от границы жидкой и упругой сред нужно записать в единой системе координат, связанной, например, со свободной поверхностью. Эти окончательные фор-

мулы ввиду их громоздкости мы не приводим. По-видимому, наиболее интенсивной будет группа, в которую входят волна от источника и ее однократные отражения от границ).

Качественный вид эпюры в этом случае приведен на фиг. 7. К сожалению, мы не можем привлечь для количественного сравнения имеющиеся в [9] экспериментальные эпюры, так как описание опытов не содержит всех необходимых для этого данных.

Поступила 4 VII 1956

Институт химической физики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. П е т р а ш е н ь Г. И. Колебания упругого полупространства, покрытого слоем жидкости. Уч. зап. ЛГУ, вып. 24, № 149, 1951.
2. З в о л и н с к и й Н. В. Распространение возмущений от точечного импульса в упругом полупространстве, покрытом слоем жидкости. ДАН СССР, т. IX, № 6, 1948; т. XV, № 2, 1949.
3. Н а р ы ш к и н а Е. А. Об одной смешанной задаче теории колебания. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 38, 1934.
4. Ш е р м а н Д. И. О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 115, 1945.
5. П е т р а ш е н ь Г. И., О г у р ц о в К. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, вып. 24, № 149, 1951.
6. П е т р а ш е н ь Г. И., М а р ч у к Г. И., О г у р ц о в К. И. О задаче Ламбэ в случае полупространства, Уч. зап. ЛГУ, вып. 21, № 35, 1950.
7. Ш е м я к и н Е. И. Распространение нестационарных возмущений в вязко-упругой среде. ДАН СССР, т. CIV № 1, 1955.
8. Я н к е Е., Э м д е Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГИТТЛ, 1949.
9. А р о н с А., Й е н н и Д. Изменение формы звукового импульса при полном внутреннем отражении. «Распространение звука в океане», сборник статей, 1951.
10. Ш е м я к и н Е. И., Ф а й н ш м и д т В. Л. Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой. Уч. зап. ЛГУ, вып. 28, № 148, 1954.