

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ ПО СХЕМЕ КИРХГОФА

Г. Н. Пыхтеев

(Москва)

В теории крыла для случая плавного безотрывного обтекания достигнут большой успех в решении труднейшей задачи — определения сил, действующих на обтекаемое тело. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли хорошо разработанные методы теории крыла перенести с необходимыми изменениями на случай отрывного обтекания? Этому вопросу посвящены исследования В. В. Голубева. Он показал, что для определения величины сопротивления при отрывном плоском обтекании какого-либо тела или дуги достаточно знать два первых коэффициента в разложении характеристической функции $\chi = dz/dw$ в окрестности бесконечно удаленной точки плоскости комплексного потенциала w . В. В. Голубев получил при этом для величины сопротивления простые формулы.

В настоящей работе, используя метод В. В. Голубева, показывается, что для определения момента гидродинамической силы, действующей на криволинейную дугу, обтекаемую с отрывом струй, достаточно знать три коэффициента в указанном разложении функции $\chi = dz/dw$. Для величины момента дается при этом простая формула. Кроме того, в работе исследуется вопрос об изменении реакций потока в зависимости от изменения угла наклона обтекаемой дуги к направлению скорости невозмущенного потока и находится огибающая линий действия сил. В качестве примера на применение полученных формул рассмотрена задача об отрывном обтекании наклонной пластинки. В заключение показывается, как применять полученные формулы в случае, если решение ищется в верхней полуплоскости некоторого вспомогательного комплексного переменного.

1. Исследования В. В. Голубева. Пусть заданная криволинейная дуга L обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости по схеме Кирхгофа, изображенной на фиг. 1. Значения потенциала скорости φ в точках отрыва струй A_1 и A_2 и критической точке M примем соответственно равными φ_{A_1} , φ_{A_2} и 0. В дальнейшем везде будем предполагать, что ось x прямоугольной системы координат (x, y) направлена параллельно скорости V_∞ невозмущенного потока, а начало координат — точка O находится в середине хорды A_1A_2 (фиг. 1). При таком обтекании дуги L разложение функции χ в точке $w = \infty$ имеет вид [1]:

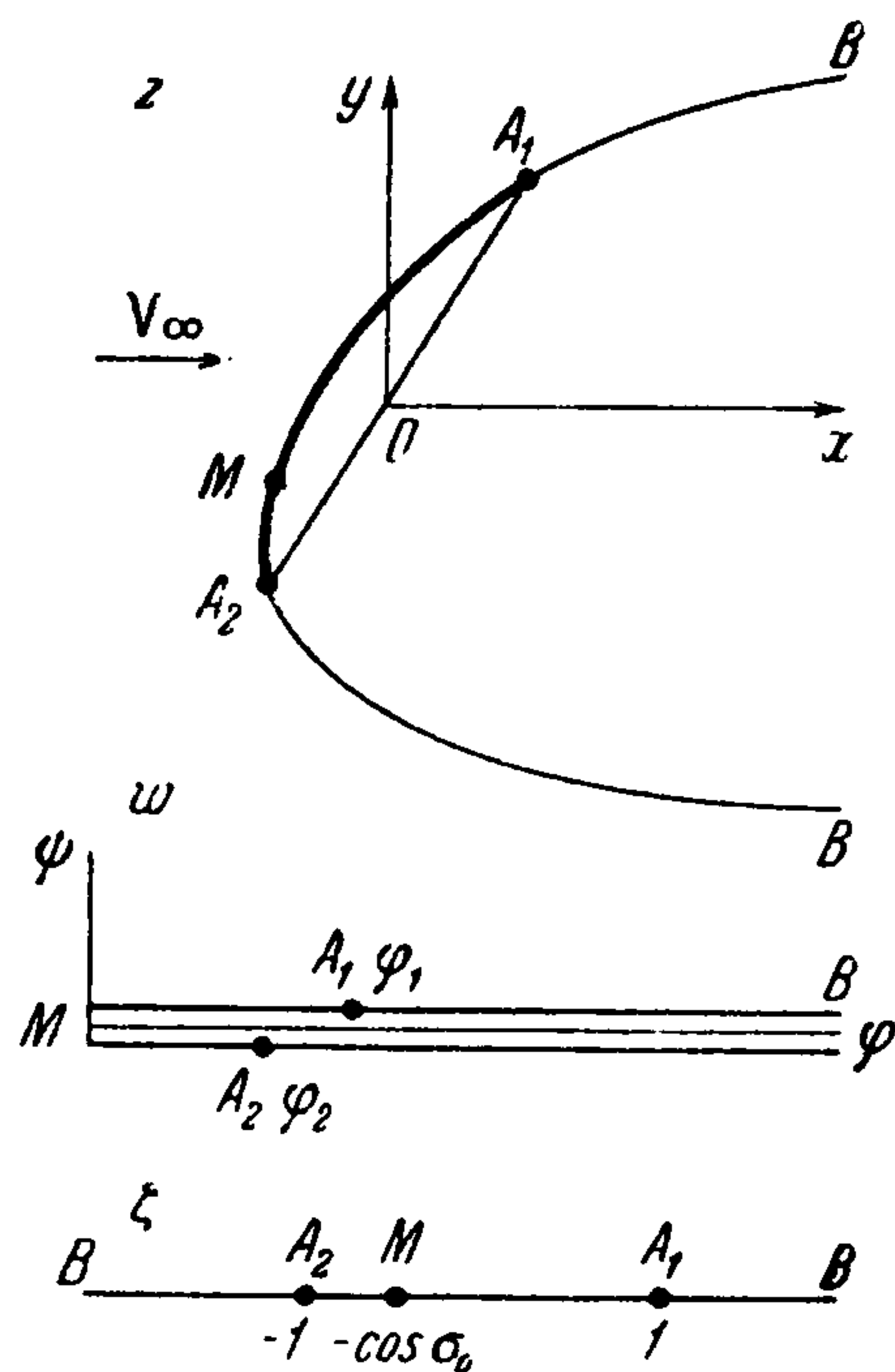
$$\chi = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{V_\infty} \left[1 + \frac{mi}{Vw} + \frac{in - m^2}{2w} + O(w^{-3/2}) \right] \quad (1.1)$$

где m, n — постоянные и действительные числа, а $O(w^{-3/2})$ — выражение, стремящееся к нулю, как $w^{-3/2}$.

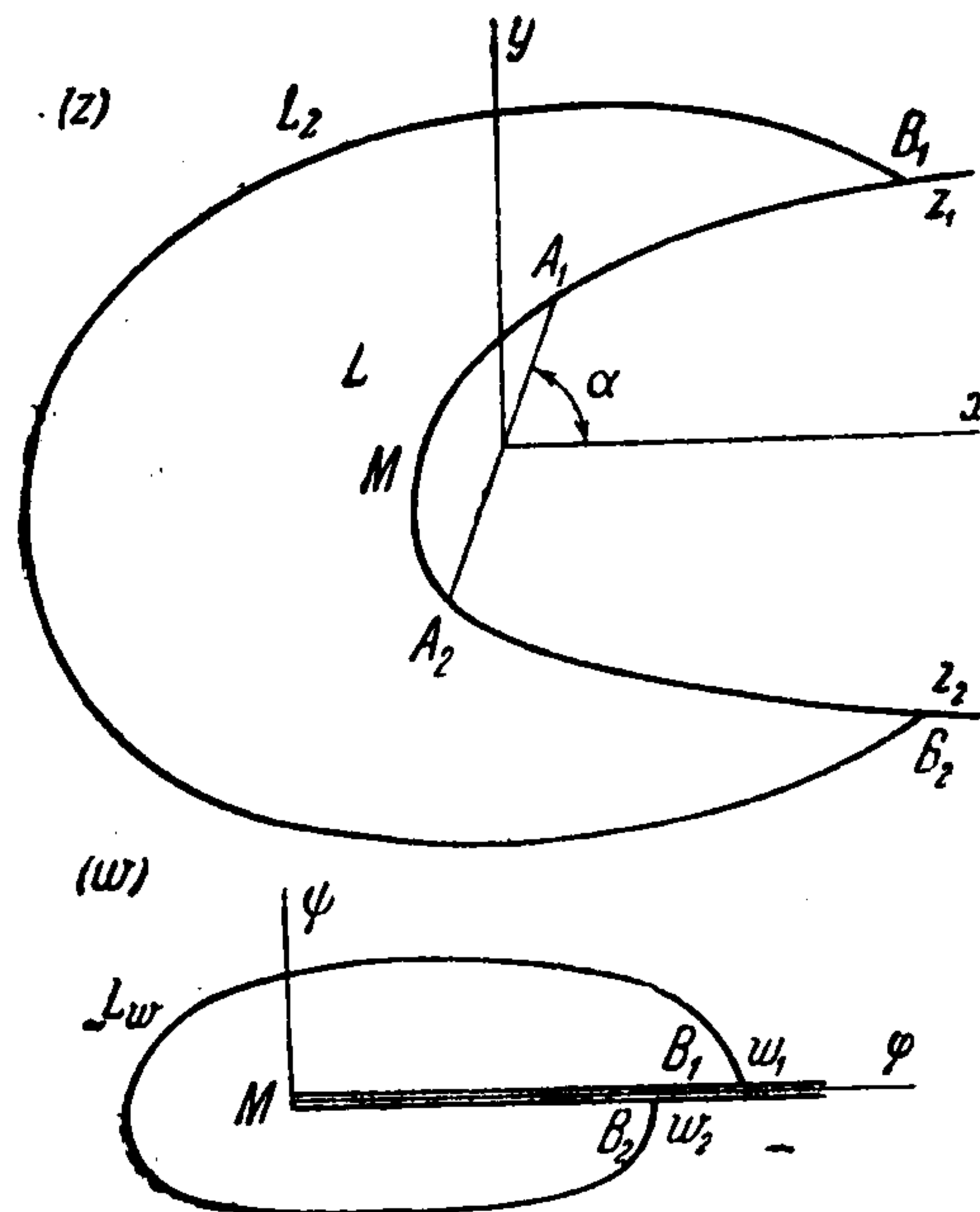
Если мы обозначим через X и Y составляющие гидродинамической силы P по осям x и y , то будем иметь

$$X = \pi\rho V_\infty m^2, \quad Y = -\pi\rho V_\infty n \quad (1.2)$$

Интересно отметить, что величина $\pi n = \Gamma$ есть циркуляция скорости по любому правильному пути L_z , достаточно удаленному от обтекаемой дуги. Под понятием «правильный путь» мы понимаем любую линию, охватывающую обтекаемую дугу L , точки пересечения которой со струями B_1 и B_2 (фиг. 2) имеют одинаковые абсциссы. Таким образом, при отрывном обтекании дуги L составляющая силы давления, нормаль-



Фиг. 1



Фиг. 2

ная к скорости потока в бесконечности, определяется по теореме Жуковского. Эти результаты были получены В. В. Голубевым^[1] при помощи формулы

$$\bar{R} = X - iY = \frac{i\rho V_\infty}{2} \int_{L_z} \left(\frac{1}{\chi V_\infty} + \chi V_\infty \right) dw \quad (1.3)$$

Для момента силы давления P относительно начала координат там же получено выражение

$$M_0 = \text{Re} \left[-\frac{\rho V_\infty}{2} \int_{L_z} z \left(\frac{1}{\chi V_\infty} + \chi V_\infty \right) dw \right] \quad (1.4)$$

Формулы (1.3) и (1.4) являются аналогией на случай отрывного обтекания известных формул С. А. Чаплыгина.

2. Разложение функции χ в плоскости w и некоторые теоремы. Для определения момента силы P нам потребуется разложение функции χ до членов порядка w^{-2} включительно. Поэтому мы продолжим разложение (1.1), которое в общем случае представляет собой бесконечный ряд по степеням $w^{-1/2}$, следовательно^[1],

$$\chi = \frac{1}{V_\infty} \left[1 + \frac{mi}{Vw} + \frac{in - m^2}{2w} + \frac{c}{Vw^3} + \frac{d}{w^2} + O(w^{-5/2}) \right] \quad (2.1)$$

В любой точке, лежащей на струе, если ввести обозначение $\varphi = u^{-2}$, оно примет вид:

$$e^{i\vartheta} = 1 + imi + \frac{1}{2} (in - m^2) u^2 + cu^3 + du^4 + O(u^5)$$

где ϑ — угол наклона скорости к оси x . Дифференцируя это равенство

последовательно 4 раза по u , получим

$$\begin{aligned} ie^{i\vartheta} \frac{d\vartheta}{du} &= im + O(u), & -e^{i\vartheta} \left[\left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^2 + i \frac{d^2\vartheta}{du^2} \right] &= in - m^2 + O(u) \\ e^{i\vartheta} \left[-i \left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^3 - 3 \frac{d\vartheta}{du} \frac{d^2\vartheta}{du^2} + i \frac{d^3\vartheta}{du^3} \right] &= 6c + O(u) \\ e^{i\vartheta} \left[\left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^4 - i6 \left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^2 \frac{d^2\vartheta}{du^2} - 3 \left(\frac{d^2\vartheta}{du^2} \right)^2 - 4 \frac{d\vartheta}{du} \frac{d^3\vartheta}{du^3} + \frac{d^4\vartheta}{du^4} \right] &= 24d + O(u) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Полагая в равенствах (2.2) $u = 0$ и вводя обозначения

$$p = -\frac{1}{3} \left[\frac{d^3\vartheta}{du^3} - \left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^3 \right]_{u=0}, \quad q = \frac{1}{24} \left[6 \left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^2 \frac{d^2\vartheta}{du^2} - \frac{d^4\vartheta}{du^4} \right]_{u=0}$$

где p, q — действительные числа, найдем, что

$$c = -\frac{1}{2} (ip + mn), \quad d = -\left[iq + \frac{1}{8} (m^4 + n^2 - 4mp) \right]$$

Подставляя значения c и d в (2.1), получим искомое разложение:

$$\chi = \frac{1}{V_\infty} \left[1 + \frac{mi}{Vw} + \frac{in - m^2}{2w} - \frac{ip + mn}{2w^{3/2}} - \left(iq + \frac{m^4 + n^2 - 4mp}{8} \right) \frac{1}{w^2} + O(w^{-5/2}) \right] \quad (2.3)$$

Так как $\chi = dz/dw$, то после интегрирования имеем

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{V_\infty} \left[w + 2im\sqrt{w} + \frac{in - m^2}{2} \ln w + k + il + \frac{ip + mn}{Vw} + \right. \\ \left. + \left(iq + \frac{m^4 + n^2 - 4mp}{8} \right) \frac{1}{w} + O(w^{-3/2}) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

где k, l — действительные числа; значение постоянной $k + il$ определяется положением начала координат относительно обтекаемой дуги.

Используя разложение (1.1), В. В. Голубев доказал следующее.

Теорема 1. Если правильный путь L_z достаточно удален от обтекаемой дуги, то циркуляция производной от функции w по z по любому правильному пути одна и та же и равна πn .

Введем функцию $G(w)$ равенством

$$\begin{aligned} G(w) &= w^2 + \frac{1}{4} m^2 (m^2 - in) \ln^2 w + (in - m^2) w \ln w + \\ &+ 2(k + il - \frac{1}{2} in) w + 4 \left(ip + \frac{mn}{2} - im^3 \right) \sqrt{w} + \frac{8}{3} im \sqrt{w^3} \end{aligned}$$

и, используя разложение (2.3), докажем следующее.

Теорема 2. Если правильный путь L_z достаточно удален от обтекаемой дуги, то реальная часть от циркуляции производной от функции $G(w)$ по z по любому правильному пути одна и та же и равна $2\pi nk - \pi^2 (m^4 + n^2)$, т. е.

$$\operatorname{Re} \int_{L_z} \frac{dG}{dz} dz = 2\pi nk - \pi^2 (m^4 + n^2)$$

Пусть при движении точки по пути L_z (фиг. 2) переменная z изменяется от z_1 до z_2 , а w при движении по соответствующему пути L_w изменяется от w_1 до w_2 , причем.

$$w_1 = \varphi_1, \quad w_2 = \varphi_2 e^{2\pi i} \quad (2.5)$$

Не ограничивая общности, мы полагаем здесь $\varphi_1 > \varphi_2$.

Подставим последовательно значения (2.5) в (2.4) и отделим там действительные части, получим

$$V_{\infty}x_1 = \varphi_1 + k - \frac{m^2}{2} \ln \varphi_1 + \frac{mn}{\sqrt{\varphi_1}} + \frac{m^4 + n^2 - 4mp}{8\varphi_1} + O(\varphi_1^{-3/2})$$

$$V_{\infty}x_2 = \varphi_2 + k - \frac{m^2}{2} \ln \varphi_2 - \pi n + \frac{mn}{\sqrt{\varphi_2}} + \frac{m^4 + n^2 - 4mp}{8\varphi_2} + O(\varphi_2^{-3/2})$$

откуда имеем

$$V_{\infty}^2(x_2^2 - x_1^2) = \varphi_2^2 - \varphi_1^2 - m^2(\varphi_2 \ln \varphi_1 - \varphi_1 \ln \varphi_2) +$$

$$+ 2m(\sqrt{\varphi_1^3} + \sqrt{\varphi_2^3}) - 2k(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{m^4}{4}(\ln^2 \varphi_2 - \ln^2 \varphi_1) +$$

$$+ \pi m^2 n \ln \varphi_2 - 2mn(\sqrt{\varphi_1} + \sqrt{\varphi_2}) - 2\pi n \varphi_2 + \pi n^2 - 2k\pi n + O(\varphi_2^{-1/2})$$

или

$$V_{\infty}^2(x_2^2 - x_1^2) = \operatorname{Re} \int_{L_z} \frac{dG}{dz} dz + \pi^2(m^4 + n^2) - 2\pi nk + O(\varphi_2^{-1/2}) \quad (2.6)$$

Теперь легко доказать теорему 2; для этого достаточно в равенстве (2.6) за контур интегрирования L_z взять правильный, достаточно удаленный путь.

3. Определение момента и линии действия силы P . Воспользуемся формулой (1.4) и подставим в нее вместо χ и z разложения (2.3) и (2.4), тогда после сложных и громоздких преобразований придем к равенству

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_{L_z} \frac{dG}{dz} dz + \pi\rho(2q - nk - m^2l) + O(\varphi_2^{-1/2})$$

Удаляя в этом равенстве правильный путь L_z достаточно далеко от обтекаемой дуги и применяя теорему 2, получим

$$M_0 = \pi\rho \left(\pi \frac{m^4 + n^2}{2} - 2m^2n + 2q - nk - m^2l \right) \quad (3.1)$$

Если подставим в тождество $xY - yX = M_0$ вместо X и Y выражения (1.2), то найдем уравнение линии действия силы:

$$xn + yt^2 = -\frac{1}{\pi\rho V_{\infty}} M_0 \quad (3.2)$$

Таким образом, для определения момента силы P и ее линии действия достаточно знать три коэффициента в разложении (2.3) и постоянную, которая появляется после интегрирования этого разложения.

4. Огибающая линий действия силы P при изменении угла атаки или угла отклонения. Угол наклона хорды A_1A_2 к оси x (фиг. 2) назовем углом атаки. Если поворачивать дугу L вокруг точки O , непрерывно меняя угол атаки α , то линии действия силы P образуют в неподвижной плоскости x, y семейство прямых. Огибающую этого семейства легко найти из уравнения (3.2).

$$x(\alpha) = \frac{1}{\pi\rho V_{\infty}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{M_0}{m^2} \right) : \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{n}{m^2} \right), \quad y(\alpha) = \frac{1}{\pi\rho V_{\infty}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{M_0}{n} \right) : \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{m^2}{n} \right) \quad (4.1)$$

Введем угол отклонения β равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m^2}{n} \quad (4.2)$$

Легко видеть, что β — угол отклонения вектора $\bar{R} = X - iY$ (фиг. 3) от того направления, которое он имел бы при безотрывном обтекании той же дуги L . Будем предполагать, что дуга L симметрична относительно оси, проходящей через точку O (фиг. 3). Когда ось симметрии такой дуги параллельна скорости V_∞ , т. е. $\alpha = 1/2\pi$, то $\beta = 1/2\pi$; когда она перпендикулярна скорости V_∞ , т. е. $\alpha = 0$, то $\beta = 0$. Поэтому далее будем считать, что $0 \leq \beta \leq 1/2\pi$. Введем кривую, заданную уравнением

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{V_\infty} [k(\beta) - \lambda(\beta) \operatorname{ctg} \beta - F(\beta) \sin \beta] - r \cos \beta \\ y_c &= \frac{1}{V_\infty} [l(\beta) - \lambda(\beta) + F(\beta) \cos \beta] - r \sin \beta \\ \lambda(\beta) &= m^2(\beta) \left(\frac{1}{2}\pi - \sin 2\beta \right) + \frac{2 \sin^2 \beta q(\beta)}{m^2(\beta)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где r — постоянное число, $F(\beta)$ — произвольная функция. Эту кривую назовем линией центров.

Будем теперь, непрерывно меняя угол атаки (отклонения), поворачивать дугу L вокруг точки O и одновременно перемещать начало координат плоскости $x'y'$ по линии центров так, чтобы оно всегда совпадало с той ее точкой c , которая соответствует данному углу β (фиг. 3). Тогда огибающей линий действия в подвижной плоскости $x'y'$ будет окружность

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad (4.4)$$

центр которой лежит на линии центров.

Если вместо линии центров возьмем кривую, заданную уравнением

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{1}{V_\infty} [k(\beta) - \lambda(\beta) \operatorname{ctg} \beta - \sin \beta F(\beta)] - \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg} \beta \\ y_F &= \frac{1}{V_\infty} [l(\beta) - \lambda(\beta) + \cos \beta F(\beta)] - \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

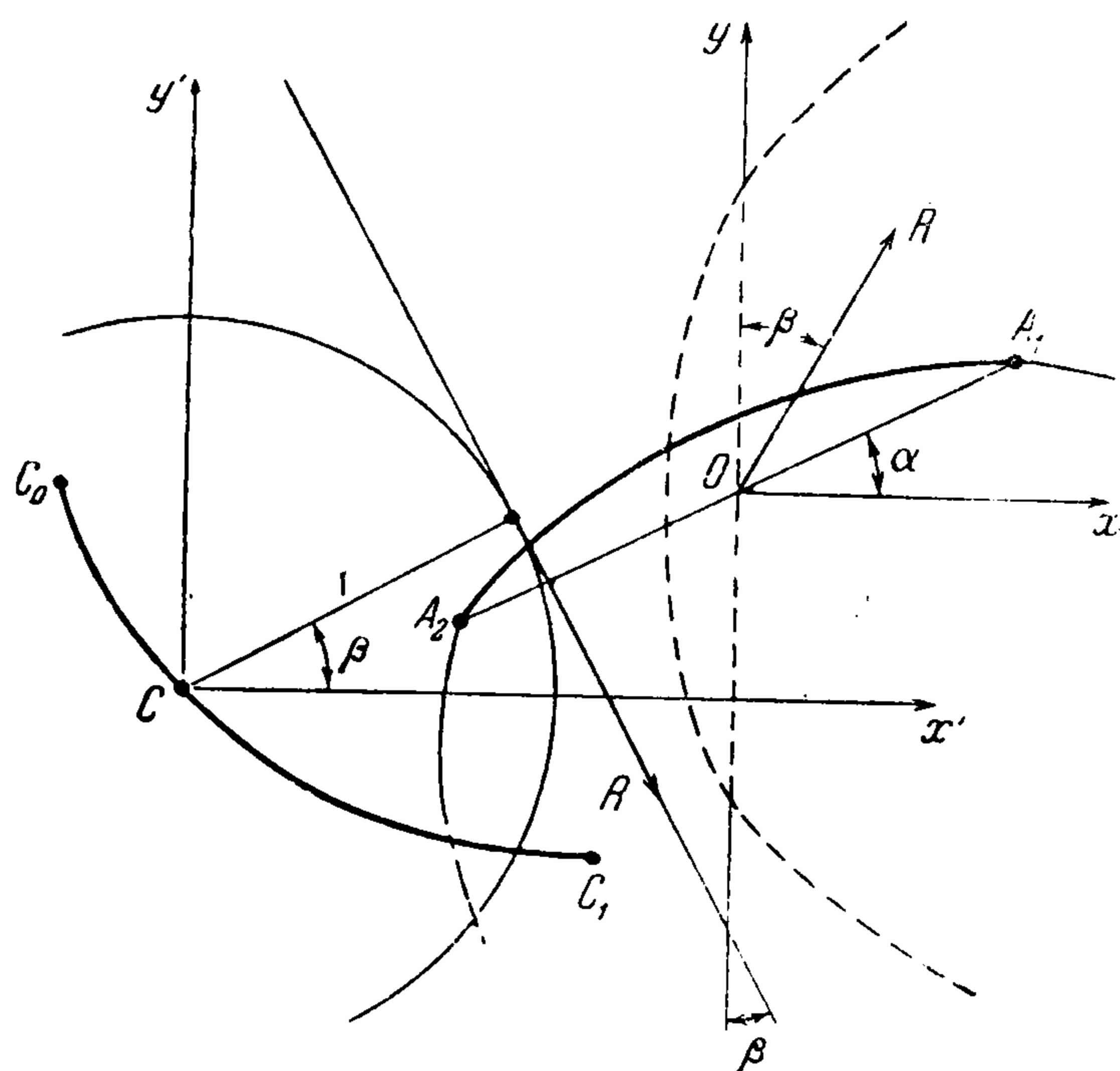
и названную нами линией фокусов, и так же, как указано выше, будем двигать по ней плоскость $x'y'$, то огибающей линий действия в подвижной плоскости $x'y'$ будет парабола

$$x'^2 = -2\delta \left(y' - \frac{1}{2}\delta \right) \quad (4.6)$$

центр которой лежит на линии фокусов.

5. Обтекание пластинки, наклоненной под углом к потоку, по схеме Кирхгофа. Рассмотрим отрывное обтекание пластинки шириной H , наклоненной под углом α к потоку. Решение данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= \frac{e^{i\alpha}}{V_\infty} \left[\cos \alpha + \frac{a \sin \alpha - i \sqrt{w - 2a \cos \alpha \sqrt{w} - a^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{w}} \right] \\ a^2 &= \frac{HV_\infty}{4 + \pi \sin \alpha}, \quad w_{A_1} = a^2 (1 + \cos \alpha)^2, \quad w_{A_2} = a^2 (1 - \cos \alpha)^2 e^{2\pi i} \end{aligned}$$



Фиг. 3

Кроме того имеем

$$z = \frac{He^{i\alpha}}{2} + \frac{e^{i\alpha}}{V_\infty} \left[w \cos \alpha + 2a \sin^2 \alpha \sqrt{w} - \right. \\ \left. - a^2 (1 + \cos \alpha) (\cos \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) - \right. \\ \left. - i(\sqrt{w} - a \cos \alpha) \sin \alpha \sqrt{w - 2a \cos \alpha \sqrt{w} - a^2 \sin^2 \alpha} + \right. \\ \left. + ia^2 \sin \alpha \ln \frac{\sqrt{w - 2a \cos \alpha \sqrt{w} - a^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{w} - a \cos \alpha}{a} \right]$$

Разлагая $\chi = dz/dw$ и z в ряд по степеням $w^{-1/2}$ и сравнивая эти разложения с (2.3), (2.4) при помощи формул (1.2), (3.1), получим

$$X = \pi \rho V_\infty a^2 \sin^2 \alpha \quad (5.1)$$

$$Y = -\pi \rho V_\infty a^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$P = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho H V_\infty^2 \quad (5.2)$$

$$M_0 = \frac{3}{4} \frac{\pi \sin \alpha \cos \alpha}{(4 + \pi \sin \alpha)^2} \rho H^2 V_\infty^2 \quad (5.3)$$

Уравнение линии действия силы P в плоскости xu согласно (3.2) имеет вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \\ = -\frac{3}{4} \frac{H \cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$$

Отсюда видим, что линия действия силы P пересекает пластинку под прямым углом на расстоянии

$$h = \frac{3}{4} \frac{H \cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \quad (5.4)$$

от середины пластинки. Пользуясь формулами (4.3), (4.5), находим уравнение линии центров

$$x_c = -H \left(0.25 \frac{1 + \cos^2 \beta + \cos^2 2\beta}{4 + \pi \sin \beta} + \frac{r}{H} \cos \beta \right)$$

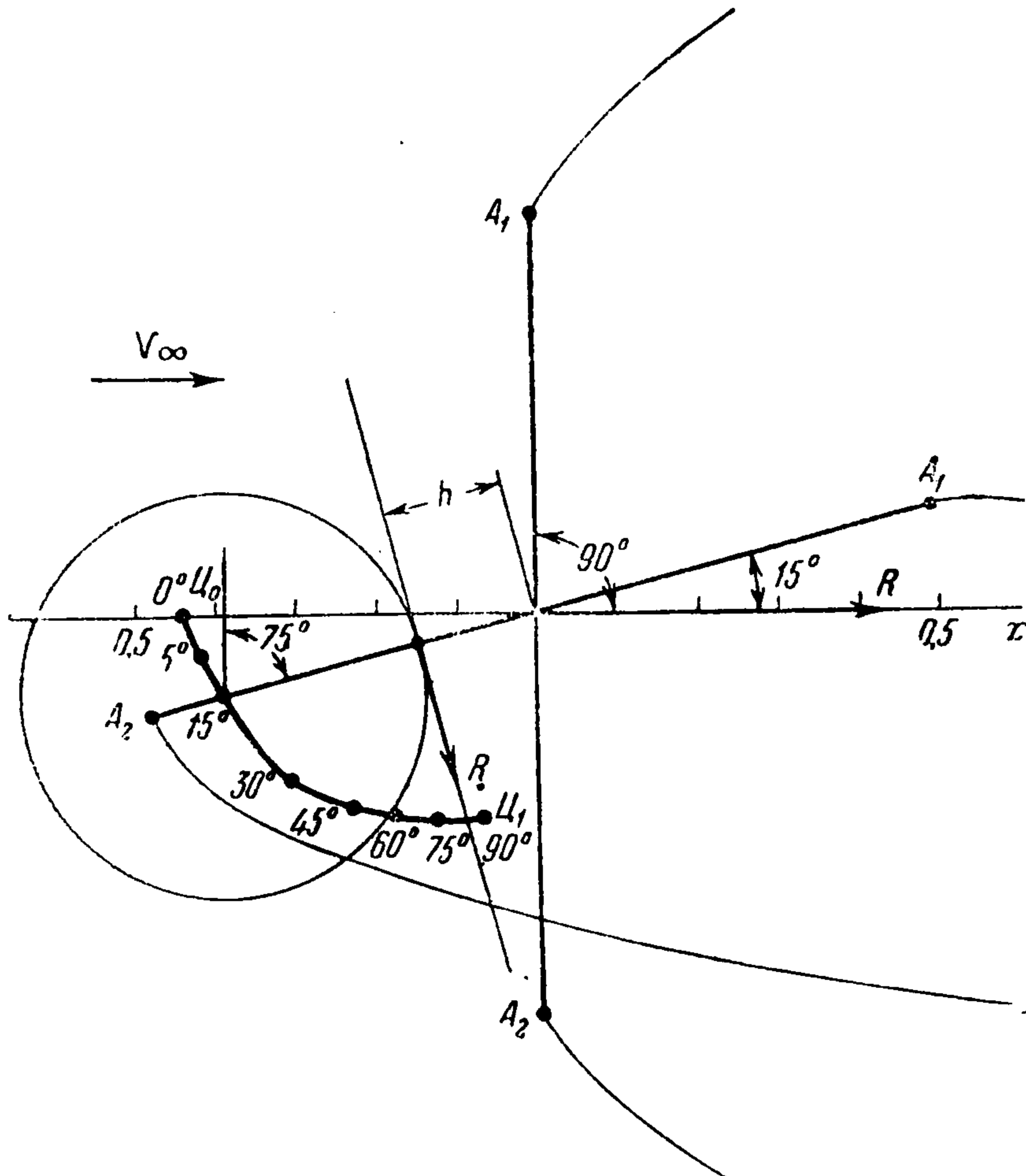
$$y_c = -H \left(0.5 \frac{0.25 + \cos^2 \beta}{4 + \pi \sin \beta} \sin 2\beta + \frac{r}{H} \sin \beta \right)$$

и уравнение линии фокусов

$$x_F = -0.25 H \left(\frac{1 + \cos^2 \beta + \cos^2 2\beta}{4 + \pi \sin \beta} + \frac{2\delta}{H} \operatorname{ctg} \beta \right)$$

$$y_F = -0.5 H \left(\frac{0.25 + \cos^2 \beta}{4 + \pi \sin \beta} + \frac{\delta}{H} \right)$$

На фиг. 4 при $r/H = 0.25$ построены линия центров и линия действия силы P для $\alpha = 15^\circ$. Проводя указанное выше построение и для других углов атаки α , можно непосредственно убедиться, что расстояние h (фиг. 4), найденное графически, совпадает с h , вычисленным по формуле (5.4).



Фиг. 4

6. Об одном разложении функции $\Phi(\zeta)$ в плоскости вспомогательного переменного ζ . Для определения сопротивления и момента при отрывном обтекании по выведенным выше формулам нам нужно знать разложение функции χ в плоскости w . Однако все существующие методы решения задач о струйном обтекании криволинейного препятствия построены на том, что решение ищется в некоторой вспомогательной плоскости ζ и при этом используется некоторая вспомогательная функция $\Phi(\zeta)$, содержащая в себе функцию Жуковского $\ln(V_\infty^{-1} dw/dz)$. Мы найдем здесь одно разложение функции $\Phi(\zeta)$, а ниже покажем, как, зная это разложение, воспользоваться найденными выше формулами для определения реакций потока на тело. Далее будем предполагать, что обтекаемая дуга, вообще говоря, несимметрична и нигде не имеет угловых точек, за исключением критической точки M , где касательные образуют угол π , вообще говоря, не равный π . За область вспомогательного переменного ζ мы возьмем верхнюю полуплоскость. Преобразование

$$w = a^2 (\zeta + \cos \sigma)^2 \quad \left(a = \frac{V_{\varphi_1} + V_{\varphi_2}}{2}, \cos \sigma = \frac{V_{\varphi_1} - V_{\varphi_2}}{V_{\varphi_1} + V_{\varphi_2}} \right)$$

отображает область изменения w на верхнюю полуплоскость ζ с соответствием точек, указанным на фиг. 1. В качестве вспомогательной функции $\Phi(\zeta)$ возьмем

$$\Phi(\zeta) = \ln \left[\frac{(1 + \zeta \cos \sigma - i \sin \sigma \sqrt{\zeta^2 - 1})^\nu}{(1 + \cos \sigma)^\nu \exp(-i\sigma\nu) V_\infty} \frac{dw}{dz} \right] = \ln f_0 + i\vartheta_0$$

где, как легко видеть, функции f_0 и ϑ_0 связаны со скоростью на дуге $V = V_\infty f(\xi)$ и с углом ϑ наклона скорости соотношениями

$$f_0(\xi) = \left| \frac{1 + \xi \cos \sigma + V \sqrt{1 - \xi^2} \sin \sigma}{\xi + \cos \sigma} \right|^\nu f(\xi), \quad \vartheta_0(\xi) = \pm \frac{1}{2} \pi \nu + \nu \left(\sigma - \frac{1}{2} \pi \right) - \vartheta(\xi)$$

Нетрудно показать, что $\Phi(\zeta)$, являясь функцией аналитической в верхней полуплоскости ζ , может быть представлена в виде интеграла типа Коши:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln f_0(t)}{t - \zeta} dt \quad (6.1)$$

а для функции $\ln f_0(\xi)$ имеет место разложение в ряд Фурье:

$$\ln f_0(\xi) = \sum_1^\infty a_k \sin k\theta, \quad \xi = \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (6.2)$$

Если подставим ряд Фурье (6.2) в равенство (6.1), то получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{i} \sum_1^\infty a_k J_k, \quad J_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin k\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi - \zeta} d\varphi \quad (6.3)$$

Легко видеть, что $J_1 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$, $J_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^2$, $J_{k-1} + J_{k+1} = 2\zeta J_k$ ($|\zeta| > 1$). Отсюда, применяя метод индукции, находим

$$J_k = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})^k \quad (|\zeta| > 1)$$

Подставим это выражение в равенство (6.3); тогда получим

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{i} \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})^k} \quad (6.4)$$

Это разложение будет справедливо и при $|\zeta| < 1$. Действительно, переходя в равенстве (6.4) к пределу при $\zeta \rightarrow \xi = \cos \theta$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= i \sum_1^{\infty} a_k \cos k\theta + \sum_1^{\infty} a_k \sin k\theta \\ \ln f_0(\xi) &= \sum_1^{\infty} a_k \sin k\theta, \quad \vartheta_0(\xi) = \sum_1^{\infty} a_k \cos k\theta \end{aligned}$$

7. Связь между коэффициентами разложений функций $\chi(w)$ и $\Phi(\zeta)$. Функции $\chi(w)$ и $\Phi(\zeta)$ связаны между собой соотношением

$$\chi = \frac{(1 + \zeta \cos \sigma - i \sin \sigma \sqrt{\zeta^2 - 1})^\nu}{(\zeta + \cos \sigma)^\nu \exp(-i\sigma\nu) V_\infty} e^{-\Phi(\zeta)} \quad (7.1)$$

Нетрудно установить справедливость равенств

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= i \left[\frac{a_1}{2\zeta} + \frac{a_2}{4\zeta^2} + \frac{a_1 + a_3}{8\zeta^3} + \frac{2a_2 + a_4}{16\zeta^4} + O(\zeta^{-5}) \right], \quad \zeta = \frac{\sqrt{w}}{a} \left(1 - \frac{a \cos \sigma}{\sqrt{w}} \right) \\ \frac{(1 + \zeta \cos \sigma - i \sin \sigma \sqrt{\zeta^2 - 1})^\nu}{(\zeta + \cos \sigma)^\nu \exp(-i\sigma\nu)} &= 1 + \frac{ia\nu \sin \sigma}{\sqrt{w}} + \frac{a^2\nu(i \cos \sigma - \nu \sin \sigma) \sin \sigma}{2w} - \\ &\quad - \frac{\nu a^3 \sin \sigma [i((2 + \nu^2)^{1/3} \sin^2 \sigma - 1) + \nu \sin \sigma \cos \sigma]}{2\sqrt{w^3}} + \\ + a^4\nu \sin \sigma &\left[i \frac{5 - 2(1 + \nu^2) \sin^2 \sigma}{8} \cos \sigma - \frac{15 - (11 + \nu^2) \sin^2 \sigma}{24} \nu \sin \sigma \right] \frac{1}{w^4} + O(w^{-5/2}) \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в соотношение (7.1) и сравнивая коэффициенты полученного ряда с коэффициентами ряда (2.3), находим

$$\begin{aligned} m &= a(\nu \sin \sigma - \frac{1}{2} a_1), \quad n = a^2(\nu \sin \sigma \cos \sigma - a_1 \cos \sigma - \frac{1}{2} a_2) \\ q &= \frac{1}{8} a^4 \left[4a_1 \cos \sigma (\cos^2 \sigma - \frac{1}{8} a_1^2) + 2a_2 (3 \cos^2 \sigma - \frac{1}{8} a_1^2) + \right. \\ &\quad \left. + 3(a_1 + a_3) \cos \sigma + \frac{1}{2} (a_4 + 2a_2) + a_1 \nu \cos \sigma \sin \sigma (5a_1 - 4\nu \sin \sigma - 5) + \right. \\ &\quad \left. + \nu a_2 \sin \sigma (a_1 - \nu \sin \sigma) + 2(1 + \nu^2) \sin^3 \sigma \cos \sigma \right] \end{aligned}$$

Формулы связи (7.2) дают нам возможность определить момент и сопротивление в том случае, если решение ищется в вспомогательной плоскости ζ . В частных случаях они упрощаются. Если обтекаемая дуга не имеет угловой точки, то в формулах (7.2) следует положить $\nu = 1$; если дуга симметрична относительно оси x , то $\sigma = 1/2 \pi$; если же дуга не имеет угловой точки и симметрична, то в формулах (7.2) следует положить $\nu = 1$ и $\sigma = 1/2 \pi$.

Автор сохраняет глубокую признательность покойному В. В. Голубеву за ценные советы при выполнении этой работы.

Поступила 9 XII 1955

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. ГТТИ, 1949.