

ЗВУКОВОЙ ПОТОК ОКОЛО КЛИНА ПОД НЕКОТОРЫМ УГЛОМ АТАКИ

Г. Н. Копылов

(Ленинград)

Рассматривается обтекание тонкого клиновидного профиля под малым углом атаки звуковым потоком. Устанавливаются три режима обтекания профиля, и для выявленных трех схем обтекания задача сводится к отысканию решения некоторой краевой задачи Лаврентьева — Бицадзе в плоскости годографа.

В результате получена картина распределения давления по части профиля, обтекаемой дозвуковым потоком.

§ 1. Введение. Околосзвуковым движением газа называют такое движение, при котором величина вектора скорости во всех точках потока мало отличается от скорости звука, а угол его наклона мало отличен от нуля.

Пусть

$$\frac{V_{x_1}}{a_*} = 1 - \varepsilon \frac{U}{k+1}, \quad \frac{V_{y_1}}{a_*} = \varepsilon^{3/2} \frac{V}{k+1}, \quad \frac{x_1}{l} = X, \quad \frac{y_1}{l} = \varepsilon^{-1/2} Y \quad (1.1)$$

где x_1, y_1 — координаты плоскости течения, V_{x_1}, V_{y_1} — компоненты вектора скорости l — характерная длина, ε — малая величина, тогда, как известно [1], уравнения движения выполняются с точностью до ε^3 , если имеет место

$$\frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial U} - U \frac{\partial Y}{\partial V} = 0 \quad (1.2)$$

или, исключая функцию $X(V, U)$:

$$U \frac{\partial^2 Y}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial U^2} = 0 \quad (1.3)$$

Задача в этом случае сводится к отысканию решения уравнения (1.3), удовлетворяющего условию $X = 0$ при $V = \theta_k / c$, где c — относительная толщина профиля, θ_k — угол наклона касательной в некоторой точке профиля.

Малая величина $\varepsilon = [c(k+1)]^{2/3}$; значение U в критической точке принимается бесконечно большим.

В 1947 г. Ф. И. Франкль [2] нашел семейство решений уравнений Чаплыгина соответствующее течению вдали от некоторого тела при скорости невозмущенного потока, равной скорости звука. Им было показано, что в окрестности бесконечно удаленной точки плоскости течения в плоскости годографа для уравнения (1.3) имеет место решение

$$Y = \rho^{-5/3} f_0(\xi), \quad \rho = \sqrt{V^2 + 4/9 U^3}, \quad \xi = \frac{V}{\rho} \quad (1.4)$$

$$f_0(\xi) = (1 - \xi)^{1/3} (1 + 3\xi) - (1 - \xi)^{1/3} (1 - 3\xi)$$

Решение прямой задачи по симметричному обтеканию клиновидного профиля при скорости невозмущенного потока, равной скорости звука, принадлежит независимо Л. В. Овсянникову [3] и Гудерлею и Иосихара [4].

Л. В. Овсянниковым был при этом предложен метод приближенного решения задачи Трикоми, который им был развит в работе [5].

Первой работой, посвященной несимметричному обтеканию тела звуковым потоком, является работа Ф. И. Франкля [6], где рассматривается обтекание тела с плоской нижней поверхностью под некоторым углом атаки. В плоскости годографа выделяется главный член решения в виде линейной комбинации (1.4) и решения

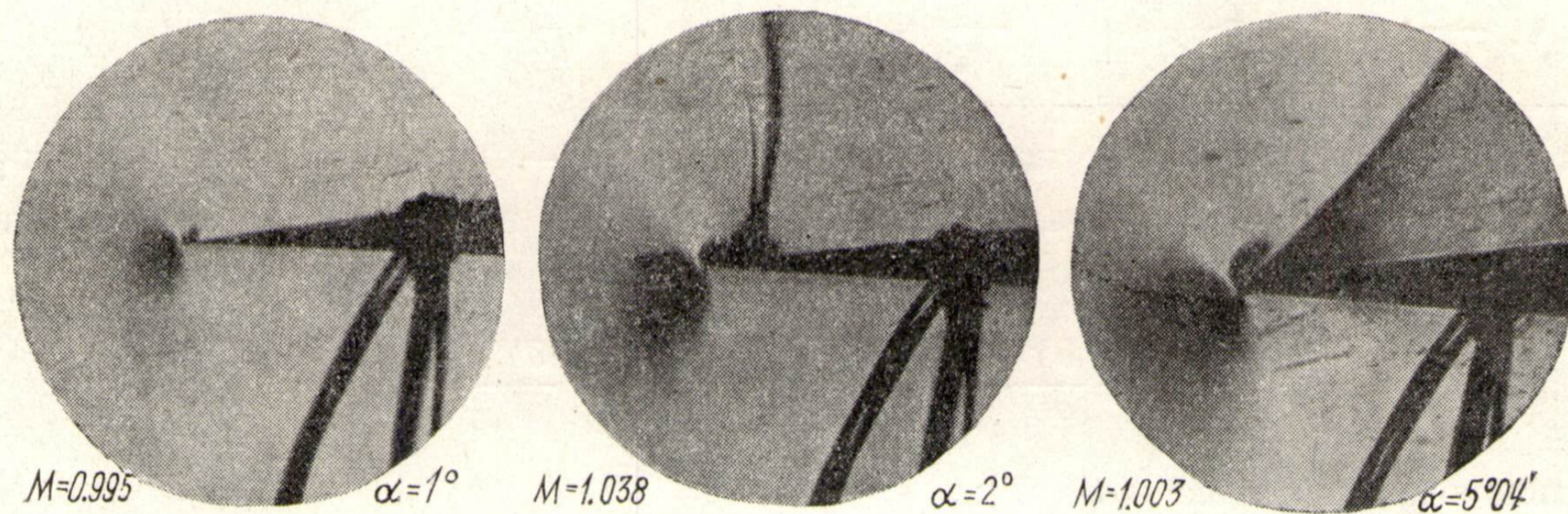
$$Y = \rho^{-2/3} f_{01}(\xi), \quad f_{01}(\xi) = (1 - \xi)^{1/3} + (1 + \xi)^{1/3} \quad (1.5)$$

Для регулярной поправки ставится некоторая задача Лаврентьева — Бицадзе.

В конце 1953 г. и в середине 1954 г. появились работы Гудерлея и Иосихара [7] и Гудерлея [8], где рассматривалось обтекание клиновидного профиля под пренебрежимо малым углом атаки и пластинки. Результаты этих работ близки к излагаемым ниже.

Уместно заметить при этом, что мы получили наше решение также в конце 1953 г. независимо и метод нашего исследования сводится к изучению решения некоторой задачи Лаврентьева — Бицадзе, тогда как в упомянутых работах либо использованием так называемой «гипотезы линейности» дело сводится к решению задачи Трикоми либо к некоторой задаче в неограниченной по оси V области.

§ 2. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание клиновидного профиля под некоторым углом атаки плоско-параллельным звуковым потоком. Положим для простоты, что профиль обладает двумя осями симметрии и характеризуется параметрами: θ_0 — угол полураствора передней части клина, b — хорда профиля, α — угол атаки; величины θ_0 и α , как и во всякой околосзвуковой задаче, считаем достаточно малыми.



Фиг. 1

Фиг. 2

Фиг. 3

При $\alpha = 0$ очевидно, что критическая точка потока находится в передней кромке профиля, при $\alpha > 0$ она смещается на нижний передний скат. Отсюда из соображений непрерывного изменения картины обтекания профиля при изменении угла атаки следует, что при малом α на носике профиля должна образоваться небольшая сверхзвуковая зона, увеличивающаяся по мере увеличения α .

При $\alpha = \alpha_1$ сверхзвуковая зона захватывает весь передний верхний скат. Так как α_1 существенно зависит от θ_0 , разумно в дальнейшем рассматривать $\alpha^\circ = \alpha / \theta_0$.

Условимся считать, что профиль находится в первом, втором и третьем режимах обтекания, если соответственно

$$(1) \quad 0 \leq \alpha^\circ < \alpha_1^\circ, \quad (2) \quad \alpha_1^\circ \leq \alpha^\circ \leq \alpha_2^\circ, \quad (3) \quad \alpha_2^\circ < \alpha^\circ < \infty$$

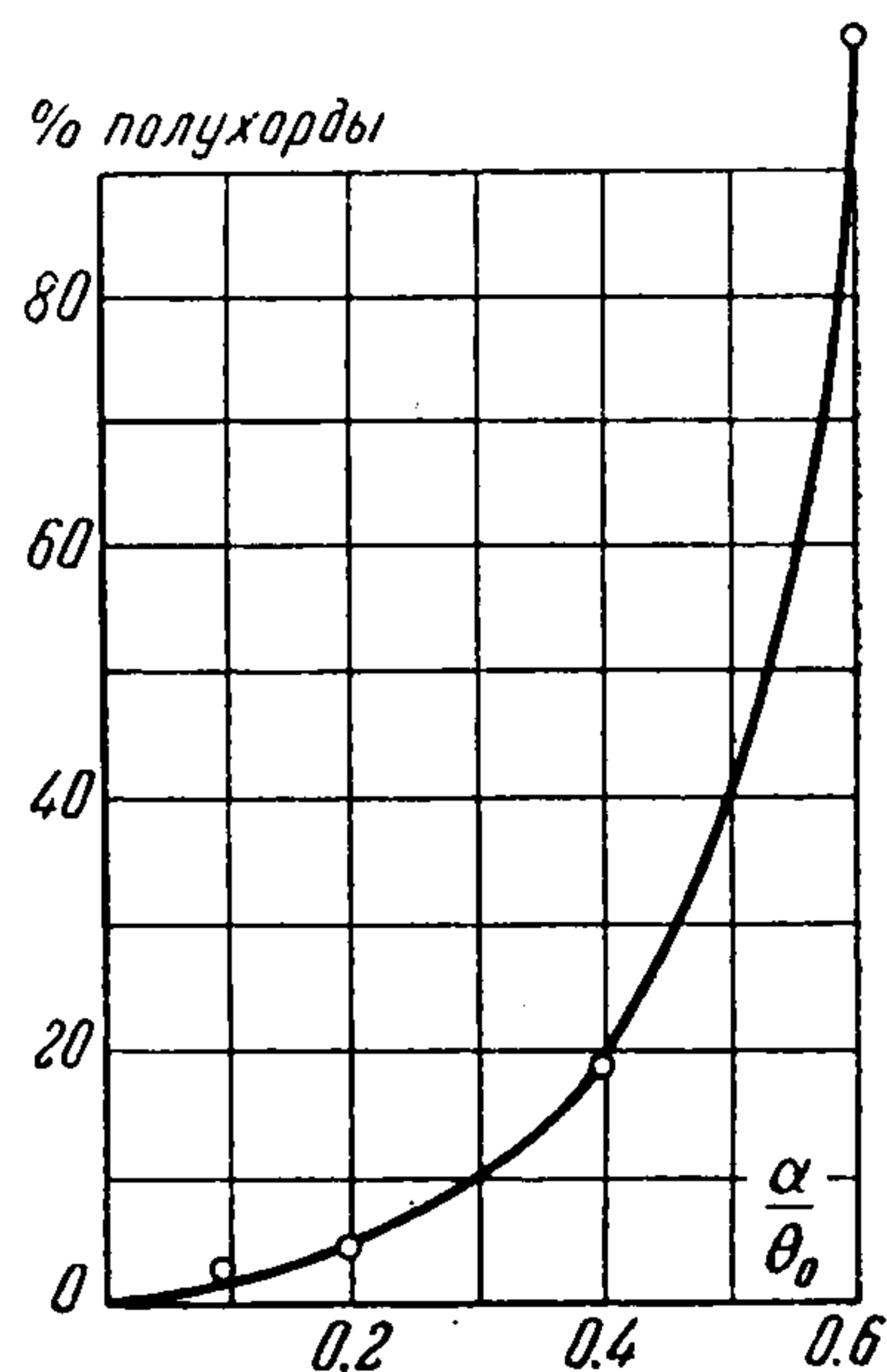
Здесь $\alpha_2^\circ = \alpha_2 / \theta_0$, а α_2 — такой угол атаки профиля, при котором происходит переход от безграничной сверхзвуковой зоны на нижнем

заднем скате профиля к местной сверхзвуковой зоне в окрестности нижней угловой точки профиля. Необходимость в таком переходе следует из того, что при $\theta_0 \rightarrow 0$, $\alpha \neq 0$ клиновидный профиль переходит в пластинку, нижняя же поверхность пластинки обтекается полностью дозвуковым потоком.

Указанную картину обтекания подтверждает эксперимент. На фиг. 1, 2, 3 показано развитие местной сверхзвуковой зоны на носике профиля, на фиг. 4 представлен экспериментальный график зависимости от α° величины сверхзвуковой зоны (расстояния от замыкающего скачка уплотнения до передней кромки). Видно, что при малых α° величина сверхзвуковой зоны мала, быстрый ее рост происходит при α° , близких к $\alpha^\circ = 0.6$.

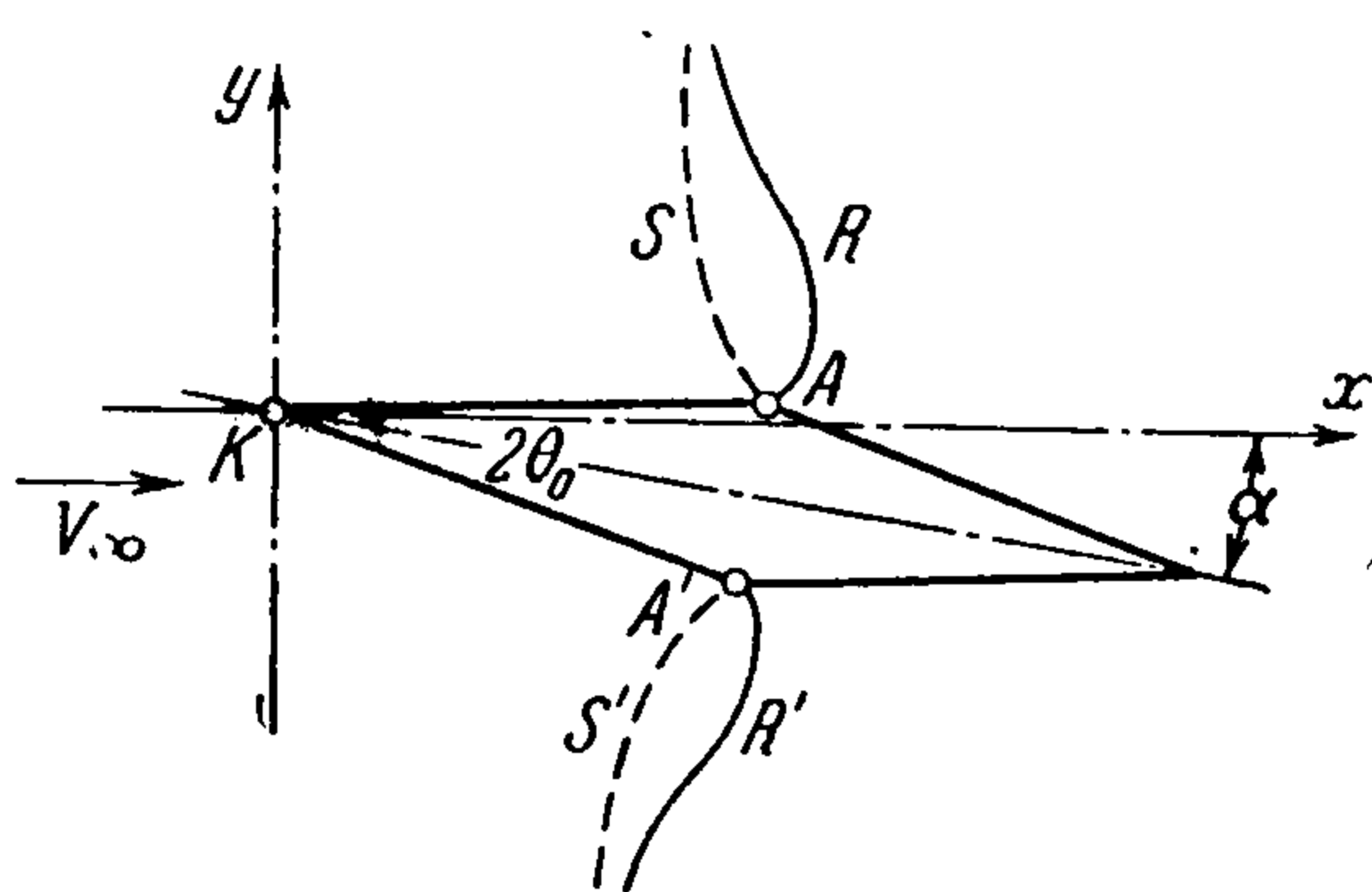
Исходя из возможности выделения трех режимов обтекания, следует рассмотреть следующие три приближенные схемы обтекания клиновидного профиля.

(1) $0 \leq \alpha^\circ < \alpha_1^\circ$. Пренебрегая местной сверхзвуковой зоной, считаем, что критическая точка K расположена на передней кромке профиля. Эта схема обтекания во многом аналогична симметричному обтеканию.

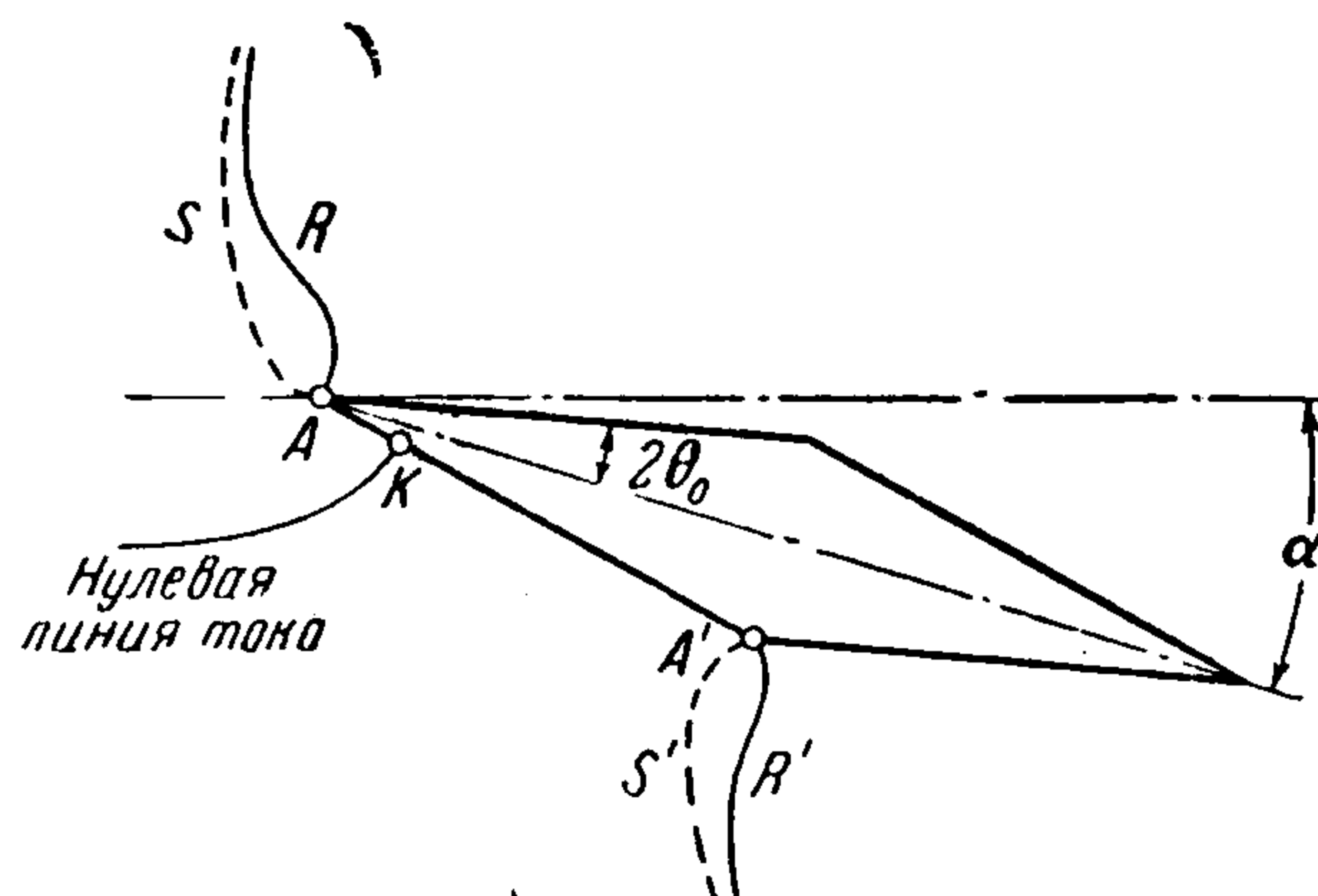


Фиг. 4

Вдоль передних скатов профиля происходит ускорение потока до звукового. От угловых точек A , A' отходят звуковые линии S , S' и предельные характеристики R , R' (фиг. 5).



Фиг. 5



Фиг. 6

(2) $\alpha_1^\circ \leq \alpha^\circ \leq \alpha_2^\circ$. Критическая точка K — на нижнем переднем скате профиля.

Звуковые линии S , S' и предельные характеристики RR' отходят от передней кромки и нижней угловой точки. Обтекание нижнего переднего ската аналогично обтеканию пластинки (фиг. 6).

(3) $\alpha_2^\circ < \alpha^\circ < \infty$. Пренебрегая нижней местной сверхзвуковой зоной, считаем, что обтекание всего профиля аналогично обтеканию пластинки.

Прежде чем переходить к изучению картины обтекания в плоскости годографа, введем вслед за Л. В. Овсянниковым [9] новые переменные:

$$\begin{aligned} x &= a(V - l), & \psi(x, U) &= a_{-2/3} Y(V, U) \\ y &= a^{2/3} U, & \varphi(x, y) &= X(V, U) \end{aligned}$$

где

$$a = \begin{cases} 1 & \text{(1-я схема)} \\ \frac{2\theta_0}{\pi} & \text{(2-я схема)} \\ \frac{\alpha}{\pi} & \text{(3-я схема)} \end{cases} \quad l = \begin{cases} -\frac{\alpha + \theta_0}{2\theta} & \text{(1-я схема)} \\ -\frac{\alpha + \theta_0}{2\theta_0} & \text{(2-я схема)} \\ -1 & \text{(3-я схема)} \end{cases} \quad (2.1)$$

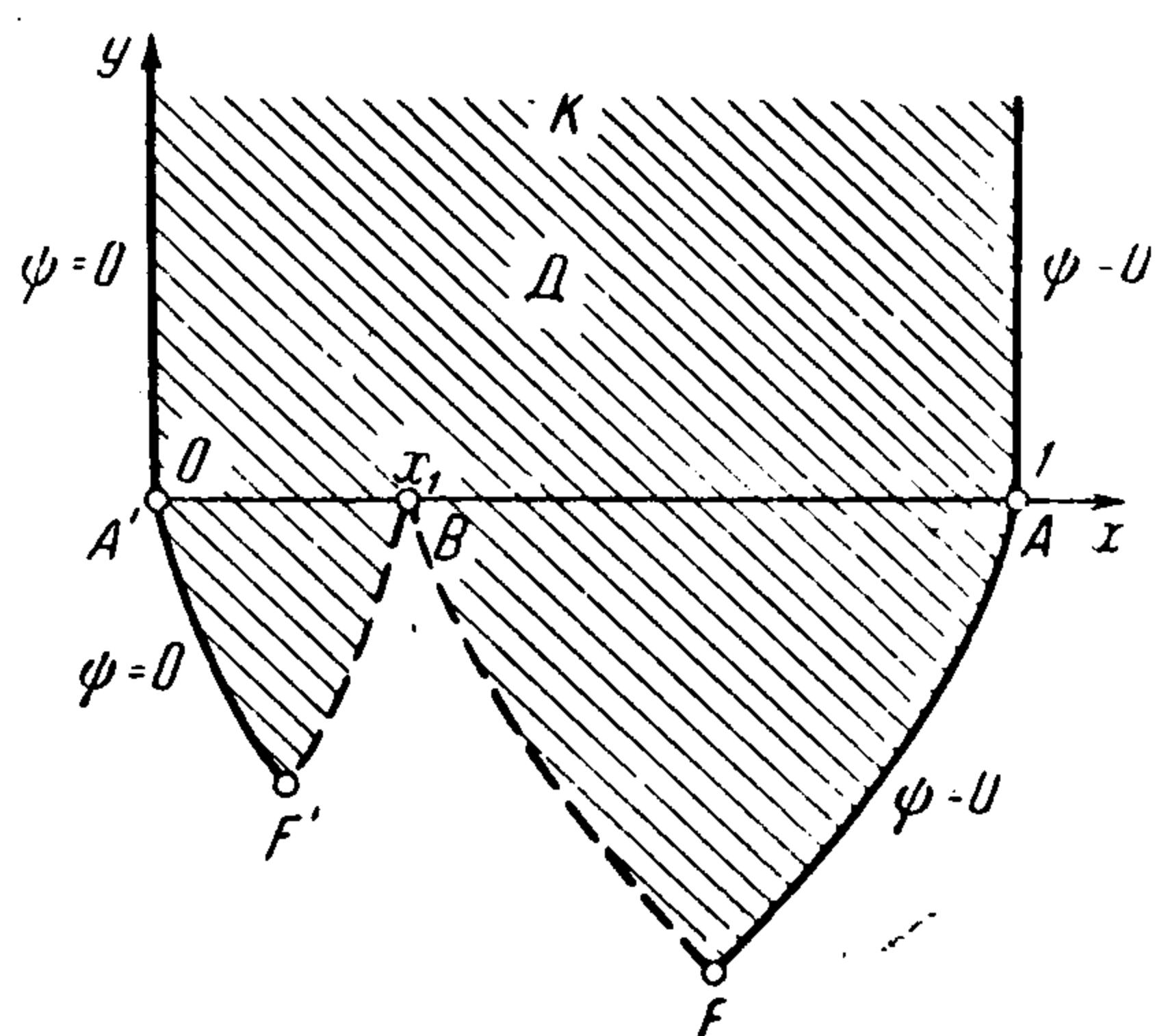
Уравнения (1.2) и (1.3) переходят в

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

Причем в дальнейшем для 1-й и 2-й схем обтекания $c = 2\theta_0$, а для 3-й схемы $c = \alpha$.

В этом случае область в плоскости течения, расположенная вверх по течению от предельных характеристик и контура профиля, в плоско



Фиг. 7

сти xy состоит из полуполосы $0 \leq x \leq 1$, $y > 0$ и характеристических треугольников

$$A'F'B \quad (0 \leq \xi \leq x_1, 0 \leq \eta \leq x_1, y < 0)$$

$$AFB \quad (x_1 \leq \xi \leq 1, x_1 \leq \eta \leq 1, y < 0)$$

где (2.4)

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

характеристики уравнения (1.8) (фиг. 7).

Сторонам профиля соответствуют полупрямые $x = 1$, $x = 0$, $y > 0$, прандль-мейеровскому расширению в точках A и A' (фиг. 5, 6) соответствуют характеристики AF и $A'F'$.

Критической точке K соответствует бесконечно удаленная точка плоскости xy , невозмущенному потоку соответствует точка $(x_1, 0)$, где

$$x_1 = \begin{cases} \frac{\alpha + \theta_0}{2\theta_0} & \text{(1-я схема)} \\ \frac{\alpha + \theta_0}{\pi} & \text{(2-я схема)} \\ \frac{\alpha}{\pi} & \text{(3-я схема)} \end{cases} \quad (2.5)$$

Итак, определение течения в дозвуковой части потока у профиля сводится в плоскости xy к следующей задаче.

Задача А. Найти решение $\psi(x, y)$ уравнения (2.3) в области \bar{D} при условиях

$$(a) \quad \psi(0, y), \quad \psi(1, y) = 0 \quad (2.6)$$

$$(b) \quad \begin{cases} \psi(x, y) = 0 & \text{при } \xi = 0, \eta < x_1 \\ \psi(x, y) = 0 & \text{при } \eta = 1, \xi > x_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

(c) В точке $(x_1, 0)$ имеет место особенность, соответствующая бесконечно удаленной точке плоскости течения.

Кроме этих условий, в случае схем обтекания (2) и (3) требуется при $y \rightarrow \infty$ выполнение условия Франкля^[6], заключающегося в том, что критическая точка должна быть в плоскости годографа точкой разветвления линий тока. В плоскости xu это условие сводится к следующему:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \exp(\pi h y^{3/2}) \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad \left(h = \frac{1}{3} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \sim 0.01 \right) \quad (2.8)$$

Учитывая (2.5), видим, что в случае схем обтекания (2) и (3) параметр x_1 в задаче А следует рассматривать близким к нулю и изучать предельное решение задачи А при $x_1 \rightarrow 0$.

§ 3. Главный член решения задачи А. Ищем решение задачи А в виде

$$\psi(x, y) = c_0 [\psi_0(x, y) + \psi^0(x, y)] + c_{01} [\psi_{01}(x, y) + \psi_{01}^0(x, y)] \quad (3.1)$$

где функция $c_0 \psi_0(x, y) + c_{01} \psi_{01}(x, y)$ — решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (а) и (с) задачи А, а функция $c_0 \psi^0(x, y) + c_{01} \psi_{01}^0(x, y)$ есть некоторое регулярное решение уравнения (2.3).

Определим $\psi_0(x, y)$ и $\psi_{01}(x, y)$ в виде рядов

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= \sum_{-\infty}^{\infty} [\Psi_0(x - x_1 + 2k, y) + \Psi_0(x + x_1 + 2k, y)] \\ \psi_{01}(x, y) &= \sum_{-\infty}^{\infty} [\Psi_{01}(x - x_1 + 2k, y) - \Psi_{01}(x + x_1 + 2k, y)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\Psi_0(x, y)$ и $\Psi_{01}(x, y)$ заданы формулами (1.4) и (1.5).

Ряды справа в (3.2) сходятся абсолютно и равномерно везде в \bar{D} кроме $(x_1, 0)$, и мажорируются, как в этом легко убедиться, соответственно рядами

$$\sum_{-\infty}^{\infty} k^{-3/2}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} k^{-5/2}$$

Легко проверить, что

$$\psi_0(0, y) = \psi_0(1, y) = \psi_{01}(0, y) = \psi_{01}(1, y) = 0,$$

т. е. для решений, определенных (3.2), выполняются условия (а) и (с) задачи А.

Функции $\psi_0(x, y)$ и $\psi_{01}(x, z)$ обладают периодом 2 по переменной x и могут быть представлены посредством разложения в ряд Фурье при $y > 0$ в виде

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= 3\pi A \sum_{k=1}^{\infty} k^{2/3} \cos \pi k x, \lambda [(\pi k)^{2/3} y] \sin \pi k x \\ \psi_{01}(x, y) &= A \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/3} \sin \pi k x, \lambda [(\pi k)^{1/3} y] \sin \pi k x \end{aligned} \quad \left(A = \frac{4^{2/3} V \bar{3}}{\pi^{1/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right) \quad (3.3)$$

где $\lambda(x)$ — функция Эйри, определяемая как решение уравнения

$$\lambda''(x) - x\lambda(x) = 0$$

при условиях $\lambda(0) = 1$, $\lambda(\infty) = 0$.

Для того чтобы теперь функция $\psi(x, y)$, определенная (3.1), удовлетворяла всем условиям задачи A , необходимо найти решение следующей задачи Лаврентьева — Бицадзе.

Задача В. Найти регулярное решение

$$z(x, y) = c_0 \psi^0(x, y) + c_{01} \psi^{01}(x, y)$$

уравнения в области \bar{D} , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad z(0, y) = 0, \quad z(1, y) = 0 & \quad \text{при } y > 0 \\ \text{(b)} \quad z(x, y) = -c_0 \psi_0(x, y) - c_{01} \psi_{01}(x, y) & \quad \text{при } \xi = 0, \eta < x_1 \\ z(x, y) = -c_0 \psi_0(x, y) - c_{01} \psi_{01}(x, y) & \quad \text{при } \eta = 1, \xi > x_1 \end{aligned}$$

Теорема единственности доказана Л. В. Овсянниковым^[9]. Метод доказательства аналогичен для задачи Трикоми^[10].

§ 4. Приближенное решение задачи В. Ищем приближенное решение задачи в виде ряда

$$z(x, y) = -\frac{\gamma \Gamma(2/3)}{\pi^{2/3}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-2/3} \lambda[(\pi k)^{2/3} y] \sin \pi k x \quad \left(\gamma = \frac{3^{2/3} \Gamma^3(1/3)}{4\pi^2} \right) \quad (4.1)$$

Так как члены ряда (4.1) суть частные решения уравнения (2.3), то при произвольных, но обеспечивающих равномерную сходимость ряда коэффициентах a_k (4.1) будет решением уравнения (2.3) и будет удовлетворять условию (а) задачи В.

Обозначая $v(x) = z_y(x, 0)$ и учитывая, что^[11]

$$\lambda'(0) = \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}$$

получим

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \pi k x \quad (4.2)$$

Если функция $v(x)$ будет задана, то, разлагая ее в ряд по синусам, получим согласно (4.2) коэффициенты a_k , подстановка которых в (4.1) дает возможность построить по функции $v(x)$ соответствующее ей решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (а) задачи В. Далее из (4.1) имеем

$$\tau(x) = z(x, 0) = -\gamma \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\pi k)^{2/3}} \sin \pi k x$$

Учитывая (4.1), имеем

$$\tau(x) = +T v(x), \quad T v(x) = \gamma \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k x}{(\pi k)^{2/3}} \int_0^1 \sin \pi k t v(t) dt$$

Здесь оператор T — вполне непрерывный и самосопряженный^[5].

Для каждого решения уравнения (2.3), удовлетворяющего условию (а) задачи В, можно указать такую функцию $\rho(x) \in L_2(0, 1)$, что

$$\tau(x) = w \rho(x) = \gamma \begin{cases} J_1(x, 0) & (0 \leq x < x_1) \\ -J_1(1, x) & (x_1 < x \leq 1) \end{cases} \quad \left(J_1(p, q) = \int_q^p \frac{\rho(t) dt}{(x-t)^{1/3}} \right)$$

Действительно, обращая эти выражения по формуле Абеля на соответствующих интервалах, имеем

$$\rho(x) = w^{-1}\tau(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \begin{cases} dJ_2(x, 0)/dx & (0 \leq x < x_1) \\ dJ_2(1, x)/dx & (x_1 < x \leq 1) \end{cases} \quad \left(J_2(p, q) = \int_q^p \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{2/3}} \right)$$

В работе [6] показано, что в интервале $[0, x_1)$ функция $\rho(x)$, интегрируема с квадратом. Так как в $(x_1, 1]$ выражение, определяющее $\rho(x)$, аналогично, то можно считать, что $\rho(x) \in L_2(0, 1)$.

Определим теперь функцию $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = -Lv(x) \quad (4.3)$$

где $L = E + w^{-1}T$, а E — единичный оператор. Или, развертывая (4.3):

$$\omega(x) = -v(x) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \begin{cases} dJ_2(x, 0)/dx & (0 \leq x < x_1) \\ dJ_2(1, x)/dx & (x_1 < x \leq 1) \end{cases} \quad (4.4)$$

Таким образом, каждому решению уравнения (2.3), удовлетворяющему условию (а) задачи B , поставлена в соответствие функция $\omega(x) \in L_2(0, 1)$, определенная (4.3).

Функция $\omega(x)$ и аналогичная ей в работе [5] тесно связаны со значениями решения на характеристиках. Действительно, запишем общее решение Дарбу уравнения (2.3) в форме, приданной ему Ф. Трикоми [10]:

$$Z(\xi, \eta) = \gamma_1 (\eta - \xi)^{2/3} \int_{\xi}^{\eta} \frac{\tau(t) dt}{(\eta - t)^{5/6} (t - \xi)^{5/6}} - \gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} \frac{v(t) dt}{(\eta - t)^{1/6} (t - \xi)^{1/6}}$$

$$\left(\gamma_1 = \frac{\sqrt{4}\pi}{3\Gamma^3(1/3)}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma \right)$$

Рассматривая теперь $Z(0, \eta)$ и $Z(\xi, 1)$ и заменяя в полученном выражении $v(t)$ из (4.4), получим

$$\varphi_1(\eta) = Z(0, \eta) = \gamma_2 \int_0^{\eta} \frac{\omega(t) dt}{t^{1/6} (\eta - t)^{1/6}} \quad (0 \leq \eta < x_1)$$

$$\varphi_2(\xi) = Z(\xi, 1) = \gamma_2 \int_{\xi}^1 \frac{\omega(t) dt}{(t - \xi)^{1/6} (1 - t)^{1/6}} \quad (x_1 < \xi \leq 1)$$

или, используя формулу Абеля на соответствующем интервале:

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} x^{1/6} \begin{cases} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\varphi_1(t) dt}{(x-t)^{5/6}} & (0 \leq x < x_1) \\ -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\varphi_2(t) dt}{(t-x)^{5/6}} & (x_1 < x \leq 1) \end{cases}$$

Следовательно, если известно значение решения на характеристиках $\xi = 0$ и $\eta = 1$, то немедленно вычисляются значения функции $\omega(x)$. Та-

ким образом, задача заключается в отыскании оператора L^{-1} , если он существует, ибо, зная L^{-1} , по заданной функции $\omega(x)$ вычисляется $v(x)$ и по последней уже изложенным методом строится решение.

Определение коэффициентов a_k можно провести методом наименьших квадратов [5].

Приближенное решение задачи B ищем в виде

$$Z^*(x, y) = - \frac{\gamma \Gamma(2/3)}{\pi^{2/3}} \sum_{k=1}^n a_k k^{-2/3} \lambda [(\pi k)^{2/3} y] \sin \pi k x \quad (4.5)$$

Отсюда

$$v^*(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \pi k x$$

Коэффициенты a_k отыскиваем из условия

$$\int_0^1 [Lv^*(x) - \omega(x)]^2 dx = \min$$

или, что все равно:

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x) - \omega(x) \right]^2 dx = \min, \quad \omega_k = -L \sin \pi k x \quad (4.6)$$

Функции $\omega_k(x)$ линейно независимы. Это видно из теоремы единственности задачи B , так как если $\omega(x) = 0$, то и $v(x) = 0$. Таким образом, из предположения о линейной зависимости $\{\omega_k(x)\}$ следует неверное утверждение о линейной зависимости $\{\sin \pi k x\}$. Следовательно, коэффициенты a_k находятся из (4.6) единственным образом.

Из условия (b) задачи B и формулы, определяющей $\omega(x)$ через значения решения на характеристиках, следует

$$\omega(x) = c_0 \omega_0(x) + c_{01} \omega_{01}(x)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= Lv_0(x), & \omega_{01}(x) &= Lv_{01}(x), \\ v_0(x) &= \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right]_{y=0}, & v_{01}(x) &= \left[\frac{\partial \psi_{01}}{\partial y} \right]_{y=0} \end{aligned}$$

Учитывая это и полагая

$$a_k = c_0 b_k^0 + c_{01} b_k^{01} \quad (4.7)$$

получим из (4.6) следующие системы линейных уравнений для определения коэффициентов b_k^0 и b_k^{01} :

$$\sum_{k=1}^n D_{ik} b_k^0 = B_i^0, \quad \sum_{k=1}^n D_{ik} b_k^{01} = B_i^{01} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} D_{ik} &= \int_0^1 \omega_k(x) \omega_i(x) dx, & B_i^0 &= \int_0^1 \omega_0(x) \omega_i(x) dx, \\ B_i^{01} &= \int_0^1 \omega_{01}(x) \omega_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

Коэффициенты c_0 и c_{01} находятся из условия перехода к плоскости течения.

Для вычисления производных характеристик профиля по углу атаки необходимо знать da_k/dx_1 .

Для этой цели дифференцируем (4.7) по x_1 :

$$\frac{da_k}{dx_1} = \frac{dc_0}{dx_1} b_k^0 + \frac{dc_{01}}{dx_1} b_k^{01} + c_0 \frac{db_k^0}{dx_1} + c_{01} \frac{db_k^{01}}{dx_1} \quad (4.10)$$

Производные dc_0/dx_1 и dc_{01}/dx_1 находятся из условия перехода к плоскости течения, для определения производных db_k^0/dx_1 , db_k^{01}/dx_1 , дифференцируя (4.8) по x_1 , имеем системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{db_k^0}{dx_1} &= \frac{dB_i^0}{dx_1} - \sum_{k=1}^n b_k^0 \frac{dD_{ik}}{dx_1} \\ \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{db_k^{01}}{dx_1} &= \frac{dB_i^{01}}{dx_1} - \sum_{k=1}^n b_k^{01} \frac{dD_{ik}}{dx_1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Функции $\omega_k(x)$, $\omega_0(x)$, $\omega_{01}(x)$, необходимые для вычисления интегралов (4.9), определяются следующим образом.

Из (4.6) и (4.3) имеем

$$\omega_k(x) = \begin{cases} -\Omega(\pi k x) & (0 \leq x < x_1) \\ (-1)^k \Omega[\pi k(1-x)] & (x_1 < x \leq 1) \end{cases}$$

$$\left(\Omega(x) = \sin x + \frac{1}{\Gamma(1/3)} \int_0^x \frac{\cos t dt}{(x-t)^{2/3}} \right)$$

Функция $\Omega(x)$ впервые получена в работе [5].

Используя далее (3.2) и (4.4), а также условие (b) задачи B, имеем

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \Omega_0(x, x_1) \\ -\Omega_0(1-x, 1-x_1) \end{cases} \quad \omega_{01}(x) = \begin{cases} \Omega_{01}(x, x_1) \\ \Omega_{01}(1-x, 1-x_1) \end{cases} \quad \begin{matrix} (0 \leq x < x_1) \\ (x_1 < x \leq 1) \end{matrix}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_0(x, x_1) &= v_0(x) - \frac{V\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \int_0^x \frac{\tau_0'(t)}{(x-t)^{2/3}} dt \\ \Omega_{01}(x, x_1) &= v_{01}(x) - \frac{V\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \int_0^x \frac{\tau_{01}'(t)}{(x-t)^{2/3}} dt \end{aligned}$$

Подстановка в последние формулы рядов, определяющих $\tau_0'(x)$, $\tau_{01}'(x)$, и почленное интегрирование приводят к гипергеометрическим интегралам. Изучение функций $\Omega_0(x, x_1)$, $\Omega_{01}(x, x_1)$, представленных в виде гипергеометрических рядов, показывает, что они непрерывны в точке $x = x_1$.

Вычисления, проведенные для случая $x_1 = 1/2$, что соответствует для 1-й схемы обтекания $\alpha = 0$, дают

$$b_{2k-1}^0 = b_{2k}^{01} = db_{2k}^0/dx_1 = db_{2k-1}^{01}/dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Остальные коэффициенты при $n = 6$

$$b_2^0 = -5.53, \quad b_1^{01} = 0.651, \quad b_4^0 = 0.0758, \quad b_3^{01} = -0.1970$$

$$b_6^0 = -1.041, \quad b_5^{01} = -0.0504$$

$$db_1^0/dx_1 = -13.67, \quad db_3^0/dx_1 = 0.921, \quad db_5^0/dx_1 = 10.53$$

при значениях x_1 , мало отличающихся от нуля, выделяя в упоминавшихся выше гипергеометрических рядах главные при малом x_1 члены, а также пренебрегая членами, содержащими x_1 со степенью выше первой, получим после упрощений

$$b_k^0 = \gamma_k \frac{A_0}{x_1}, \quad b_k^{01} = \gamma_k A_{01} \quad (4.12)$$

где A_0 и A_{01} — некоторые постоянные, а коэффициенты γ_k находятся как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n D_{ik} \gamma_k = -i^{1/2} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Здесь коэффициенты D_{ik} определены по первой формуле (4.9) при $x_1 = 0$.

§ 5. Переход к плоскости течения. Переход к плоскости течения заключается в определении функции $\varphi(x, y)$, связанной (2.1) с координатой $X = x/l$, удовлетворяющей уравнению связи (2.2) и условию равенства единице относительной длины части профиля, обтекаемой дозвуковым потоком.

Из (3.1) следует, что $\varphi(x, y)$ имеет вид:

$$\varphi(x, y) = c_0 [\chi_0(x, y) + \chi^0(x, y)] + c_{01} [\chi_{01}(x, y) + \chi^{01}(x, y)] \quad (5.1)$$

причем функции в (3.1) и (5.1) с одинаковыми индексами попарно удовлетворяют уравнению связи.

Легко проверить, что

$$\chi_0(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\chi_0^*(x - x_1 + 2k, y) + \chi_0^*(x + x_1 + 2k, y)]$$

$$\chi_{01}(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\chi_{01}^*(x - x_1 + 2k, y) - \chi_{01}^*(x + x_1 + 2k, y)]$$

где

$$\chi_0^*(x, y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \rho^{-1/2} [(1 + \xi)^{1/2} (3\xi - 2) - (1 - \xi)^{1/2} (3\xi + 2)]$$

$$\chi_{01}^*(x, y) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \rho^{-1/2} [(1 + \xi)^{1/2} - (1 - \xi)^{1/2}]$$

указанные здесь ряды, как в этом нетрудно убедиться, сходятся абсолютно и равномерно везде в области \bar{D} , кроме точки $(x_1, 0)$. Далее

$$\chi(x, y) = c_0 \chi^0(x, y) + c_{01} \chi^{01}(x, y) = -\gamma \frac{\Gamma(2/3)}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \lambda' [(\pi k)^{1/2} y] \cos \pi k x$$

где

$$a_k = c_0 b_k^0 + c_{01} b_k^{01}$$

Так как построенные функции при $y \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, то естественно поместить начало координат плоскости течения в критическую точку потока; тогда, если выбрать $l = 1/2b$ в случае схем обтекания (1) и (2) и $l = b$ в случае схемы обтекания (3), в угловых точках профиля для схемы обтекания (1) имеем

$$\varphi(0, 0) = 1, \quad \varphi(1, 0) = 1 \quad (5.2)$$

При схемах обтекания (2) и (3) получим соответственно в нижней угловой точке профиля и в его передней кромке, а также на задней и передней кромках пластинки

$$\varphi(0, 0) = 1 - l', \quad \varphi(1, 0) = -l' \quad (5.3)$$

где l' — расстояние от передней кромки до критической точки потока.

В случае схемы обтекания (1) два уравнения (5.2) дают возможность определить постоянные c_0 и c_{01} , что и решает задачу. Для схем обтекания (2) и (3) в систему уравнений (5.3) входит, кроме постоянных c_0 , c_{01} , также постоянная l' .

Таким образом, (5.3) необходимо дополнить третьим уравнением. Для его получения используем условие Франкля (2.8).

Для регулярного члена решения (4.5) задачи A условие (2.8) выполняется автоматически.

Действительно, выражая функцию Эйри [11] через функцию Бесселя $K_{1/2}(x)$ и используя асимптотическое представление последней, имеем при больших x

$$\lambda(x) \sim cx^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad (c = \text{const})$$

Так как в (4.5) функция Эйри входит в виде $\lambda[(\pi k)^{1/3}y]$, то

$$\begin{aligned} & \lim \exp(\pi h y^{3/2}) \lambda[(\pi k)^{1/3}y] = \\ & = c(\pi k)^{-1/4} \lim y^{-1/4} \exp\left[\pi\left(h - \frac{2}{3}k\right)y^{3/2}\right] = 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

что и доказывает наше утверждение.

Для главного члена решения задачи A имеем при больших значениях y

$$\frac{\partial}{\partial x} [c_0 \psi^0(x, y) + c_{01} \psi_{01}(x, y)] \sim \frac{32}{3} \sum_{-\infty}^{\infty} \rho^{-3/2}(2k, y) \left(c_0 + \frac{c_{01}}{3} x_1\right)$$

Отсюда необходимым условием выполнения (2.8) является

$$c_0 + \frac{c_{01}}{3} x_1 = 0 \quad (5.4)$$

Легко показать, что при $x_1 \rightarrow 0$ указанное условие будет также и достаточным.

Действительно, используя (3.3) и (5.4), имеем при $y > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow 0} [c_0 \psi_0(x, y) + c_{01} \psi_{01}(x, y)] = \\ & = A \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x_1 \rightarrow 0} [-\pi c_{01} x_1 k^{2/3} \cos \pi k x_1 + c_0 k^{-1/3} \sin \pi k x_1] \lambda [(\pi k)^{2/3} y] \sin \pi k x = 0 \end{aligned}$$

Уравнение (5.4) является искомым третьим уравнением в системе (5.3).

Вычисления для схемы обтекания (1). Система уравнений (5.2) запишется более подробно в виде

$$c_0 \Phi_0(0, x_1) + c_{01} \Phi_{01}(0, x_1) = 1, \quad c_0 \Phi_0(1, x_1) + c_{01} \Phi_{01}(1, x_1) = 1 \quad (5.5)$$

где

$$\Phi_0(x, x_1) = \chi_0(x, 0) + \chi^0(x, 0)$$

Дифференцируя (5.5) по x_1 , получим

$$\begin{aligned} \frac{dc_0}{dx_1} \Phi_0(0, x_1) + \frac{dc_{01}}{dx_1} \Phi_{01}(0, x_1) &= -c_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_0(0, x_1) - c_{01} \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{01}(0, x_1) \\ \frac{dc_0}{dx_1} \Phi_0(1, x_1) + \frac{dc_{01}}{dx_1} \Phi_{01}(1, x_1) &= -c_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_0(1, x_1) - c_{01} \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{01}(1, x_1) \end{aligned}$$

Вычисления, проведенные при $x_1 = 1/2$, дают

$$c_{01} = 0, \quad c_0 = 0.0518, \quad \frac{dc_0}{dx_1} = 0, \quad \frac{dc_{01}}{dx_1} = -0.519$$

Подстановка найденных коэффициентов в (5.1) дает возможность подсчитать $\varphi(x, y)$, что и решает задачу. Действительно, вдоль передних скатов профиля имеем $\varphi = \varphi(0, y)$, $\varphi = \varphi(1, y)$, что дает в неявном виде распределение давления, так как легко убедиться

$$y = \frac{(k+1)^{1/3} - p}{2c^{2/3} a^{2/3}} \quad (5.6)$$

или в случае схемы обтекания (1)

$$y = \frac{(k+1)^{1/3} - p}{2^{2/3} \theta_0^{2/3}}$$

Так как схема обтекания (1) имеет место лишь при малых углах атаки ($\alpha \sim 0$ или $x_1 \sim 1/2$), то разумно представить $y = y(\varphi, x_1)$ в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} y(\varphi, x_1) &= y(\varphi, 1/2) + \frac{\partial}{\partial x_1} y(\varphi, 1/2) (1/2 - x_1) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y(\varphi, 1/2) \frac{(1/2 - x_1)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

где, как это легко проверить, $(1/2 - x_1) = 1/2 \alpha^\circ$.

При малых α° ограничиваемся лишь двумя первыми членами в разложении. Производная y по x_1 находится по формуле

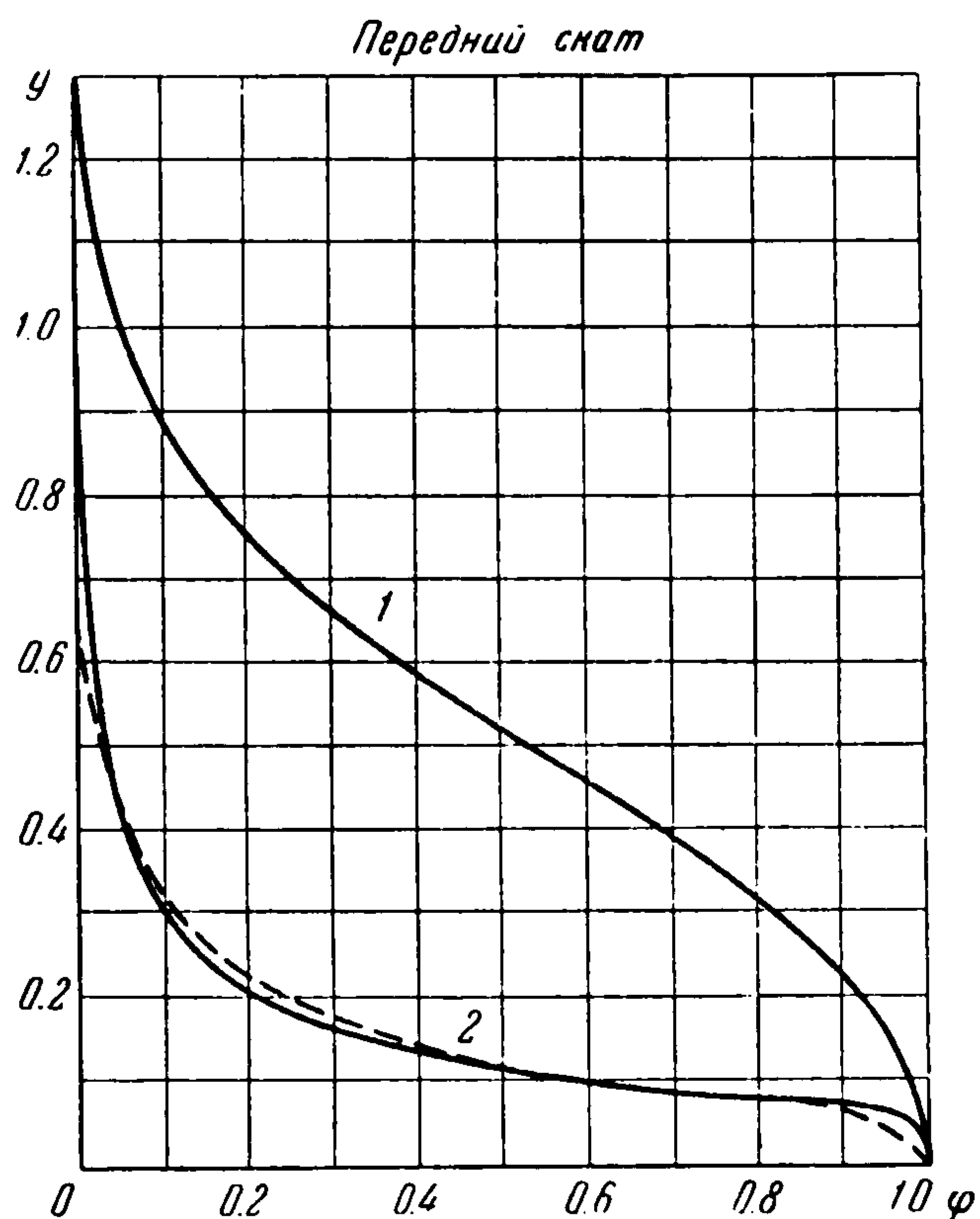
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = - \frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial y}$$

На фиг. 8 даны для переднего ската 10% профиля результаты вычислений $y(\varphi)$ (кривая 1) и величина $10^{-1} \frac{\partial y}{\partial x_1}$ (кривая 2). На фиг. 9 кривая 1 дает распределения давления \bar{p} при $\alpha = 0$, а кривая 2 — распределение $\Delta \bar{p}$ на 1° ; при этом пунктирными линиями показаны кривые по данным работы Гудерлея [7]; при вычислениях $M = 1$, $\theta_0 = 0.1$.

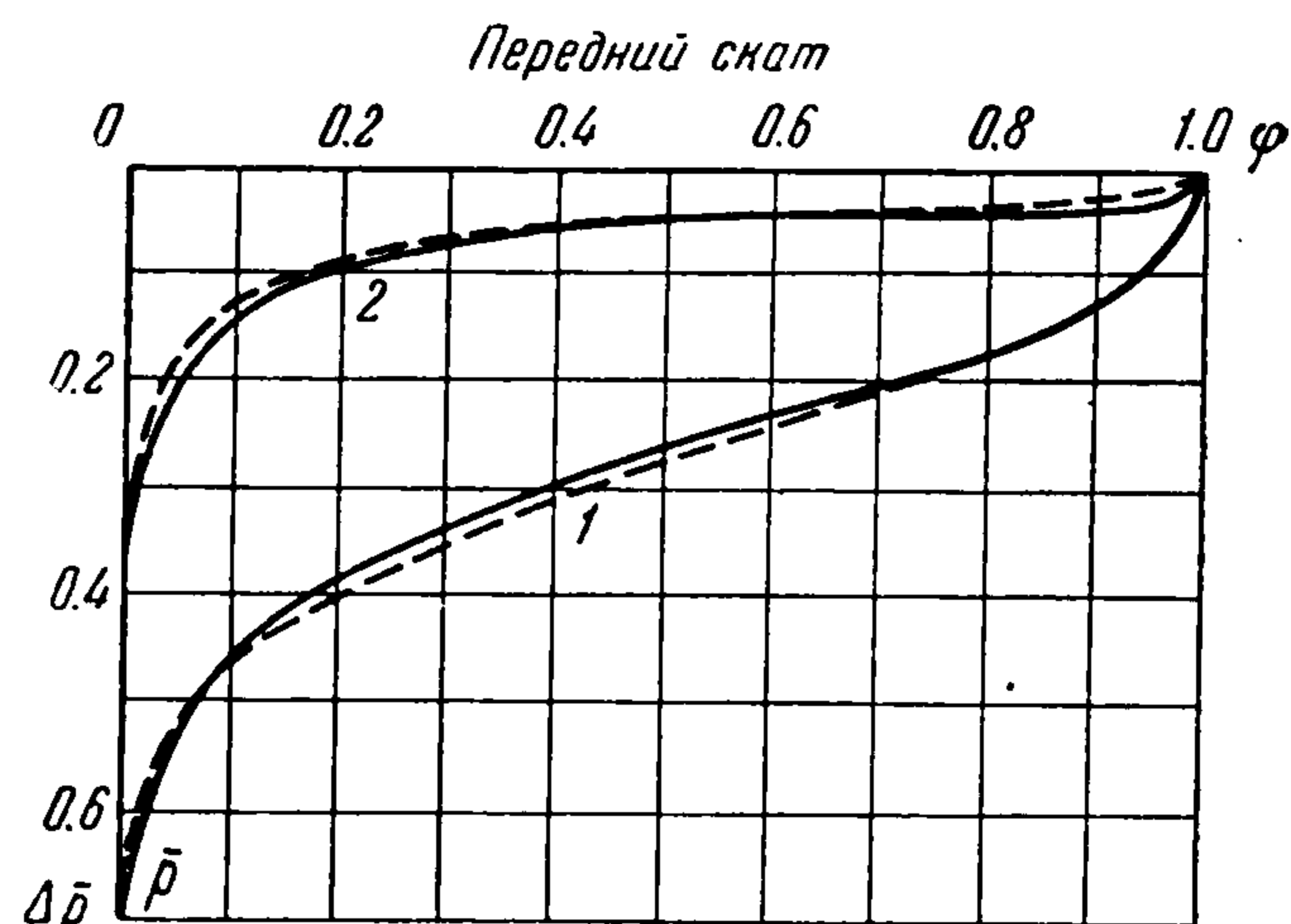
Вычисления для схем обтекания (2) и (3). Система уравнений (5.3) запишется в виде

$$c_0 \Phi_0(0, x_1) + c_{01} \Phi_{01}(0, x_1) = 1 - l'$$

$$c_0 \Phi_0(1, x_1) + c_{01} \Phi_{01}(1, x_1) = -l'$$



Фиг. 8



Фиг. 9

При x_1 , мало отличающемся от нуля, используя (4.12) и выделяя главные при малом x_1 члены, получим

$$c_0 \left[\frac{N_0'}{x_1} + 2\sqrt[3]{6} x_1^{-1/3} \right] + c_{01} (N_{01} - 2\sqrt[3]{6} x_1^{-1/3}) = 1 - l'$$

$$c_0 \frac{N_0'}{x_1} + c_{01} N_{01}' = -l'$$

где N_0 , N_{01} , N_0' , N_{01}' — некоторые постоянные. Учитывая (5.4), имеем

$$l' = c_{01} \left[\frac{N_0'}{3} - N_{01}' \right]$$

и далее

$$c_{01} = -\frac{3}{8\sqrt[3]{6}} x_1^{1/3}, \quad c_0 = \frac{1}{3} x_1^{1/3} \quad (5.7)$$

Таким образом, решение при малых x_1 обращается в следующее:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{8} 6^{-1/3} [\psi_0(x, y) x_1^{1/3} - 3\psi_{01}(x, y) x_1^{1/3}]$$

Регулярный член решения исчезает, ибо, учитывая (5.4):

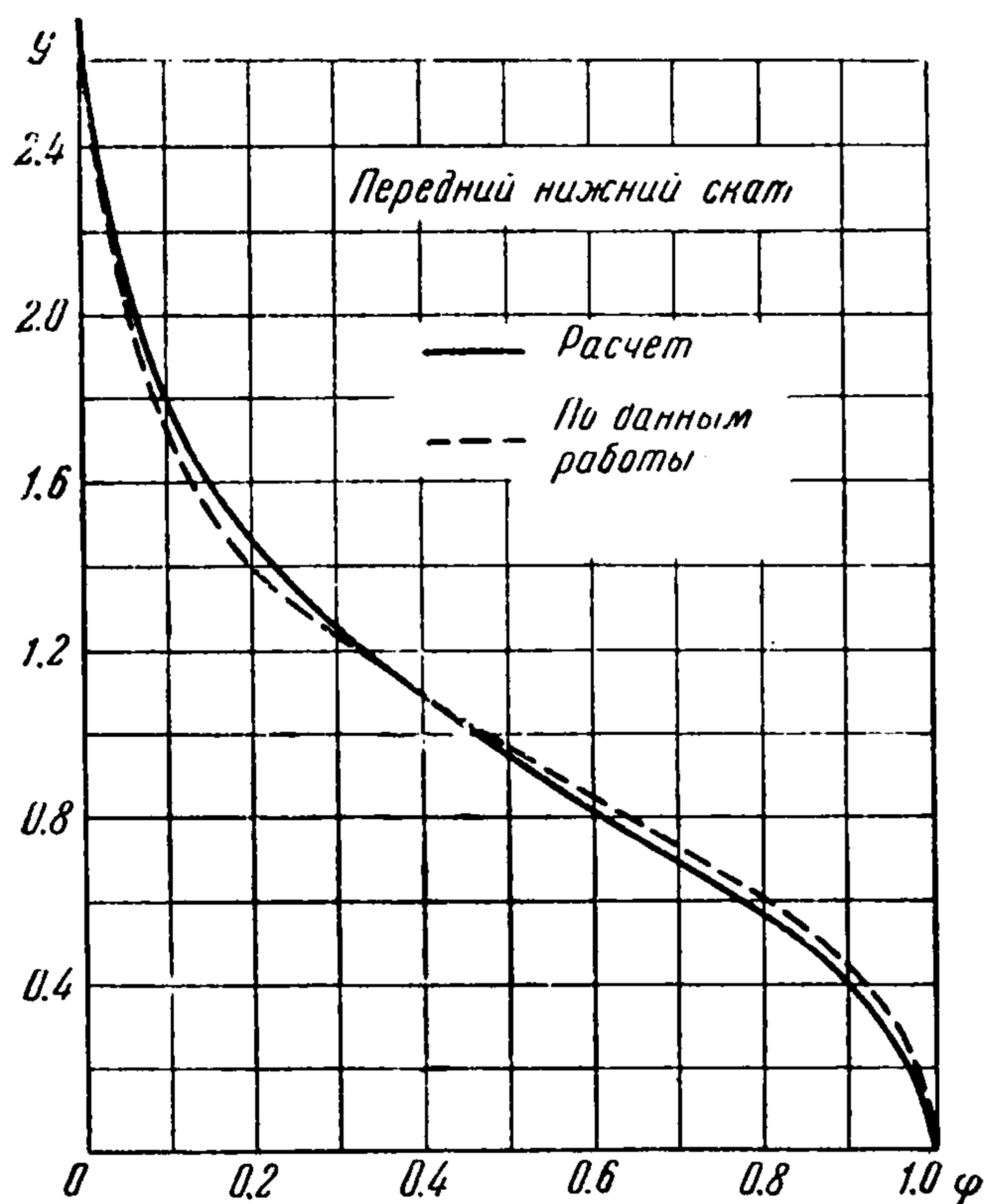
$$\lim a_k = \lim \left[c_0 \frac{A_0}{x_1} + c_{01} A_{01} \right] = \lim [A_0 - 3A_{01}] \frac{1}{8} 6^{-1/3} x_1^{1/3} = 0 \quad \text{при } x_1 \rightarrow 0$$

Отсюда имеем сразу

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{8} 6^{-1/3} [\chi_0(x, y) x_1^{1/3} - 3\chi_{01}(x, y) x_1^{1/3}] \quad (5.8)$$

Выделяя в рядах, определяющих $\chi_0(x, y)$, $\chi_{01}(x, y)$, главные члены при малом x_1 , имеем

$$\begin{aligned}\chi_0^*(x, y) &\approx -2\chi_{01}^*(x, y) = 2x_1^{-1/3}\chi_0^*(1, y^0) \\ \chi_{01}^*(x, y) &\approx -2\chi_{01}^*(x, y) = -2x_1^{-1/3}\chi_{01}^*(1, y^0)\end{aligned}\quad \left(y^0 = \frac{y}{x_1^{2/3}}\right)$$



Фиг. 10

Переходя в (5.8) к пределу при $x_1 \rightarrow 0$, имеем

$$\varphi(0, y) = \frac{1}{4} 6^{-1/3} [\chi_0^*(1, y^0) + 3\chi_{01}^*(1, y^0)]$$

Величина y^0 связана с \bar{p} ;

$$y^0 = \begin{cases} \frac{(k+1)^{1/3}}{2(\theta_0 + \alpha)^{2/3}} \bar{p} & \text{схема обтекания (2)} \\ \frac{(k+1)^{1/3}}{2\alpha^{2/3}} \bar{p} & \text{схема обтекания (3)} \end{cases}$$

На фиг. 10 для переднего нижнего ската сплошной линией даны результаты расчета $y(\varphi)$ и пунктиром для сравнения данные работы [8].

В заключение укажем, что проведенные расчеты показывают незначительное влияние регулярной части решения на распределение давления и как во второй, так и в первой схемах обтекания распределение давления можно вычислять лишь по главному члену решения.

Поступила 17 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Уравнения околосзвукового движения газа. Вестник ЛГУ, № 6 сер. «Мех., физ., хим.», 1952.
2. Франкль Ф. И. Исследование по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. ДАН СССР, т. LVIII, № 7, 1947; Об одном классе решений газодинамических уравнений Чаплыгина. Уч. записки МГУ. Механика, т. IV, вып. 154, 1951.
3. Овсянников Л. В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука. Тр. ЛКВВИА, вып. 33, 1950.
4. Гудерлей и Иосихара. Обтекание клиновидного профиля при $M=1$. Сб. переводов. Механика, вып. 3, 1951.
5. Овсянников Л. В. О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера—Дарбу. ДАН СССР, т. XC1, № 3, 1953.
6. Франкль Ф. И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева—Бицадзе. Вестник МГУ, № 11, 1951.
7. Guderley G. and Joshihara. Two-Dimensional unsymmetric Flow patterns at Mach Number 1. Journ. of the aeronaut. Sci, vol. 20, № 11, 1953.
8. Guderley G. The Flow over a Flat plate with a small Angle of Attack at Mach Number 1. Journ. of the aeronaut. Sci, vol. 21, № 4, 1954.
9. Овсянников Л. В. Решение задачи о клиновидном профиле в звуковом потоке. Доклад на НТК в ЛКВВИА, 1951.
10. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. Гостехиздат, 1947.
11. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. НИИ-108, НКЭП СССР, 1946.