



указанная Буземаном [4], коническому течению, причем  $CE$  дает течение в сопле сжатия [4], а  $ED$  — обтекание кормовых частей тел вращения [5].

В точке  $E(u_\infty, 0)$  обе кривые касаются, причем  $CD$  имеет вдвое меньший радиус кривизны чем  $AB$  ( $u_\infty$  — скорость невозмущенного потока).

За ударной волной течение Прандтля—Мейера реализуется с точностью до кубов, а коническое течение с точностью до квадратов добавков к невозмущенной скорости потока. Это следует из того, что строфоида, изображение скачка уплотнения (пунктир на фиг. 2), имеет касание второго порядка с эциклоидой и, следовательно, касание первого порядка с изображающей линией конического течения.

Приступим к нахождению уравнения линии ударной волны. С принятой точностью касательная к линии ударной волны в каждой точке является биссектрисой угла между характеристиками первого семейства возмущенного и невозмущенного потоков. Поэтому достаточно найти угол  $\gamma$ , образованный характеристикой первого семейства с осью  $x$  в

функции угла  $\varphi$  (фиг. 1). Для плоского течения имеем

$$\gamma(\varphi) = \varphi \quad (1.1)$$

Для конических течений, используя разложение [4] для зависимости  $v(u)$  вблизи точки  $E$  и известное равенство  $du(\varphi)/dv(\varphi) + \operatorname{tg} \varphi = 0$  с принятой точностью получим

$$\gamma(\varphi) = \alpha + \frac{\varphi - \alpha}{2} \quad (1.2)$$

где  $\alpha$  — угол Маха в невозмущенном потоке. Уравнения (1.1) и (1.2) можно объединить:

$$\gamma(\varphi) = \alpha + \frac{\varphi - \alpha}{k} \quad (1.3)$$

где  $k = 1$  для плоского,  $k = 2$  для осесимметрического потока.

Пользуясь указанным свойством ударной волны, запишем уравнение ударной волны в полярных координатах с центром в точке  $O$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \left[ \varphi - \frac{\gamma + \alpha}{2} \right] = 0$$

или с учетом (1.3)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \left[ \frac{2k-1}{2k} (\varphi - \alpha) \right] = 0$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[ \frac{\sin(1 - 1/2k)(\varphi_0 - \alpha)}{\sin(1 - 1/2k)(\varphi - \alpha)} \right]^{2k/(2k-1)} \quad \text{для головной волны} \quad (1.4)$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left[ \frac{\sin(1 - 1/2k)(\varphi_1 - \alpha)}{\sin(1 - 1/2k)(\varphi - \alpha)} \right]^{2k/(2k-1)} \quad \text{для хвостовой волны} \quad (1.5)$$

где  $\rho_0, \varphi_0$  и  $\rho_1, \varphi_1$  — полярные координаты точек  $P$  и  $Q$  соответственно. При выводе (1.5) принимается, что поток за хвостовой ударной волной не возмущен. Действительно, если, зная форму хвостовой ударной волны, найти действительную линию тока, проходящую через точку  $Q$  (пунктир на фиг. 1), то окажется, что отклонение этой линии от заданной прямолинейной стенки всюду порядка  $(\varphi_1 - \alpha)^2$ , т. е. пренебрежимо

с нашей точностью. В декартовых координатах (1.4) и (1.5) запишутся (с учетом малости углов  $(\varphi_0 - \alpha)$  и  $(\varphi_1 - \alpha)$ )

$$x = r \operatorname{ctg} \alpha - \lambda_0 r^{1/2k} \quad \text{для головной волны} \quad (1.6)$$

$$x = r \operatorname{ctg} \alpha + \lambda_1 r^{1/2k} \quad \text{для хвостовой волны} \quad (1.7)$$

Здесь  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  — постоянные, зависящие от координат точек  $P$  и  $Q$  соответственно. Для прироста давления  $\Delta p$  на ударной волне имеем

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_\infty^2 \sin^2 \varepsilon - 1)$$

где  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей,  $p_\infty$  — давление невозмущенного потока,  $\varepsilon$  — угол наклона скачка с осью  $x$ ,  $M_\infty$  — число Маха невозмущенного потока. Для слабых волн имеет место

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \operatorname{ctg} \alpha (\varepsilon - \alpha)$$

Используя (1.6), получим для головной волны

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{\lambda_0 \sin 2\alpha}{k} r^{\frac{1-2k}{2k}} \quad (1.8)$$

В работе Фридрихса<sup>[6]</sup> исследовано затухание плоских ударных волн с более высокой степенью точности в рамках теории второго приближения. Для сравнения с результатами<sup>[6]</sup> выразим  $\lambda_0$  через максимальную толщину профиля  $\delta$  (фиг. 1) и подставим полученное выражение в (1.8):

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \frac{2\kappa}{V\kappa + 1} \sqrt{\frac{\delta}{r}}$$

что в пределах принятых допущений совпадает с результатом Фридрихса.

Выразим теперь перепад давления в ударной волне через волновое сопротивление тела вращения с образующей  $PNQ$ . Очевидно, что головная волна определяется участком  $PN$ , а хвостовая волна — участком тела  $NQ$ . Волновое сопротивление  $x_1$  дуги  $PN$  равно

$$x_1 = 2\pi \int_{x_P}^{x_N} r(p - p_\infty) \frac{dr}{dx} dx$$

С точностью до квадратов угла  $\varphi - \alpha$  давление на поверхности тела находится, как при обтекании тонкого плоского профиля:

$$p - p_\infty = \rho_\infty u_\infty^2 \frac{dr}{dx} \operatorname{tg} \alpha$$

где  $\rho_\infty$  — плотность невозмущенного потока.

Из уравнения для конических течений получим

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\cos^2 \alpha}{\kappa + 1} (\varphi - \alpha)$$

Из геометрических соображений с учетом уравнения (1.6)

$$\varphi_0 - \alpha = \frac{x_N - x_P}{r_0} \sin^2 \alpha = \frac{\lambda_0}{r_0^{2/4}} \sin^2 \alpha$$

Теперь можно вычислить интеграл в выражении для  $x_1$  и выразить  $\lambda_0$  через  $x_1$ . Подставив полученное выражение в (1.8) и проделав необходи-

мые выкладки, получим

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \left[ \frac{3\kappa^2}{2\pi(\kappa+1)} \frac{x_1}{p_\infty} \right]^{1/2} \frac{r_0^{1/2}}{r^{3/4}} \quad \text{для головной волны} \quad (1.9)$$

$$\frac{\Delta p}{p_\infty} = \left[ \frac{3\kappa^2}{2\pi(\kappa+1)} \frac{x_2}{p_\infty} \right]^{1/2} \frac{r_0^{1/2}}{r^{3/4}} \quad \text{для хвостовой волны} \quad (1.10)$$

где  $x_2$  — волновое сопротивление хвостовой части тела.

Если допустить (что мы и сделаем), что интенсивность ударной волны на далеком расстоянии от тела не зависит от формы тела, а зависит лишь от величины испытываемого телом волнового сопротивления, то полученные формулы будут общими для нахождения интенсивности головной и хвостовой ударных волн, идущих от тела вращения, имеющего волновое сопротивление головки  $x_1$ , хвостовой части  $x_2$  и радиус миделевого сечения  $r_0$  (поскольку интенсивность ударных волн очень слабо зависит от  $r_0$ , то можно считать и в общем случае единственный линейный размер, вошедший в (1.9) и (1.10),  $r_0$  радиусом миделевого сечения тела).

Основанием для принятого допущения является следующее. Если от произвольного тела, имеющего волновое сопротивление головки  $x_1$  и хвостовой части  $x_2$ , отходят волны с интенсивностью в виде (1.9) и (1.10), то можно, зная потери полного давления, по теореме импульсов обратно найти волновое сопротивление тела, которое действительно оказывается равным  $x_1 + x_2$ . Существенно, что интенсивности волн не зависят непосредственно от числа  $M$  невозмущенного потока.

Приведем еще формулу для расстояния  $d(r)$  между головной и хвостовой ударными волнами

$$d(r) = \lambda_0 r^{1/2k} + \lambda_1 r^{1/2k}$$

или для тела вращения

$$d(r) = \left[ \frac{3(\kappa+1)^2 M^6}{2\pi\kappa(M^2-1)^{3/2}} \right]^{1/2} \left[ \left( \frac{x_1}{p_\infty} \right)^{1/2} + \left( \frac{x_2}{p_\infty} \right)^{1/2} \right] r_0^{1/2} r^{1/4}$$

**§ 2. Ударные волны в нестационарном движении.** Рассмотрим одновременно одномерные ударные волны и волны с цилиндрической и сферической симметрией.

Ось  $x$  на фиг. 1 заменим на ось времени  $t$ , а линию  $APNQB$  будем считать траекторией движения поршня. Найдем закон движения передней ударной волны (для задней волны все получается аналогично).

Строим за ударной волной волну разрежения. В одномерном течении это будет волна Римана, неоднократно использованная при исследовании затухания ударных волн. В пространственных течениях в качестве волн разрежения используем течения, соответствующие рассмотренным Л. И. Седовым<sup>[7]</sup> автомодельным решениям уравнений газовой динамики. Так же как и в уже использованных в § 1 решениях, в этих течениях давление, плотность и радиальная скорость остаются постоянными вдоль лучей в координатах  $r, t$  (фиг. 1).

Введем те же безразмерные переменные<sup>[7]</sup>

$$z = \frac{a^2 t^2}{r^2}, \quad V = v \frac{t}{r}, \quad \lambda = \frac{a_\infty^2 t^2}{r^2}$$

где  $a, a_\infty, v$  — соответственно скорость звука, скорость звука невозму-

щенного газа и радиальная скорость. В этих переменных волна Римана  $r = (v + a)t$  запишется в виде

$$(V - 1)^2 = z \quad (2.1)$$

Для пространственных течений уравнение, дающее связь между  $z$  и  $V$ , не интегрируется в конечном виде. Однако в окрестности особой точки  $V = 0, z = 1$  этого уравнения можно получить выражения:

для цилиндрических волн

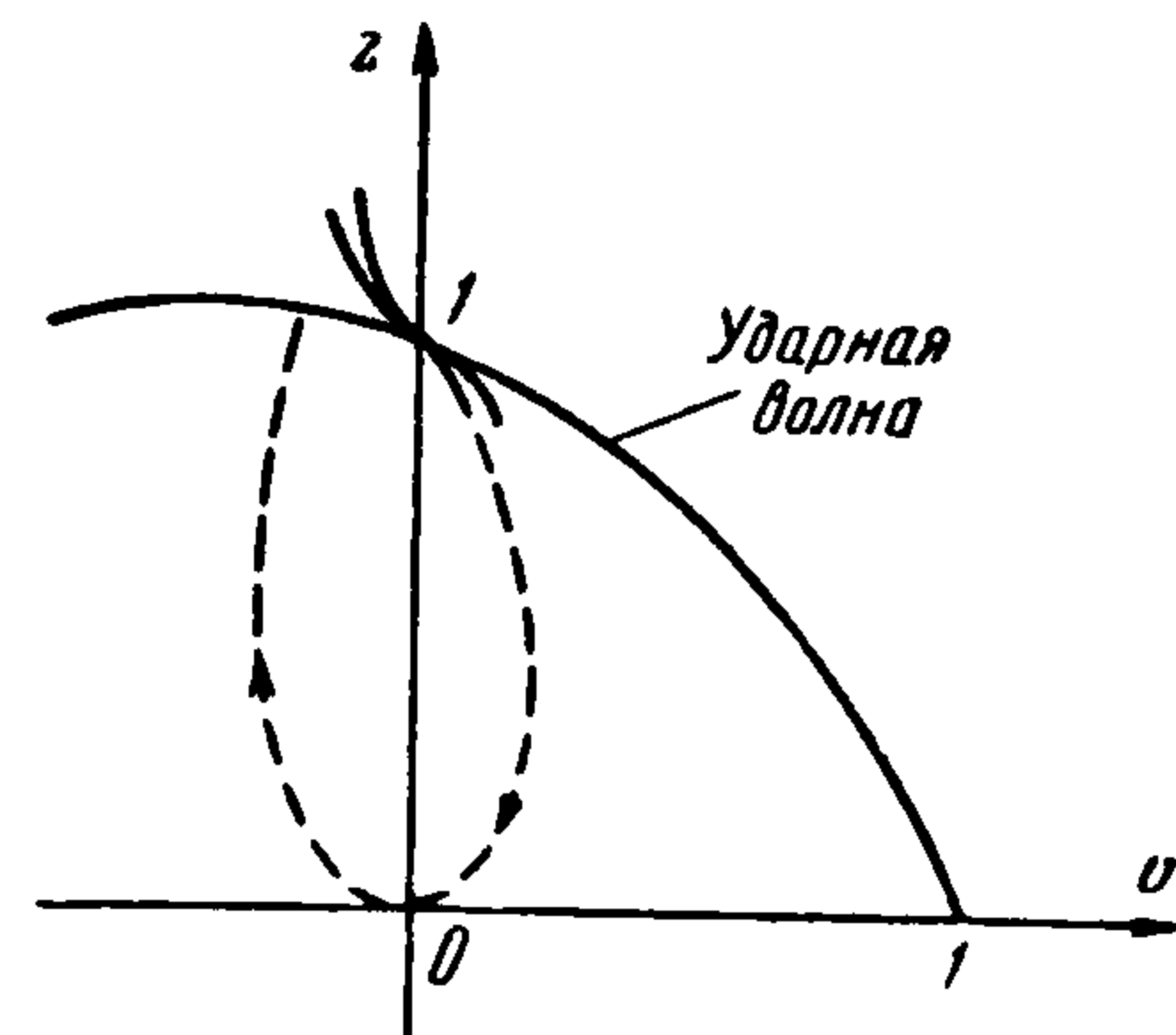
$$z = 1 - (\kappa + 3)V + CV^2 \quad (2.2)$$

$$\lambda = 1 - 2(\kappa + 1)V \quad (2.3)$$

для сферических волн

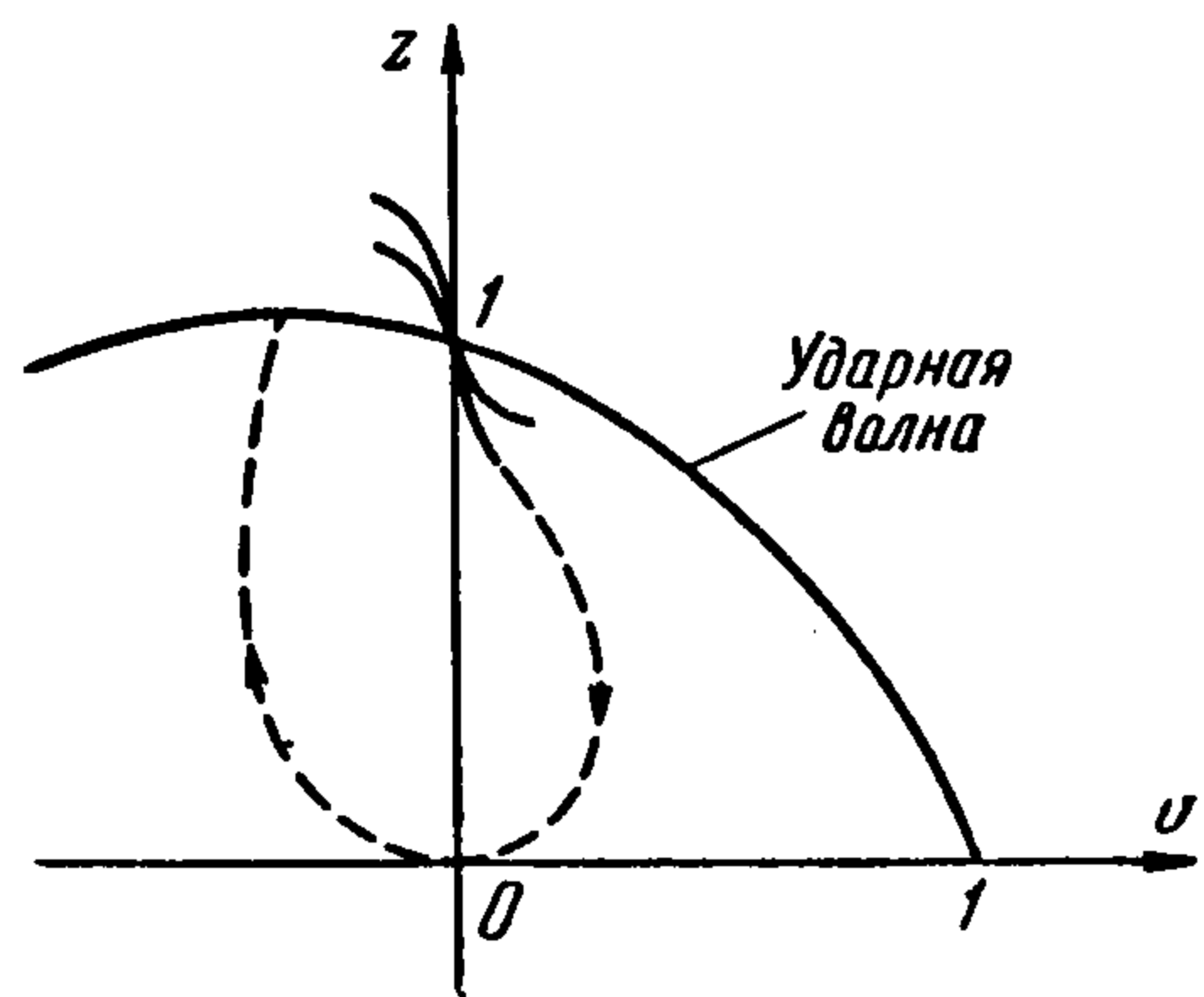
$$z = 1 + (\kappa + 1)V \ln \left| \frac{V}{C} \right| \quad (2.4)$$

$$\lambda = z - (\kappa - 1)V \quad (2.5)$$



Фиг. 3

В (2.2) и (2.4)  $C$  — постоянный параметр, от которого зависит семейство интегральных линий, исходящих из особой точки. На фиг. 3 и 4 показаны интегральные кривые соответственно для цилиндрического и сферического случаев вблизи особой точки.



Фиг. 4

Отметим попутно, что использованные нами в § 1 конические течения совершенно аналогичны точным решениям уравнений нестационарного течения. Так, например, интегральные кривые, отмеченные на фиг. 3, 4 пунктиром, можно при движении по направлению, указанному стрелкой, интерпретировать как течения сжатия внутри полый сферы или цилиндра, заполненных газом.

Движение поршня начинается от состояния покоя и идет по определенному закону до тех пор, пока образующаяся в центре ударная волна не достигнет поршня. (В особой точке  $O$  слева и справа интегральные кривые имеют одинаковую кривизну.)

В такой интерпретации эти течения аналогичны течению в сопле сжатия Буземана<sup>[4]</sup>. Существует также аналог течения А. А. Никольского<sup>[5]</sup>. С принятой точностью скорость распространения ударной волны есть среднее арифметическое между скоростями распространения малых возмущений относительно неподвижной системы координат для возмущенного и невозмущенного газа.

Уравнение ударной волны на основании этого запишется в виде

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} [a_\infty + (v + a)] \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left[ a_\infty + \frac{r}{t} (V + \sqrt{z}) \right] \quad (2.6)$$

для плоского случая из (2.1) получим  $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left[ a_\infty + \frac{r}{t} \right]$ ; это дает

$$r = a_\infty t + A \sqrt{t} \quad (2.7)$$

При помощи (2.2)—(2.5), выражая  $V$  и  $z$  через  $\lambda$  и подставляя в (2.6), получим

$$r = a_{\infty} t + Bt^{1/2} \quad \text{для цилиндрической волны} \quad (2.8)$$

$$r = a_{\infty} t + a_{\infty} C \sqrt{\ln \frac{t}{C}} \quad \text{для сферической волны} \quad (2.9)$$

Постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в (2.7)—(2.9) зависят от координат точки  $P$ . При выводе (2.7)—(2.9) использован тот факт, что мы ищем асимптотические выражения ( $t$  достаточно велико).

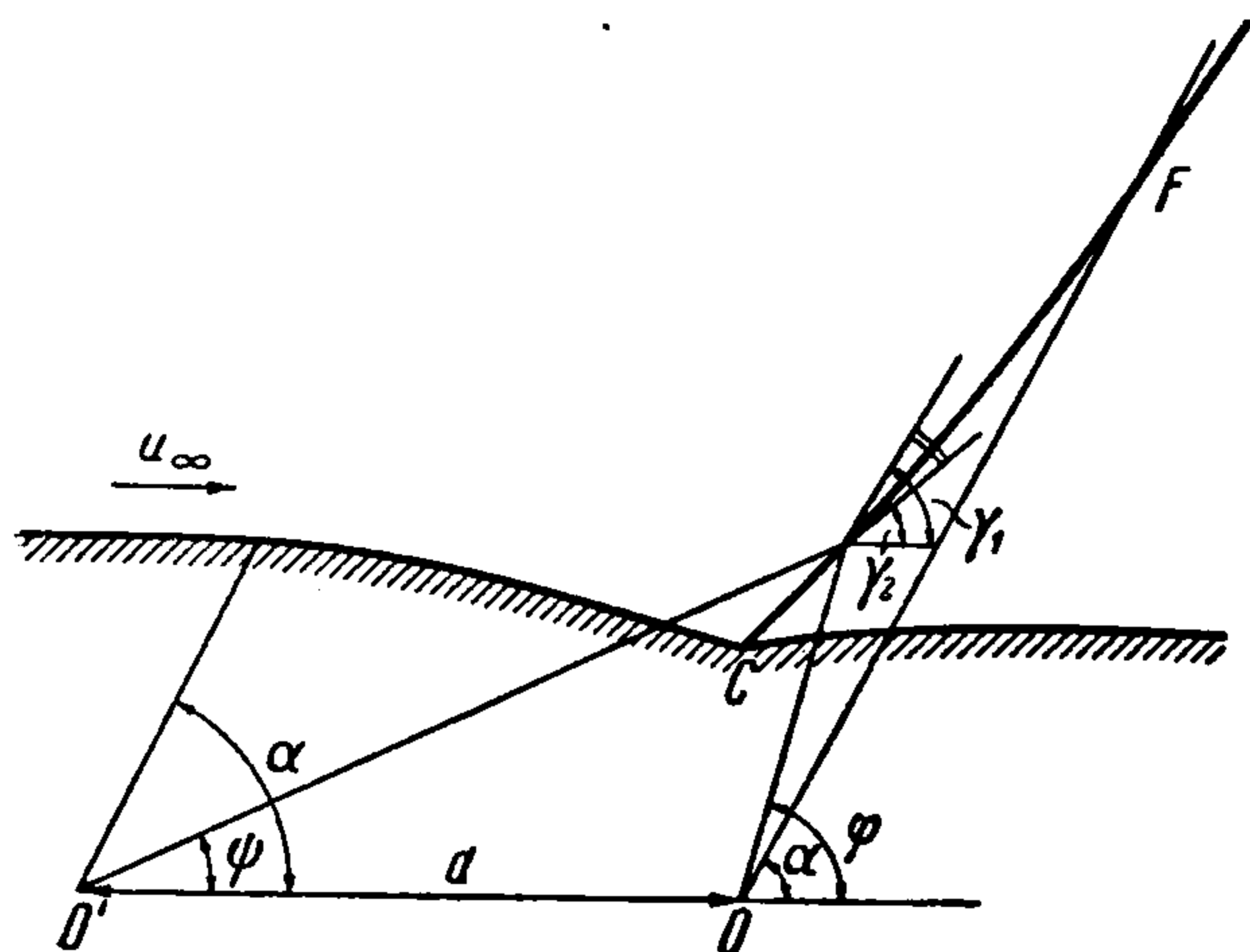
Предположив, что на расстояниях, много бóльших  $r_0$ , интенсивность ударной волны не зависит от формы начального импульса, а определяется лишь его энергией, постоянные в выражениях (2.8) и (2.9) можно выразить, как и в § 1, через энергию  $E$ , затраченную при движении поршня, которую легко находим, так как давление и скорость на поверхности поршня известны из точного решения. В результате для цилиндрического случая получим

$$\frac{\Delta p}{p_{\infty}} = \left[ \frac{3x^2}{2\pi(x+1)} \frac{E}{p_{\infty}} \right]^{1/2} \frac{r_0^{1/2}}{r^{3/2}} \quad (2.10)$$

Это выражение совпадает с (1.9) при замене  $x_1$  на  $E$ .

Для сферического случая зависимость интенсивности ударной волны от  $E$  дается выражениями

$$\frac{\Delta p}{p_{\infty}} = \frac{2x}{x+1} \frac{C}{r} \frac{1}{\sqrt{\ln r/C}} \quad (2.11)$$



Фиг. 5.

где значение постоянной  $C$  находится из следующего уравнения:

$$-\frac{(C/R_0 \sqrt{\ln R_0/C})^3}{\ln(C/R_0 \sqrt{\ln R_0/C})} + 3\text{Li} \left[ \left( \frac{C}{R_0} \sqrt{\ln \frac{R_0}{C}} \right)^3 \right] = \frac{(x+1)^2 E}{16\pi R_0^3 p_{\infty}} \quad (2.12)$$

(Li означает интегральный логарифм). Нам нужен корень этого уравнения  $C/R_0 \ll 1$ .

**§ 3. Асимптотическое поведение волновых пакетов.** Рассмотрим предварительно затухание ударной волны, распространяющейся между двумя центрированными волнами разрежения (фиг. 5) в установившемся плоском или осесимметричном течениях. Уравнение, выражающее свойство ударной волны (§ 1) в полярных координатах с центром в точке  $O$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} + \text{ctg} \left[ \varphi - \frac{\gamma_1(\varphi) + \gamma_2(\psi)}{2} \right] = 0 \quad (3.1)$$

где  $\gamma_1(\varphi)$  и  $\gamma_2(\psi)$  — углы с осью  $x$ , образованные характеристиками первого семейства соответственно за волной и перед волной, углы  $\varphi$  и  $\psi$  показаны на фиг. 5.

Имеем аналогичные (1.3) соотношения

$$\gamma_1(\varphi) = \alpha + \frac{\varphi - \alpha}{k}, \quad \gamma_2(\psi) = \alpha + \frac{\psi - \alpha}{k} \quad (3.2)$$

С учетом уравнения (3.2) можно переписать (3.1):

$$\rho \frac{d\rho}{d\rho} + \text{tg} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2k} \right) (\varphi - \alpha) - \frac{1}{2k} (\psi - \alpha) \right] = 0 \quad (3.3)$$

Из геометрических соображений

$$\frac{\sin \psi}{\rho} = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{d} \quad (3.4)$$

где  $d$  — расстояние между  $O$  и  $O'$  (фиг. 5).

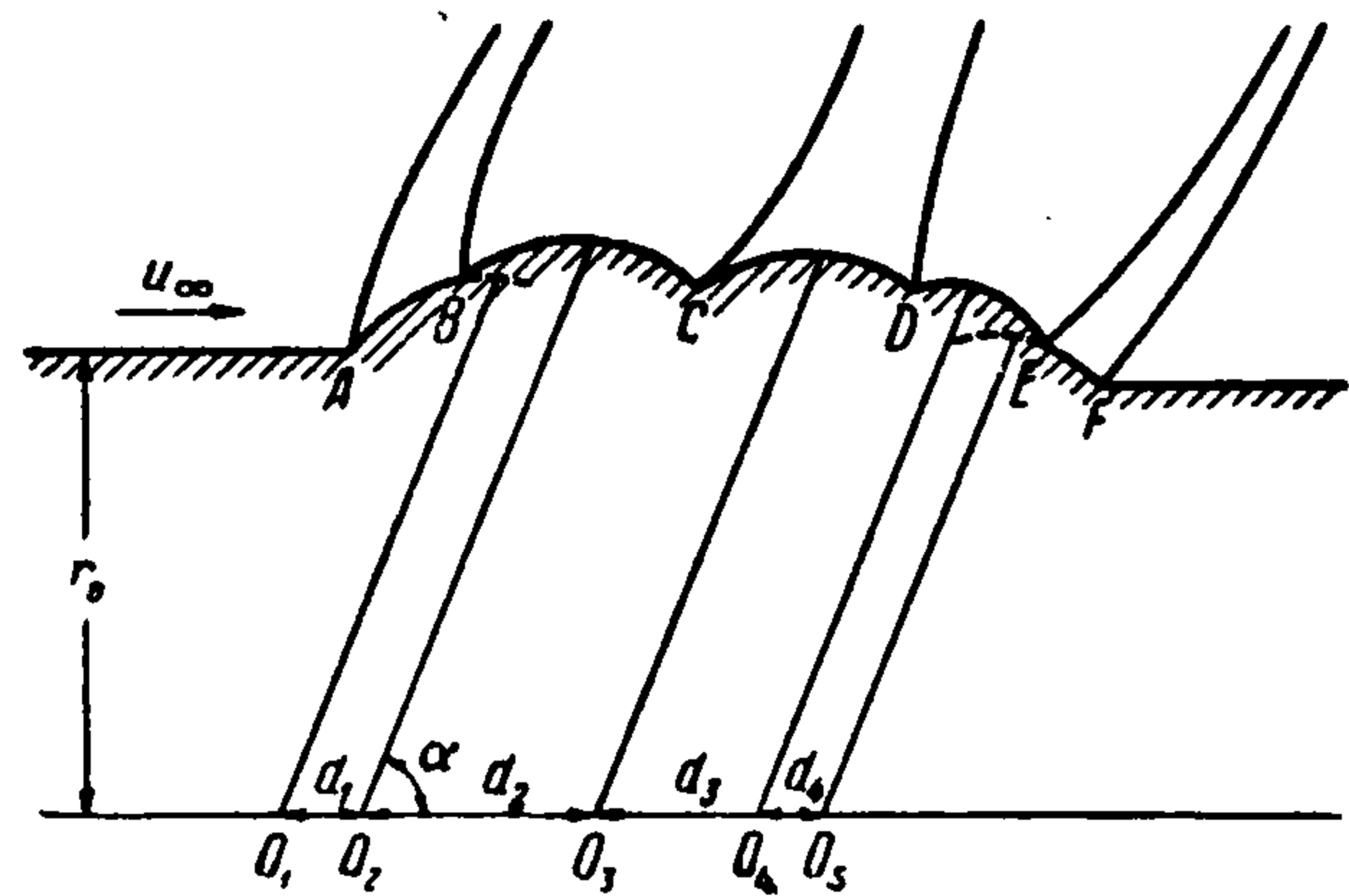
Уравнение (3.3) нужно решить совместно с (3.4). Асимптотическое решение, т. е. решение при достаточно больших  $\rho$ , ищем в таком виде

$$\varphi - \alpha = \frac{a_0}{\rho^{1-1/k}} + \frac{a_1}{\rho} + \frac{a_2}{\rho^{1+1/k}} + \dots \quad (3.5)$$

$$\psi - \alpha = \frac{b_0}{\rho^{1-1/k}} + \frac{b_1}{\rho} + \frac{b_2}{\rho^{1+1/k}} + \dots \quad (3.6)$$

Подставляя выражения (3.5) и (3.6) в исходные уравнения, получим уравнения для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0 - b_0 &= 0 \\ a_1 + b_1 &= 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$



Фиг. 6

Эти уравнения справедливы как для  $k = 1$ , так и для  $k = 2$ . Далее для  $k = 1$  имеем  $a_1 = 1/2 d (\sin \alpha + a_0 \cos \alpha - 1/2 a_0^2 \sin \alpha)$  и для  $k = 2$   $a_1 = 1/2 d \sin \alpha$  и т. д. Отметим, что мы не требуем сходимости выражений (3.5) и (3.6), достаточно лишь того, что каждый последующий член ряда стремится к нулю быстрее предыдущего с ростом  $\rho$ .

Поведение решения при достаточно больших  $\rho$  определяется главным членом разложения (3.5), т. е. членом с коэффициентом  $a_0$ , который выражается через  $\rho_0$  и  $\varphi_0$  — полярные координаты точки  $C$  (фиг. 5).

Нетрудно получить

$$a_0 = \left[ \varphi_0 - \alpha - \frac{d \sin \alpha}{2\rho_0} + O(\rho_0^{-1-1/k}) \right] \rho_0^{1-1/k}$$

т. е. главный член в разложении (3.5) имеет вид:

$$\varphi - \alpha = \left[ \varphi_0 - \alpha - \frac{d \sin \alpha}{2\rho_0} + O(\rho_0^{-1-1/k}) \right] \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1-1/k} \quad (3.7)$$

В § 1 были получены уравнения для волн, отделяющих невозмущенный поток от волны разрежения. Эти уравнения (1.4) и (1.5) с принятой точностью можно записать

$$\varphi - \alpha = \frac{C}{\rho^{1-1/2k}} \quad (3.8)$$

где  $C > 0$  для головной и  $C < 0$  для хвостовой волны. Сравним (3.7) и (3.8), убеждаемся, что если

$$\varphi_0 - \alpha - \frac{1}{2} d \frac{\sin \alpha}{\rho_0} + O(\rho_0^{-1-1/k}) > 0 \quad (3.9)$$

то рассмотренная нами волна, распространяющаяся между двумя волнами разрежения, достигнет головную волну, и если

$$\varphi_0 - \alpha - \frac{1}{2} d \frac{\sin \alpha}{\rho_0} + O(\rho_0^{-1-1/k}) < 0 \quad (3.10)$$

то эта ударная волна достигнет хвостовую волну. На фиг. 5 показан случай, когда удовлетворяется условие (3.10). Ударная волна до точки

$F$  подчиняется уравнению (3.7), а после точки  $F$  — уравнению (1.5), т. е. переходит в обычную хвостовую волну.

Интегральные кривые уравнения (3.3), пересекающиеся с головной волной, отделены от интегральных кривых, пересекающихся с хвостовой волной, линией, уравнение которой

$$\varphi - \alpha - \frac{d \sin \alpha}{2\rho} + O(\rho^{-1-\frac{1}{k}}) = 0 \quad (3.11)$$

Если начальная точка  $C$  попадает на эту линию, ударная волна уйдет в бесконечность, не пересекаясь ни с головной, ни с хвостовой волной. Однако такой волны не будет, если нарушить сколь угодно мало условие (3.11). В этом смысле решение (3.11) неустойчиво.

Теперь нетрудно рассмотреть асимптотическое поведение волнового пакета. Пусть, например, линия тока на большом расстоянии  $r_0$  от источника возмущений имеет вид, указанный на фиг. 6.

В соответствии с основным допущением каждую из волн заменяем центрированной волной разрежения: центр волны  $AB$  в точке  $O_1$ , центр волны  $BC$  в точке  $O_2$  и т. д. (центры волн лежат на пересечении оси  $x$  с прямыми, наклоненными к оси  $x$  под углом  $\alpha$ , пересекающими линию тока  $ABCDEF$  в точках с нулевой вертикальной компонентой скорости).

Пусть для точек  $B$  и  $D$  выполняется условие (3.9), а для точек  $C$  и  $E$  — условие (3.10).

Волна  $B$  достигнет головную волну, волна  $E$  — хвостовую, а волны  $D$  и  $C$  пересекутся между собой. В результате такого пересечения появится одна волна, которая в зависимости от соотношения между интенсивностями волн разрежения  $BC$  и  $DE$  настигает либо головную, либо хвостовую волну. Можно привести и другие примеры волновых пакетов. Очевидно, что в самом общем случае волновой пакет, состоящий из конечного числа ударных волн, разделенных волнами разрежения, на достаточно большом расстоянии перейдет в головную и хвостовую волны, разделенные волной разрежения. Другими словами, на большом расстоянии от тела любой формы будут всегда только две волны.

Аналогичное утверждение справедливо и для нестационарных течений и доказывается аналогично.

Поступила 17 VII 1956

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места возникновения. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
2. W h i t h a m G. V. The Flow Pattern of a Supersonic Projectile. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. V, № 3, 1952.
3. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1954.
4. Б у з е м а н А. Осесимметрическое коническое сверхзвуковое течение. Газовая динамика, ИЛ, М., 1950.
5. Н и к о л ь с к и й А. А. Конические осесимметрические сверхзвуковые газовые течения разрежения. Труды ЦАГИ, М., 1949.
6. F r i e d r i c h s K. O. Formation and Decay of Shock Waves. Communication on Applied Mathematics, vol. 1, № 3, 1948.
7. С е д о в Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.