Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ОТ ПЕРЕМЕЩАЮЩЕЙСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДАВЛЕНИЙ

С. С. Войт

(Москва)

В работе рассматривается распространение волн на поверхности жидкости из области, подверженной действию системы перемещающихся периодических давлений. Указывается, в каких случаях волновые движения распространяются из области приложения давлений в области, свободные от действия давлений. Проводится исследование в случае конечной глубины жидкости. Задача поставлена как простейшая схема изучения направленности распространения волн из областей поверхности жидкости, подверженных атмосферному воздействию.

§ 1. Пусть в полосе $|y| < h$ к поверхности жидкости, занимающей полупространство $z < 0$, прикладывается перемещающаяся вдоль оси x со скоростью c периодическая система давлений, заданная в виде

$$p(x, y, t) = P(y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(kx - \sigma t) \qquad \left(\frac{\sigma}{k} = c\right) \tag{1.1}$$

Изучим волны, образующиеся на поверхности жидкости в результате действия такой системы давлений.

Представим $P(y)$ в виде интеграла Фурье:

$$P(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ily} F(l)\, dl \qquad \left(F(l) = \frac{1}{\pi} \int_{-h}^{h} P(\xi)\, e^{il\xi}\, d\xi\right) \tag{1.2}$$

Здесь $F(l)$ зависит от распределения давлений по поперечному сечению полосы, в которой прилагаются давления. Система давлений может, таким образом, быть представлена в виде

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4} \int_{-\infty}^{\infty} F(l)\, e^{i(nkx - ly - n\sigma t)}\, dl + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4} \int_{-\infty}^{\infty} F(l)\, e^{-i(nkx + ly - n\sigma t)}\, dl \tag{1.3}$$

Потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$ отыскиваемого волнового движения жидкости будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и кинематическому условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.4}$$

где $\zeta(x, y, t)$ — возвышение жидкости, которое находится, как обычно, из интеграла Коши—Лагранжа

$$\zeta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{z=0} - \frac{p(x, y, t)}{\rho g} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.4) и (1.5) дают условие

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.6}$$

Для однозначного определения решения следует принять также, что из бесконечности излучения нет и поэтому при $|y| > h$ могут существовать лишь волны, уходящие в бесконечность. Решение уравнения Лапласа отыскиваем в виде

$$
\begin{aligned}
\varphi = & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(l)\, e^{i(nkx-ly-n\sigma t)+\sqrt{l^2+k^2n^2}z}\, dl + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(l)\, e^{-i(nkx+ly-n\sigma t)+\sqrt{l^2+k^2n^2}z} dl
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Коэффициенты $A_n(l)$ и $B_n(l)$ находим из граничного условия (1.6). После вычисления этих коэффициентов получаем

$$
\begin{aligned}
\varphi = & -\frac{i\sigma}{4\rho g}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} na_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l)}{\sqrt{l^2+k^2n^2}-\sigma^2n^2/g}\, e^{i(nkx-ly-n\sigma t)+\sqrt{l^2+k^2n^2}z}\, dl - \right.\\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} na_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l)}{\sqrt{l^2+k^2n^2}-\sigma^2n^2/g}\, e^{-i(nkx+ly-n\sigma t)+\sqrt{l^2+k^2n^2}z}\, dl\right\}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Откуда для возвышения ζ согласно (1.5) имеем

$$
\begin{aligned}
\zeta = & -\frac{\sigma^2}{4\rho g^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^2a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l)}{\sqrt{l^2+k^2n^2}-\sigma^2n^2/g}\, e^{i(nkx-ly-n\sigma t)}\, dl + \right.\\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n^2a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l)}{\sqrt{l^2+k^2n^2}-\sigma^2n^2/g}\, e^{-i(nkx+ly-n\sigma t)}\, dl\right\} - \frac{p(x,y,t)}{\rho g}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Для большей наглядности дальнейшие вычисления будем проводить лишь для первых слагаемых сумм, что соответствует заданию системы давлений в виде первого слагаемого в (1.1), а также в предположении, что вдоль поперечного сечения полосы $|y| < h$ давления сохраняют постоянную величину P и, таким образом,

$$
F(l) = \frac{2P}{\pi}\frac{\sin lh}{l}
$$

Однако все результаты без труда переносятся на остальные слагаемые сумм и на более общие случаи зависимости $P(y)$.

Обозначим через ζ_1 возвышение, соответствующее первым слагаемым сумм, тогда

$$
\zeta_1 = -\frac{P\sigma^2ha_1}{2\pi\rho g^2}\left\{e^{i(kx-\sigma t)}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,d\lambda + e^{-i(kx-\sigma t)}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,d\lambda\right\} - \frac{p(x,y,t)}{\rho g} \tag{1.10}
$$

Здесь

$$
\Phi(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda(\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}-\sigma^2h/g)}\, e^{-i\eta\lambda} \qquad \left(\eta = \frac{y}{h}\right)
$$

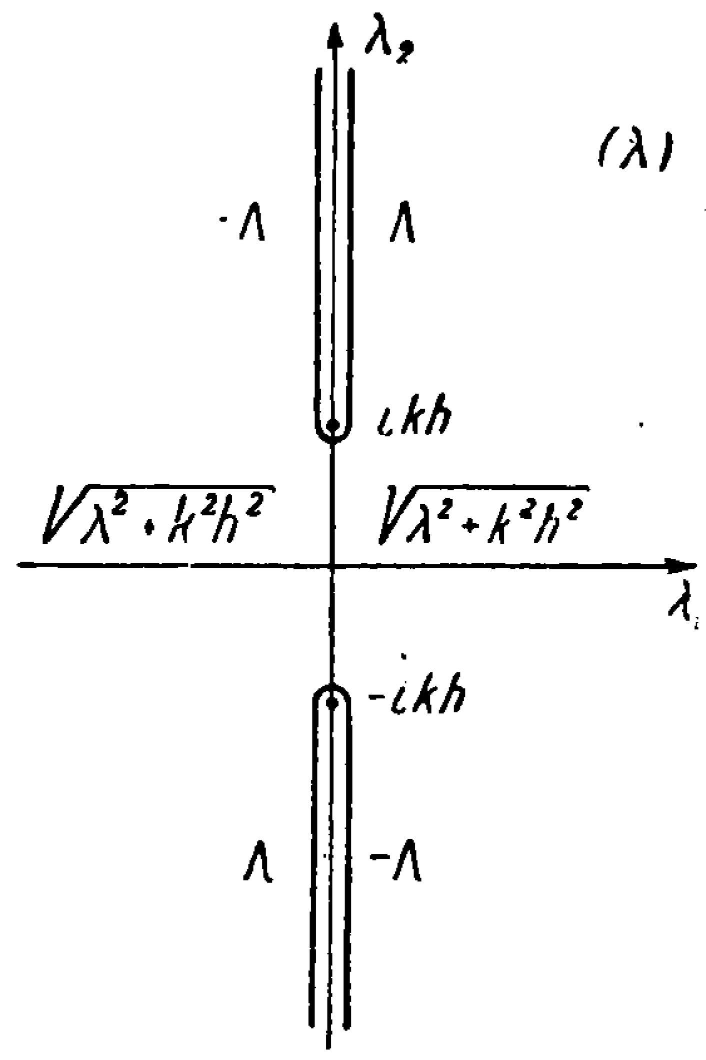
Рассмотрим случай, когда $\sigma^2 > gk$. Для однозначного определения интегралов проведем на плоскости комплексного переменного λ разрезы от точек ветвления $\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}$ до бесконечности вдоль мнимой оси и определим знаки корня согласно схеме на фиг. 1, где $\Lambda = i\sqrt{-(\lambda^2+k^2h^2)}$.

В рассматриваемом случае подинтегральная функция имеет полюсы в точках

$$
\lambda_1 = \pm h\sqrt{\frac{\sigma^4}{g^2} - k^2}
$$

Интегрирование будем вести по действительной оси, обходя в первом интеграле отрицательный полюс сверху, а положительный снизу. Во втором интеграле будем обходить отрицательный полюс снизу, а положительный сверху. При таком выборе путей интегрирования, как убедимся впоследствии, не будет излучения из бесконечности. Заменим теперь интегрирование по действительной оси интегрированием по пути $ABCDE$ (фиг. 2), это позволит легко оценить интегралы в выражении (1.10). Действительно, интегралы по дугам AB и DE бесконечно больших радиусов будут содержать множители, затухающие по экспоненциальному закону, и поэтому обращаются в нуль, а следовательно,

$$\int\limits_{AOE} \Phi(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{BCD} \Phi(\lambda)\, d\lambda - 2\pi i \sum \mathrm{res}$$



Фиг. 1

Причем в первом интеграле в (1.10) вычет следует взять для точки $\lambda_1 < 0$, а во втором для точки $\lambda_1 > 0$.

Произведя вычисление вычетов, а также преобразуя интеграл по пути BCD, будем иметь

$$\zeta_1 = \frac{2Pa_1\sigma^4 \sin h\sqrt{\sigma^4/g^2 - k^2}}{\rho g^3 (\sigma^4/g^2 - k^2)} \sin\left(kx + y\sqrt{\sigma^4/g^2 - k^2} - \sigma t\right) -$$

$$- \frac{2Pa_1\sigma^2 h}{\pi\rho g^2} \cos(kx - \sigma t) \int\limits_{kh}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi} \frac{\sqrt{\xi^2 - k^2h^2}}{\sigma^4h^2/g^2 + \xi^2 - k^2h^2} e^{-\eta\xi}\, d\xi - \frac{p(x, y, t)}{\rho g} \qquad (1.11)$$

При больших η интеграл в выражении (1.11) может быть опущен, так как порядок его малости выше, чем $\eta^{-1}\exp(-\eta kh)$, в чем легко убедиться, находя асимптотическое значение интеграла методом интегрирования по частям.

С ростом η этот интеграл убывает по экспоненциальному закону, и поэтому асимптотическое выражение с сохранением лишь первого слагаемого в (1.11) вступает в силу уже при сравнительно небольших η. Третье слагаемое обращается в нуль вне полосы $|y| < h$.

В случае $\sigma^2 < gk$ полюсы подинтегральной функции лежат на мнимой оси. Вычисления, проводимые по той же схеме, как и ранее, в этом случае приводят к результату

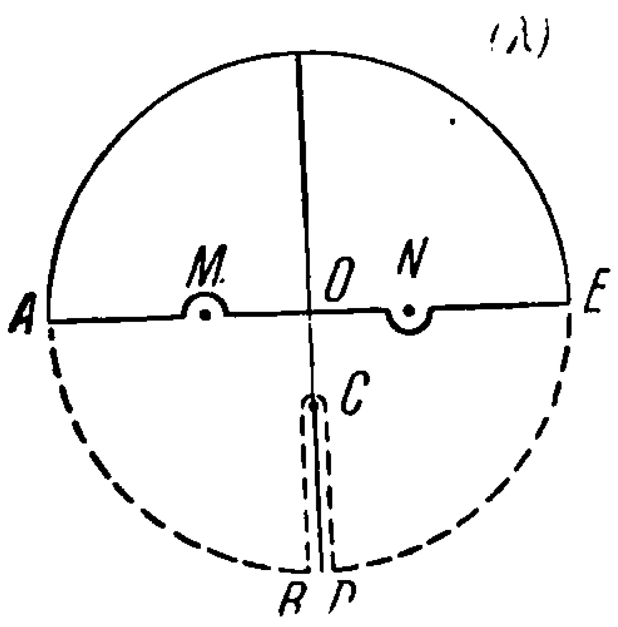
$$\zeta_1 = -\frac{2Pa_1\sigma^4 \operatorname{sh} h\sqrt{k^2 - \sigma^4/g^2}}{\rho g^3 (k^2 - \sigma^4/g^2)} \exp\left[-\eta h\sqrt{k^2 - \sigma^4/g^2}\right] \cos(kx - \sigma t) -$$

$$- \frac{2Pa_1\sigma^2 h}{\pi\rho g^2} \cos(kx - \sigma t) \int\limits_{kh}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi} \frac{\sqrt{k^2h^2 - \xi^2}}{k^2h^2 - \xi^2 - \sigma^4h^2/g^2} e^{-\eta\xi}\, d\xi - \frac{p(x, y, t)}{\rho g} \qquad (1.12)$$

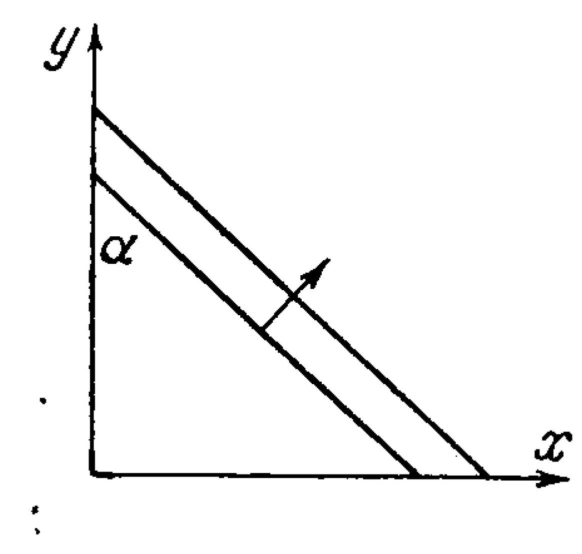
При больших η второе слагаемое этого выражения имеет порядок малости выше $\eta^{-1}\exp[-\eta kh]$, а следовательно, и в этом случае оно мало по сравнению с первым слагаемым. Поэтому в асимптотическом выражении оно может быть также опущено.

Проведем анализ полученных результатов. Мы рассматриваем тот случай, когда давления, приложенные в полосе $|y| < h$, имеют эпюру, которая в плоскости $y = C$ представляет собой косинусоиду.

Зададимся некоторой скоростью перемещения давлений; тогда если длина волны приложенных давлений $\lambda < 2\pi c^2/g$, то от полосы будут отходить волны, угол падения которых α (фиг. 3) определяется равенствами



Фиг. 2



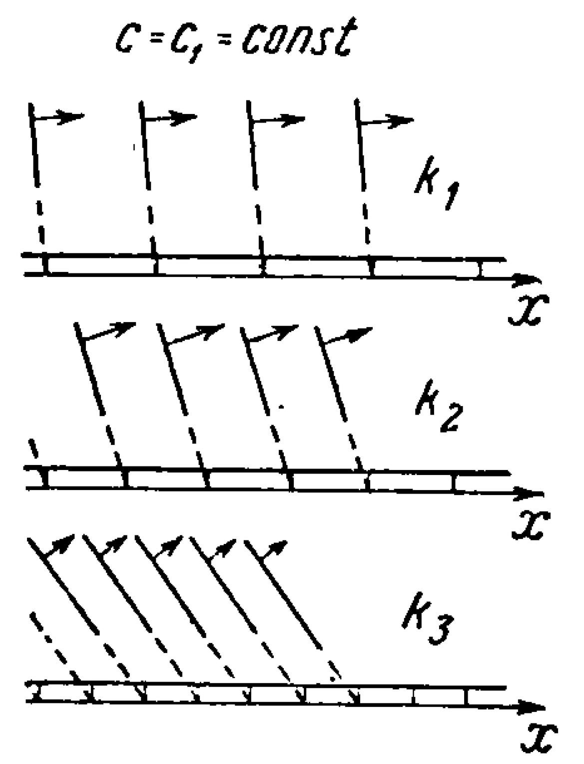
Фиг. 3

$$\cos\alpha = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{g^2\lambda^2}{4\pi^2 c^4}}$$

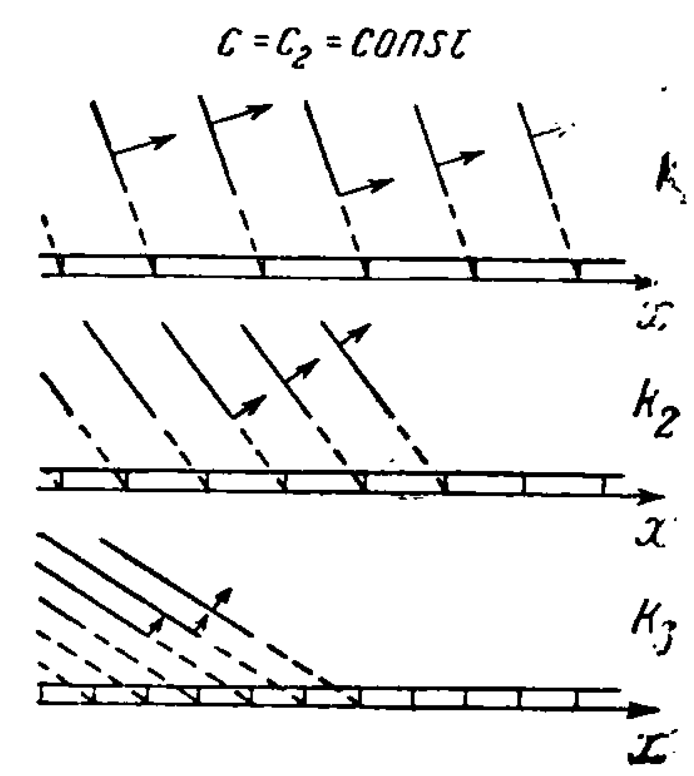
С увеличением длины волны этот угол будет приближаться к нулю — фронты волн будут перемещаться в направлениях, образующих все меньший угол с направлением перемещения давлений. Если длина волны прикладываемых давлений настолько велика, что $\lambda > 2\pi c^2/g$, то от полосы волны отходить не будут. Гребни волн будут теперь перпендикулярны оси x, а их амплитуда с удалением от оси x будет затухать по экспоненциальному закону.

Если, наоборот, считать заданной длину волны прикладываемых давлений, то при больших скоростях, таких, что $c^2 > g\lambda/2\pi$, от полосы будут отходить волны.

При меньших скоростях от полосы волны отходить не будут.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 и 5 схематически изображены волны, образующиеся в случае трех различных длин волн прикладываемых давлений ($k_3 > k_2 > k_1$); при этом скорости перемещения этих давлений — c_1 на фиг. 4, c_2 на фиг. 5 и $c_2 > c_1$.

Особый случай получается при

$$h\sqrt{\frac{\sigma^4}{g^2} - k^2} = m\pi \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

когда благодаря интерференции от полосы не отходят волны даже при выполнении условий $\sigma^2 > gk$.

Пользуясь проведенным исследованием, можно изучить и волны, возникающие на поверхности жидкости, когда периодическая система давлений, приложенных в полосе $|y| < h$, не перемещается, а лишь меняется во времени. В этом случае давление задается в виде $p = a_1 P(y)\cos kx \cos \sigma t$.

Заменив произведение косинусов их суммой, заметим, что решение задачи может быть построено в виде двух систем волн, возникающих от давлений, перемещающихся во встречных направлениях.

При $\sigma^2 > gk$ главные слагаемые возвышения будут

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{Pa_1\sigma^4 \sin h\sqrt{\sigma^4/g^2 - k^2}}{\rho g^3(\sigma^4/g^2 - k^2)}\left[\sin\left(kx + y\sqrt{\frac{\sigma^4}{g^2} - k^2} - \sigma t\right) - \right.\\ &\left. - \sin\left(kx - y\sqrt{\frac{\sigma^4}{g^2} - k^2} + \sigma t\right)\right] = \qquad (1.13)\\ &= \frac{2Pa_1\sigma^4 \sin h\sqrt{\sigma^4/g^2 - k^2}}{\rho g^3(\sigma^4/g^2 - k^2)} \sin\left(y\sqrt{\frac{\sigma^4}{g^2} - k^2} - \sigma t\right)\cos kx\end{aligned}$$

при $\sigma^2 < gk$:

$$\zeta = -\frac{Pa_1\sigma^4 \operatorname{sh} h\sqrt{k^2 - \sigma^4/g^2}}{\rho g^3 (k^2 - \sigma^4/g^2)} \exp\left[-y\sqrt{k^2 - \frac{\sigma^4}{g^2}}\right] \cos kx \cos \sigma t \qquad (1.14)$$

В первом случае от полосы $|y| < h$ отходят волны, фронты которых параллельны оси x и имеют постоянные узлы в направлениях, перпендикулярных полосе. Во втором случае волны от полосы не отходят и наблюдается колебание поверхности жидкости, заметное лишь в незначительной окрестности полосы.

§ 2. Предположим теперь, что перемещающаяся периодическая система давлений, заданная в виде (1.1), приложена к поверхности жидкости глубины h. В этом случае следует найти решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию (1.6) на поверхности жидкости, а также условию $(\partial\varphi/\partial z)_{z=-h} = 0$ на дне бассейна. Это решение имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\rho g}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l)\operatorname{ch}\sqrt{l^2+k^2n^2}\,(z+h)\exp[i(nkx - ly - n\sigma t)]}{\sqrt{l^2+k^2n^2}\operatorname{sh} h\sqrt{l^2+k^2n^2} - (\sigma^2n^2/g)\operatorname{ch} h\sqrt{l^2+k^2n^2}}\,dl + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(l)\operatorname{ch}\sqrt{l^2+k^2n^2}\,(z+h)\exp[-i(nkx + ly - n\sigma t)]}{\sqrt{l^2+k^2n^2}\operatorname{sh} h\sqrt{l^2+k^2n^2} - (\sigma^2n^2/g)\operatorname{ch} h\sqrt{l^2+k^2n^2}}\,dl\right\} \qquad (2.1)$$

Исследование возвышения, порождаемого такой системой давлений, проведем также для случая, когда давление в полосе $|y| < h$ задается в виде $p(x, y, t) = Pa_1 \cos(kx - \sigma t)$; тогда

$$\zeta_1 = \frac{Pa_1}{2\pi\rho g^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\,\frac{\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\exp[i(kx-\sigma t) - i\lambda\eta]}{\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2} - (\sigma^2h/g)\operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}}\,d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\,\frac{\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\exp[-i(kx-\sigma t) - i\lambda\eta]}{\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2} - (\sigma^2h/g)\operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}}\,d\lambda\right\} - \frac{p(x, y, t)}{\rho g} \qquad (2.2)$$

Для отыскания полюсов подинтегрального выражения следует решить уравнение

$$\sqrt{\lambda^2+k^2h^2}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2} - \frac{\sigma^2h}{g}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda^2+k^2h^2} = 0 \qquad (2.3)$$

которое может быть сведено к виду

$$\operatorname{cth}\alpha = A\alpha \qquad (\alpha = \sqrt{\lambda^2+k^2h^2})$$

Это уравнение имеет обязательно два корня: $\alpha_1 = -\alpha_2$. Корень α_1 соответствует определенному значению λ, причем при $\sigma^2 < gk \operatorname{th} kh$ величина λ мнимая, а при $\sigma^2 > gk \operatorname{th} kh$ действительная.

Подинтегральные выражения в (2.2) содержат множители $\exp[-i\lambda\eta]$, поэтому при замене интегралов, взятых по действительной оси, интегралами по пути $ABCDE$ (фиг. 2), сложенными с соответствующими вычетами, в последних при $\sigma^2 < gk \operatorname{th} kh$ будет содержаться множитель, затухающий по экспоненциальному закону. Значит, в этом случае от полосы, в которой прилагаются давления, волны отходить не будут. Это имеет место, когда скорость перемещения давлений меньше скорости свободных волн, соответствующих данной глубине:

$$c^2 < \frac{g}{k}\operatorname{th} kh \qquad \text{или} \qquad \lambda > \frac{2\pi c^2}{g}\operatorname{cth} kh$$

т. е. длина волны косинусоиды, дающей эпюру давлений в плоскости $y = C$, при $|C| < h$ больше определенной величины, зависящей от скорости перемещения давлений. При $c^2 > (g/k)\,\mathrm{th}\,kh$ от полосы отходят волны, фронты которых образуют с направлением перемещения давлений тем больший угол, чем больше скорость перемещающихся давлений.

§ 3. Вычислим проекцию результирующей сил давления в прямоугольнике $0 < x < 2\pi/k$ и $-h < y < h$ на направление движения.

Примем $\cos\alpha = \partial\zeta/\partial x$, тогда

$$R = 2\int_0^{2\pi/k} dx \int_0^h p(x, y, t)\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,dy \tag{3.1}$$

Подставляя в (3.1) возвышение ζ_1 из (1.11) и проводя интегрирование по x и y, получим для $\sigma^2 > gk$:

$$R = \frac{4\pi P^2 a_1^2 \sigma^4 \sin^2\left(h\sqrt{\sigma^4/g^2 - k^2}\right)}{\rho g^3 \sqrt{(\sigma^4/g^2 - k^2)^3}} \tag{3.2}$$

В этом случае работа сил давления затрачивается на создание волн, расходящихся от полосы $|y| < h$. При $\sigma^2 < gk$ в (3.1) следует подставить выражение ζ_1 из (1.12). В этом случае при интегрировании все слагаемые обращаются в нуль и, таким образом, результирующая сил давления $R = 0$. Расходящихся от полосы волн теперь не существует, а следовательно, на поддержание движения не затрачивается энергии.

Не приводя громоздких вычислений, отметим в заключение, что анализ выражения (1.9), подобный проведенному в § 1 лишь для первых слагаемых сумм, приводит в общем случае к значению возвышения ζ в виде

$$\begin{aligned}\zeta = {} & \frac{\pi\sigma^4}{\rho g^3}\sum_{n=N}^{\infty} n^3 a_n \frac{F(n\sqrt{\chi})}{\sqrt{\chi}}\sin n\left(kx + y\sqrt{\chi} - \sigma t\right) - \\ & - \frac{\pi\sigma^4}{\rho g^3}\sum_{n=1}^{N} n^3 a_n \frac{F(-in\sqrt{-\chi})}{\sqrt{-\chi}}\cos n\,(kx - \sigma t)\, e^{-ny\sqrt{-\chi}} - \\ & - \frac{\sigma^2}{\rho g^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \cos n\,(kx - \sigma t)\int_{kh}^{\infty}\frac{F(i\xi)\sqrt{\xi^2 - k^2 n^2}}{\sigma^4 n^2/g^2 + \xi^2 - k^2 n^2}\,d\xi\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\chi = \frac{\sigma^4 n^2}{g^2} - k^2, \qquad N - 1 < \frac{gk}{\sigma^2} < N \tag{3.4}$$

Откуда результирующая сил давления после аналогичных вычислений по формуле (3.1) при $P(y) = P$ в полосе $|y| < h$ получается в виде

$$R = \frac{4\pi\sigma^4 P^2}{\rho g^3}\sum_{n=N}^{\infty} n^3 a_n^2 \frac{\sin^2(nh\sqrt{\chi})}{\sqrt{\chi^3}} \tag{3.5}$$

В этом выражении сохраняются лишь слагаемые, соответствующие системам волн, расходящихся от полосы.

Автор приносит глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Поступила 1 I 1956

Морской гидрофизический институт
АН СССР