Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ТЕЧЕНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ НАД ВОЛНИСТЫМ ДНОМ

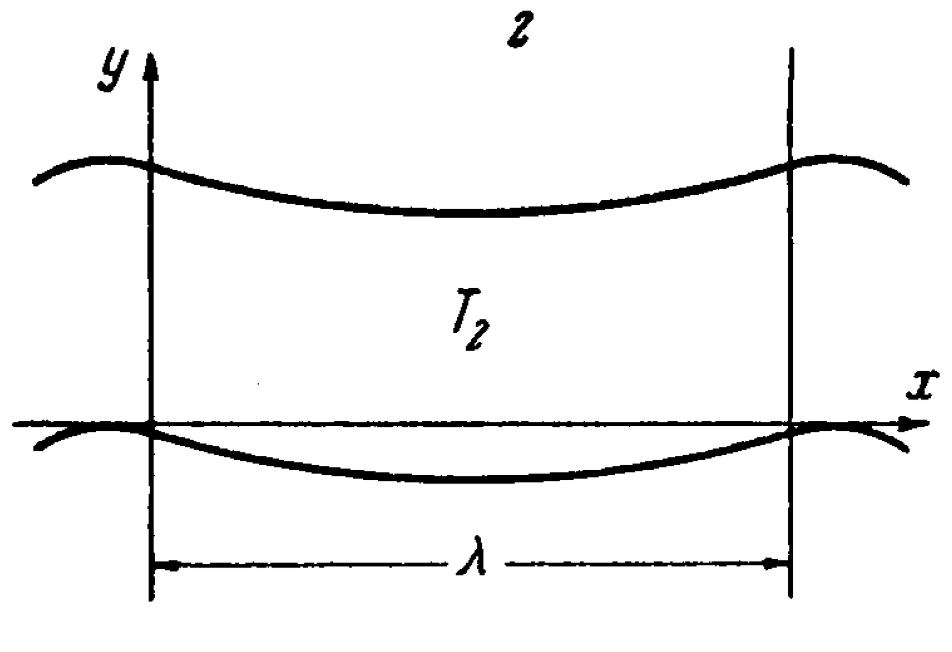
Н. Н. Моисеев

(Москва)

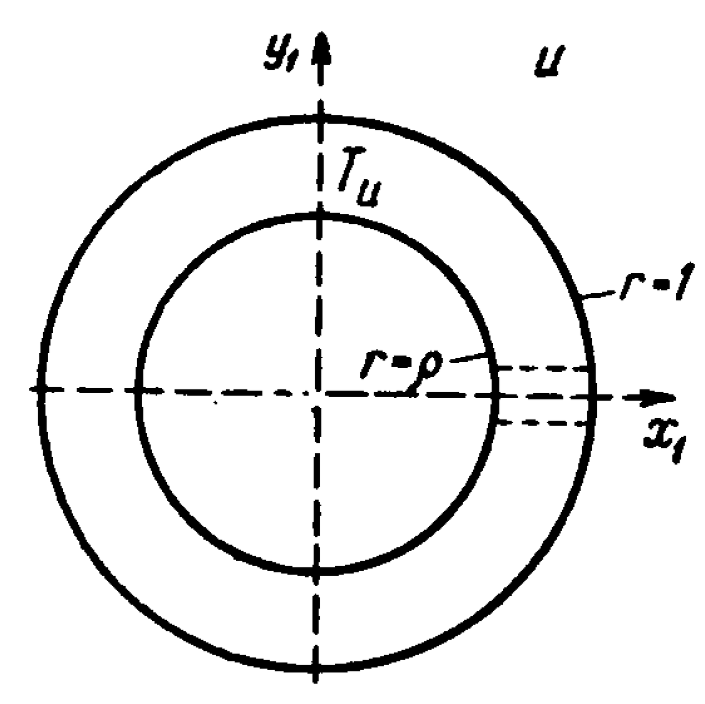
В своей работе А. И. Некрасов [1], используя редукцию к нелинейному интегральному уравнению, впервые дал точное решение задачи о возможных формах равновесия свободной поверхности плоского потенциального потока тяжелой жидкости. Вначале им был изучен случай жидкости бесконечной глубины, а в дальнейшем случай, когда поток ограничен гладким горизонтальным дном. Изучением той же задачи при условии, что дно неровное, занимался ряд авторов. Случай, когда уравнение линии дна $y = L_0(x)$ — периодическая функция (волнистое дно), наиболее подробно изучен в работах Понсена [7] и Жербе [6]. В работе Понсена [7] задача сведена к некоторой системе интегро-дифференциальных уравнений. Для достаточно больших значений скорости потока построено эффективное решение, близкое к линейному, и доказана его единственность. Жербе [6] исследовал ту же задачу «в большом», пользуясь топологическими методами Лерея и Шаудера. Им доказано существование и единственность возможных форм равновесия свободной поверхности для достаточно больших значений скоростей потока и существование решения для достаточно малых значений скорости. Эффективного решения методы Жербе не дают.

В предлагаемой работе решается та же задача. Используя редукцию к интегральным уравнениям, методами Ляпунова—Шмидта эффективно строятся решения, которые дают полное исследование решений, обладающих малой нормой, для любых значений скорости потока. Изучены условия неединственности.

1. Рассмотрим задачу о возможных формах равновесия свободной поверхности установившегося потока тяжелой жидкости, ограниченного дном, ордината которого является периодической функцией x (фиг. 1) и



Фиг. 1



Фиг. 2

обладает симметрией относительно двух вертикальных прямых, проведенных через вершину волны и середину впадины.

В качестве параметров, определяющих течение, возьмем параметры А. И. Некрасова[1], среднее значение горизонтальной скорости c при $y = 0$ и расход Q, или среднюю глубину $h = Q / c$; обозначим

$$dw / dz = e^{-\omega(u)} \tag{1}$$

---

[1] Можно определять течение жидкости и другими параметрами (см., например, [6]).

где w — комплексный потенциал, $u(z)$ — функция, отображающая область T_z на кольцо с разрезом T_u (фиг. 2), так что точке $z=0$ соответствует точка $u=1$. Положим

$$w(u) = -\frac{i\varphi_0}{2\pi}\ln u$$

где $\varphi_0 = \lambda c$. Тогда радиус внешней окружности (образ дна) равен единице, а радиус внутренней (образ свободной поверхности) равен ρ:

$$\rho = \exp\left\{-Q\frac{2\pi}{\lambda c}\right\} = \exp\left\{\frac{2\pi h}{\lambda}\right\}$$

где λ — длина волны. Если функция $\omega(u)$ определена, то параметры течения могут быть найдены квадратурами.

В самом деле, на основании (1) и пользуясь выражением для $w(u)$, получим

$$dz = -\frac{i\varphi_0}{2\pi u}e^{\omega(u)}\,du, \qquad \text{или} \qquad z = -\frac{i\varphi_0}{2\pi}\int\limits_{c_1}^{u}\frac{\exp\omega(u)}{u}\,du$$

где постоянная c_1 в силу соответствия $u(0)=1$ равна единице.

Разделяя действительную и мнимую части, мы получим уравнение свободной поверхности в параметрической форме:

$$x = \frac{\varphi_0}{2\pi}\int\limits_0^{\vartheta}e^{\psi(\theta)}\cos\Phi(\theta)\,d\theta, \qquad y = \frac{\varphi_0}{2\pi}\int\limits_0^{\vartheta}e^{\chi(\psi)}\sin\Phi(\theta)\,d\theta$$

где $\omega(u) = \psi + i\Phi$, $u = re^{i\vartheta}$, $r=\rho$.

Вдоль свободной поверхности должен иметь место интеграл Бернулли $e^{-2\psi}+2gy=0$, а вдоль дна условие, что функция $\Phi = \arg d\overline{w}/dz$ есть заданная функция координаты x.

Переходя к переменному $u = re^{i\theta}$, найдем, что функция $\omega(u)$ определяется следующими граничными условиями:

$$t^\circ(\vartheta) = \operatorname{arc\,tg}\nu\chi\left(\frac{\lambda c}{2\pi}\int\limits_0^{\vartheta}e^{f^\circ(\theta)}\cos t^\circ(\theta)\,d\theta\right) \tag{2}$$

$$2e^{-3f^*(\vartheta)}\frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{g\lambda c}{\pi}\sin t^*(\vartheta) \qquad (u = re^{i\vartheta})$$

где

$$\lim \operatorname{Re}\omega = f^\circ, \qquad \lim \operatorname{Im}\omega = t^\circ \qquad \text{при } r\to 1$$

$$\lim \operatorname{Re}\omega = f^*, \qquad \lim \operatorname{Im}\omega = t^* \qquad \text{при } r\to \rho$$

Величина $\nu\chi(x)$ характеризует наклон касательной к линии дна.

Первое из этих условий есть условие обтекания, второе условие — это условие постоянства давления на свободной поверхности. Четыре величины f°, f^*, t° и t^* связаны, кроме того, двумя соотношениями, которые можно получить, используя интегралы Вилля [2]. Если ввести обозначения $\xi = df^*/d\vartheta$ и $t = t^\circ$, то задача сводится к системе интегральных уравнений относительно ξ и t:

$$\xi(\vartheta) = \mu\sin\left(\int\limits_0^{2\pi}[\xi(\theta)K(\theta,\vartheta) + t(\theta)K_1(\theta,\vartheta)]\,d\theta\right)\exp 3\int\limits_0^{\vartheta}\xi(\theta)\,d\theta \tag{3}$$

$$t(\vartheta) = \operatorname{arc\,tg}\nu\chi\left(\frac{\lambda c}{2\pi}\int\limits_0^{\vartheta}e^{A(\xi,t)}\cos t(\theta)\,d\theta\right) \tag{4}$$

где A — некоторый линейный интегральный оператор

$$K = \sum_n \frac{\sin n\theta \sin n\vartheta}{\pi\mu_n}, \qquad K_1 = \sum_n \frac{\sin n\theta \sin\theta}{\pi\lambda_n} \qquad \begin{pmatrix} \mu_n \to \infty \\ \lambda_n \to \infty \end{pmatrix}$$

Функционал

$$\mu(\xi, t) = \frac{4\pi^2 g\lambda}{c^2}\left\{\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2}{\pi}\sum \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n\vartheta \left[\frac{\xi(\theta)}{n(\rho^{-n}+\rho^n)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{2\rho^n t(\theta)}{\rho^{-2n}-\rho^{2n}}\right] d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta\xi(\theta)\, d\theta\right) d\vartheta\right\}^{-} \tag{5}$$

2. Задача Некрасова получается из нашей, если $\nu = 0$. Тогда $t \equiv 0$ и мы получаем одно уравнение:

$$\xi(\vartheta) = \mu \sin\int_5^{2\pi} \xi(\theta) K(\theta, \vartheta)\, d\theta \exp 3\int_0^{2\pi} \xi(\theta)\, d\theta = \mu H\xi \tag{6}$$

где H — вполне непрерывный оператор, а μ — функционал:

$$\mu(\xi) = \frac{g\lambda}{2\pi c^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2}{\pi}\sum\int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n\vartheta\, \frac{\xi(\theta)\, d\theta}{n(\rho^{-n}+\rho^n)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta\xi(\theta)\, d\theta\right) d\vartheta\right\}^{-3}$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению А. И. Некрасова. А. И. Некрасов доказал, что функция $\xi(\vartheta)$ может быть представлена в виде ряда, расположенного по степеням параметра $\mu - \mu_n$ в окрестности точек $\mu = \mu_n$. Так как μ в свою очередь зависит от ξ, то для изучения свойств потока необходимо подставить в полученное решение значение μ и тем или иным способом переразложить ряд по степеням некоторого нового параметра (например, амплитуды волны). Именно так поступил Л. Н. Сретенский в своей монографии [5], когда он выводил формулу Стокса из теории Некрасова.

Так как уравнение Некрасова (6) нами преобразовано так, что к нему применима общая теория нелинейных интегральных уравнений (см., например, [3]), то представляется целесообразным непосредственно применить общие методы Ляпунова—Шмидта. При этом существование решения с малой нормой в $C[0,2\pi]$ будет следовать из общих теорем и задача сведется к анализу коэффициентов уравнения бифуркации [1].

Подставим в (6) значение μ из (5′). Интегральное уравнение (6) примет вид:

$$\xi = \varkappa H_1 \xi \qquad (\varkappa = g\lambda / 2\pi c^2) \tag{7}$$

К уравнению (7) применима общая теория нелинейных интегральных уравнений [3]. Если $\varkappa \neq \mu_n$, где μ_n — собственные числа ядра K, то в достаточно малом шаре пространства $C[0,2\pi]$ существует только тривиальное решение (7).

[1] Разумеется, численные результаты теории А. И. Некрасова будут совпадать с результатами, полученными предлагаемым образом.

Рассмотрим вначале линейное уравнение

$$\xi = \varkappa \int_0^{2\pi} K(\theta, \vartheta)\,\xi(\theta)\,d\theta$$

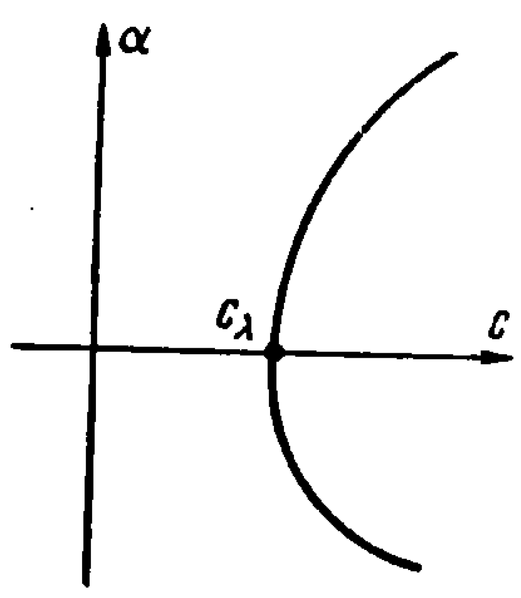
Ядро K имеет простые собственные значения, следовательно, в силу принципа линеаризации, обоснованного для общего случая вполне непрерывных операторов М. А. Красносельским [4], бифуркационные значения параметра $\varkappa$ совпадают[1] со значениями μ_n.

Из неравенства $\varkappa = \mu_n$ следует

$$c_n^2 = \frac{g\lambda}{1\pi n} \operatorname{th} \frac{2\pi n Q}{\lambda c_n} = \frac{g\lambda}{2\pi n} \operatorname{th} \frac{2\pi n h}{\lambda} \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет единственное решение c_n, причем

$$c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > 0 \tag{9}$$



Фиг. 3

Решение, соответствующее c_n, имеет вид: $\xi_n = N \sin n\vartheta$. Оно описывает волновое движение периода $\lambda^* = \lambda / n$. Следовательно, формулу (8) можно переписать в виде

$$c^2 = \frac{g\lambda^*}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi Q}{\lambda^* c} = \frac{g\lambda^*}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda^*} \tag{8'}$$

Она определяет скорость распространения малых волн. В двух предельных случаях получаем известные выражения:

$$c = \sqrt{g\lambda / 2\pi} \quad \text{если } h \to \infty, \qquad c = \sqrt{gh} \quad \text{если } \lambda \to \infty$$

3. Для изучения бифуркационных решений используем метод Ляпунова [3]. Обозначим

$$\alpha_1 = \int_0^{2\pi} \xi \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\, d\theta, \qquad \varkappa' = \varkappa - \mu$$

На основании [3] уравнение (7) имеет решения, которые представимы в виде рядов, расположенных по степеням α и $\varkappa'$:

$$\xi = \alpha\xi_{10} + \varkappa'\xi_{01} + \alpha\varkappa'\xi_{11} + \alpha^2\xi_{20} + \ldots \tag{10}$$

Величины ξ_{ij} могут быть легко вычислены:

$$\xi_{10} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}, \qquad \xi_{01} = 0, \qquad \xi_{11} = \frac{\sin\theta}{\mu_1\sqrt{\pi}}, \qquad \xi_{20} = b_{20}\sin 2\theta \quad \text{и т. д.}$$

где b_{ij} — постоянные. Следовательно, уравнение бифуркации имеет вид:

$$\frac{\varkappa'}{\mu'} + d\alpha^2 + \ldots = 0 \qquad (d > 0)$$

Отсюда находим

$$\alpha = c^{-1} d^{1/2} \left(c^2 - \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{1/2} + \ldots \tag{11}$$

Графически этот результат можно представить на чертеже (фиг. 3).

Итак, доказана теорема: какова бы ни была длина волны λ, всегда можно указать такое число c_λ, что, коль скоро $c < c_\lambda$, на поверхности

---

[1] В данном случае этот же вывод может быть сделан из общей теории Ляпунова—Шмидта.

жидкости не может существовать волна длины λ. Решение (11) позволяет определить все свойства потока.

4. Рассмотрим теперь общую задачу. Пользуясь общим методом Ляпунова—Шмидта, построим решения системы уравнений (3)—(4), обладающие малой нормой (при малом ν)[1]. Для их практического определения разрешим уравнение (4) относительно t и, подставив в (3), получим одно уравнение вида

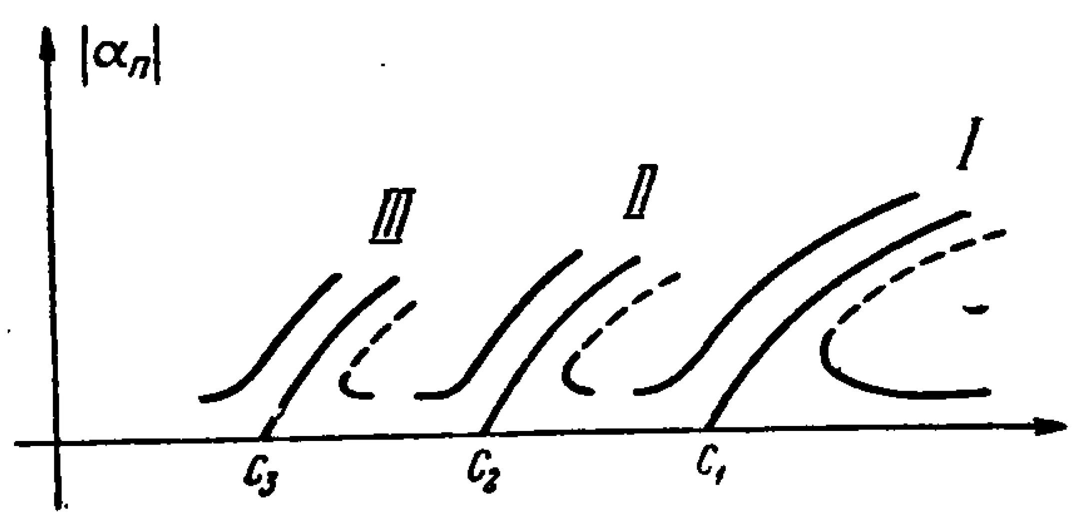
$$\xi \equiv \varkappa(c) H_2(\xi, \nu) \tag{12}$$

Причем $\xi \equiv 0$ не есть решение (12).

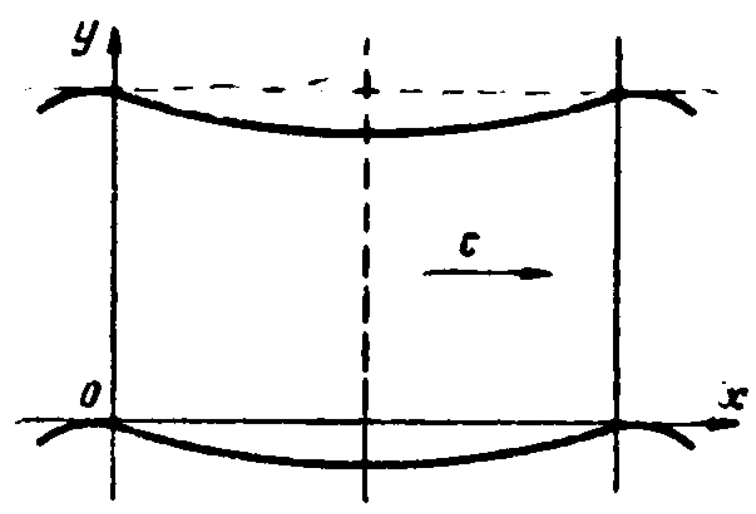
Если $c \neq c_n$ [см. формулу (9)], то в достаточно малом шаре пространства $c[0,2\pi]$ и при достаточно малом ν существует только одно решение (12), причем

$$\lim \xi(\vartheta, \nu) \to 0 \quad \text{при } \nu \to 0$$

Для того чтобы получить о нем качественно правильное представление, нам достаточно найти его первые (линейные) приближения.



Фиг. 4



Фиг. 5

После линеаризации уравнение (12) примет следующий вид:

$$\xi(\vartheta) = \varkappa \int_0^{2\pi} K(\theta, \vartheta)\, \xi(\theta)\, d\theta + \nu\varkappa \int_0^{2\pi} K_1(\theta, \vartheta)\, \chi\left(\frac{\lambda c}{2\pi}\theta\right) d\theta$$

Обозначая

$$\int_0^{2\pi} K_1(\theta, \vartheta)\, \chi\left(\frac{\lambda c}{2\pi}\theta\right) d\theta = \sum a_n \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}$$

получим

$$\xi(\vartheta) = -\nu \sum \frac{\varkappa\mu_n}{\varkappa - \mu_n} a_n \sin n\theta$$

Для определения решения $\xi(\vartheta)$ в окрестности точки $\varkappa = \mu_n$ необходимо составить уравнение бифуркации

$$\alpha_n = f(\varkappa - \mu_n, \nu) \qquad \left(\alpha_n = \int_0^{2\pi} \xi(\theta) \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}\, d\theta\right) \tag{13}$$

---

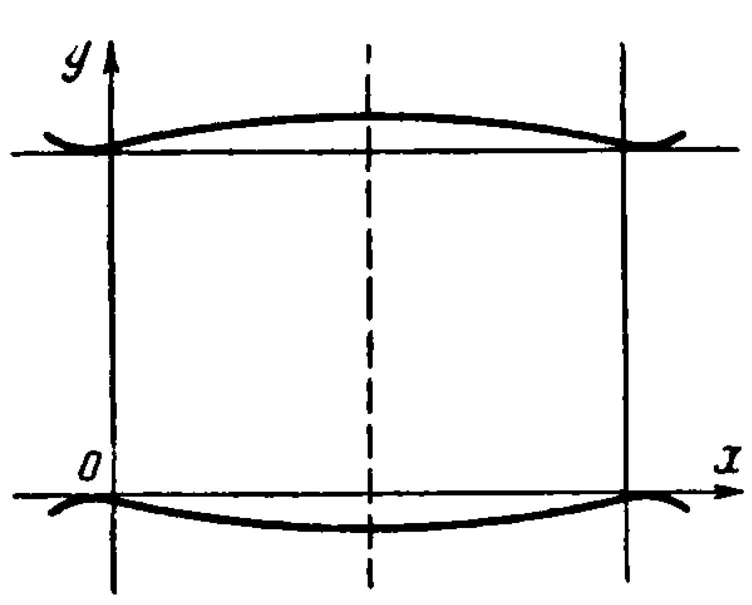
[1] Когда статья уже находилась в печати, вышла работа Л. А. Красносельского [8]. В ней предлагается метод исследования поведения решений в окрестности точки ветвления, основанный на оценке знака некоторых функционалов. Этот метод может быть использован и в рассматриваемом случае, что позволит снять ряд ограничений, используемых в работе.

Если $\varkappa = \mu_n$, то оно имеет вид:

$$\alpha_n^3 = a_1\alpha_n^2\nu + a_2\nu^2 + f(\nu) + \ldots = 0 \tag{14}$$

т. е. члены второго порядка, содержащего α^2, отсутствуют. Далее оказывается, что если ν достаточно мало, то дискриминант уравнения (14) положителен. Это значит, что уравнение (14) имеет только одно действительное решение.

Результаты можно представить графически (фиг. 4). Фиг. 4 показывает существование известной аналогии между нелинейными движениями жидкости над неровным дном и нелинейными колебаниями системы с одной степенью свободы: кривые I описывают «главный» резонанс, кривые II, $III, \ldots$ соответственно резонанс 2-го, 3-го, ... порядков.



Фиг. 6

Найденное решение позволяет изучить форму свободной поверхности. Ее схематический вид изображен на фиг. 5, 6.

Свободная поверхность будет иметь ту или другую форму в зависимости от значений скорости c.

Если $c_{2n+1} < c < c_{2n}$, где c_m — бифуркационное значение скорости, то имеет место первая форма (фиг. 5). Если $c_{2n} < c < c_{2n-1}$, то будет иметь место вторая форма (фиг. 6). Если $c > c_1$, то всегда имеет место первая форма равновесия. Таким образом, вторая форма может иметь место для сравнительно медленных движений. В случае мелкой воды, например, это может иметь место, если $c < \sqrt{gh}$.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю признательность Я. И. Секерж-Зеньковичу и М. А. Красносельскому, принявшим участие в обсуждении работы и сделавшим в ходе дискуссии ряд замечаний, использованных автором при редактировании статьи.

Поступила 25 VII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Изд. АН СССР, М., 1951.
2. Villat H. Sur l'éeoulement des fluides. Ann. Ec. Norm. Sup., t. 32, 1915.
3. Lichtenstein L. Vorlesungen über einige Klassen Integral und Integrodifferentialgleichungen. Berlin, 1931.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, 1956.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1935.
6. Gerber H. Sur les solutions exact des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. Jour. math., pure et appl., t. 34, 1955.
7. Ponsin H. Recherches sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical. Publ. scientifiques du ministére de l'air, 16, 1932.
8. Красносельский М. А. Об уравнении Некрасова в теории волн. ДАН СССР, т. 10963.