ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, ИМЕЮЩЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Л. Л. Сабсович

(Москва)

При решении ряда задач, связанных с уравнением Матье, приходится прибегать к вычислению бесконечных определителей.

Так, при определении характеристических чисел уравнения Матье[1] (стр. 83):

$$y'' + (\lambda - 2q\cos 2x)\, y = 0 \tag{0.1}$$

вычисляется бесконечный определитель $\Delta(0)$ со следующими не равными нулю элементами c_{ij}

$$c_{ii} = 1, \qquad c_{i,\,i-1} = c_{i,\,i+1} = \frac{-q}{\lambda - 4i^2} \qquad (-\infty < i < +\infty) \tag{0.2}$$

Вычисление этого определителя проводится обычно для малых значений q, ограничиваясь [1] (стр. 85) и [2] (стр. 24) членами порядка q^2 или членами [3] (стр. 551) порядка q^4.

Аналогичные определители встречаются и в задаче об определении частного решения неоднородного уравнения Матье с периодической правой частью, частота которой кратна частоте периодического коэффициента. При решении этой задачи, поставленной и численно решенной для некоторых частных случаев Котовской [4] (стр. 221), появляются полубесконечные определители D. В указанной работе для частных значений λ и q они приближенно заменялись определителями четвертого или пятого порядка. При принятых значениях λ и q и сравнительно небольшой точности это давало удовлетворительный результат, но с увеличением q и повышением точности порядок определителей возрастает.

Ниже излагается простой способ вычисления полубесконечных определителей D с любой степенью точности, применимый при произвольном значении q. Определитель $\Delta(0)$ выражается через определители D.

n° 1. Некоторые свойства полубесконечных определителей *D*. Рассмотрим определители порядка k следующего вида:

$$D_s^k = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_s & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \gamma_{s+1} & 1 & \gamma_{s+1} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{s+1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \gamma_{s+k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma_{s+k-1} & 1 \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

элементы которого γ_p образуют для $p = s,\ s+1, \ldots$ абсолютно сходящийся ряд. При $k \to \infty$ получаем [5] (§ 73) полубесконечный нормальный определитель $D_s = \lim D_s^k$ при $k \to \infty$.

Разлагая определитель (1.1) по первой строке, по последней строке и по одной из строк, содержащей γ_{s+i} $1 \leqslant i \leqslant k-2$, получаем

$$D_s^k = D_{s+1}^{k-1} - \gamma_s\gamma_{s+1} D_{s+2}^{k-2} \tag{1.2}$$

$$D_s^k = D_s^{k-1} - \gamma_{k+s-2}\, \gamma_{k+s-1} D_s^{k-2} \tag{1.3}$$

$$D_s^k = -\gamma_{s+i-i}\gamma_{s+i} D_s^{i-1} D_{s+i+1}^{k-i-1} + D_s^{\,i} D_{s+i+1}^{k-i-1} - \gamma_{s+i}\gamma_{s+i+1} D_s^{\,i} D_{s+i+2}^{k-i-2} \tag{1.4}$$

Устремляя $k \to \infty$, из (1.2) и (1.4) получаем [5] (§ 74) разложения

$$D_s = D_{s+1} - \gamma_s\gamma_{s+1} D_{s+2} \tag{1.5}$$

$$D_s = -\gamma_{s+i-1}\gamma_{s+i} D_s^{i-1} D_{s+i+1} + D_s^i\, D_{s+i+1} - \gamma_{s+i}\gamma_{i+i+1} D_s^{\,i} D_{s+i+2} \tag{1.6}$$

Наконец, разлагая определитель (1.1) по правилу Лапласа по верхним t строкам, получим соотношение

$$D_s^k = D_s^t D_{s+t}^{k-t} - \gamma_{s+t-1}\gamma_{s+t} D_s^{t-1} D_{s+t+1}^{k-t-1} \tag{1.7}$$

а при $k \to \infty$

$$D_s = D_s^t D_{s+t} - \gamma_{s+t-1}\gamma_{s+t} D_s^{t-1} D_{s+t+1} \tag{1.8}$$

При помощи простых рассуждений можно получить удобное выражение для оценки и вычисления определителя D_s. Для этого покажем, что любое отличное от нуля слагаемое определителя (1.1) состоит из произведений пар $\gamma_p\gamma_{p+1}$. В самом деле, отличными от нуля элементами определителя (1.1) являются c_{ii} $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $c_{i,\,i-1}$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$, $c_{i,\,i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$. Если слагаемое определителя содержит элемент $c_{i,\,i+1} = \gamma_{s+1-i}$ и не содержит $c_{i+1,\,i} = \gamma_{s+i}$, то из i-го столбца может войти только член $c_{i-1,\,i}$ Тогда из $(i-1)$-го столбца сможет войти только элемент $c_{i-2,\,i-1}$, так как i-я и $(i-1)$-я строки уже использованы. Продолжая рассуждения (или воспользовавшись методом индукции), дойдем до элемента $c_{1,2}$. Но тогда из первого столбца нельзя будет выбрать ненулевой элемент, так как первая и вторая строки уже использованы, и это слагаемое окажется равным нулю. Наше утверждение доказано.

Составляя всевозможные допустимые комбинации таких пар, получим выражение для определителя D_s^k:

$$D_s^k = 1 - \sum_{i=s}^{s+k-2} \gamma_i\gamma_{i+1} + \sum_{i=s}^{s+k-4} \gamma_i\gamma_{i+1} \sum_{j=i+2}^{s+k-2} \gamma_j\gamma_{j+1} - \ldots \tag{1.9}$$

В пределе при $k \to \infty$ для D_s получается бесконечный ряд

$$D_s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_s^{(n)} \tag{1.10}$$

где n-кратная сумма $B_s^{(n)}$ имеет вид:

$$B_s^{(1)} = \sum_{i=s}^{\infty} \gamma_i\gamma_{i+1}, \qquad B_s^{(n)} = \sum_{i=}^{\infty} \gamma_i\gamma_{i+1} B_{i+2}^{(n-1)} \tag{1.11}$$

Сходимость рядов (1.10) и (1.11) рассмотрена в следующем пункте.

n° 2. Оценка сумм $B_s^{(n)}$. В задачах, связанных с уравнением Матье, определитель D_s составлен из γ_p:

$$\gamma_p = \frac{\beta}{\alpha - p^2} \tag{2.1}$$

где постоянные α и β зависят от параметров λ и q уравнения (0.1). Из (2.1) видно, что ряд, составленный из γ_p, абсолютно сходится, если α не есть квадрат целого числа, что мы в дальнейшем, кроме n° 8, будем предполагать выполненным.

Оценку точности вычисления определителя D_s по ряду (1.10) мы будем проводить только для

$$s > s_m = \sup\left(\sqrt{\alpha},\ \frac{\alpha - 1}{2}\right) \tag{2.2}$$

Для всех меньших s определители D_s можно оценивать по формуле (1.5). При выполнении этого условия все произведения $\gamma_p\gamma_{p+1}$ будут положительны, а $(p+1)^2 - \alpha > p^2$. Отсюда видно, что для $B_s^{(1)}$ имеет место оценка

$$B_s^{(1)} < \beta^2 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{1}{(i^2 - \alpha)\, i^2} < \frac{\beta^2}{s^2 - \alpha} \sum_{i=s}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

Для $s = 1$ последняя сумма равна $^1/_6\,\pi^2$, а для $s > 1$ она оценивается по формуле Каталана[6] (стр. 386)

$$\sum_{i=s}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{1}{s-1} \tag{2.3}$$

Таким образом, для оценки $B_s^{(1)}$ имеем

$$B_1^{(1)} < \frac{\beta^2}{1-\alpha}\frac{\pi^2}{6}, \qquad B_s^{(1)} < \frac{\beta^2}{s^2-\alpha}\frac{1}{s-1} \qquad (s \geqslant 2) \tag{2.4}$$

Используя при $s > s_m$ равенство (1.11) для $B_s^{(2)}$ (2.4), для оценки входящего туда $B_{i+2}^{(1)}$ и соотношение (2.3), получаем оценку

$$B_s^{(2)} < \frac{\beta^4}{(s^2-\alpha)\,[(s+2)^2-\alpha]\,(s-1)\,(s+1)} \tag{2.5}$$

Применяя указанный прием для $B_s^{(n)}$, по индукции находим

$$B_s^{(n)} < \beta^{2n}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\{[(s+2i)^2-\alpha]\,(s+2i-1)\}\right)^{-1} \qquad (s \geqslant 2) \tag{2.6}$$

При оценке $B_1^{(n)}$ для значения суммы Σi^{-2} вместо (2.3) надо брать $^1/_6\,\pi^2$ и тем же способом находим

$$B_1^{(n)} < \beta^{2n}\frac{\pi^2}{6}\left(2^{n-1}(n-1)!\prod_{i=0}^{n-1}[(2i+1)^2-\alpha]\right)^{-1} \tag{2.7}$$

Для различных значений α из (2.6) и (2.7) можно получить более просты (и более грубые) формулы для оценки $B_s^{(n)}$. Ориентировочно для больших s можно считать, что $B_s^{(n)} < \beta^{2n}/s^{3n}$. Из этих оценок непосредственно следует сходимость рядов (1.10) и (1.11).

n° 3. Вычисление определителей D_s. Первый способ. Первый способ вычисления определителя основан только на рекуррентном соотношении (1.5) и не связан с вычислением сумм $B_s^{(n)}$. Поскольку условие (2.2) предполагается выполненным, ряд (1.10) является знакопеременным, а члены его монотонно убывают. Поэтому погрешность в определении суммы ряда не превышает первого отброшенного члена, и если $B_\sigma^{(1)} < \varepsilon$, то с точностью до ε можно считать $D_\sigma = 1$. Воспользовавшись (2.4), можно определить такое σ, при котором

$$(\sigma^2-\alpha)\,(\sigma-1) > \frac{\beta^2}{\varepsilon} \tag{3.1}$$

Положив $D_{\sigma+1} = D_\sigma = 1$ и применяя последовательную формулу (1.5), можно вычислить все интересующие нас определители D_s для $s < \sigma$ (для $s > \sigma$ все $D_s \approx 1$ с принятой степенью точности).

Если ошибка в D_σ и $D_{\sigma+1}$ составляет соответственно Δ_σ и $\Delta_{\sigma+1}$ ($|\Delta_\sigma| < \varepsilon$, $|\Delta_{\sigma+1}| < \varepsilon$), то легко показать методом индукции, что ошибка при вычислении определителя $D_{\sigma-t}$ последовательным применением формулы (1.5) составляет

$$\Delta_{\sigma-t} = D_{\sigma-t} - D_{\sigma-t}^{t+1} = \Delta_\sigma D_{\sigma-t}^{t} - \Delta_{\sigma+1}\gamma_{\sigma-1}\gamma_\sigma D_{\sigma-t}^{t-1}$$

Поскольку вычитаемое является малой второго порядка относительно ε, можно полубесконечный определитель $D_{\sigma-t}$ с той же относительной погрешностью заменить конечным определителем порядка $t+1$ для любого $0 < t < \sigma$.

n° 4. Вычисление определителей D_s. Второй способ. Если σ, определяемое из равенства (3.1), оказывается слишком большим, так что последовательное применение (1.5) будет слишком долгим, можно вычислять определители D_s непосредственно по ряду (1.10). Для этого необходимо с заданной степенью точности вычислить достаточное количество величин $B_s^{(n)}$. Так как замечание о знакопеременных рядах остается в силе, из равенства (2.6) или (2.7) можно определить такое ν, что $B_s^{(\nu)} < \varepsilon$, а ошибка в определении суммы ряда будет еще меньше. Для вычисления $B_0^{(1)}$ и $B_0^{(2)}$ имеется готовая аналитическая формула, которую можно получить, пользуясь, например, методом Проскурякова [7]:

$$B_0^{(1)} = \frac{\pi\beta^2}{(4\alpha - 1)\sqrt{\alpha}} \operatorname{ctg} \pi\sqrt{\alpha}$$

$$B_0^{(2)} = \frac{\pi\beta^4 \operatorname{ctg}\pi\sqrt{\alpha}}{(4\alpha-1)^2\sqrt{\alpha}}\left(-\frac{1}{2\alpha} + \frac{4}{1-4\alpha} + \frac{9}{4(1-\alpha)}\right) + \frac{1}{2\alpha^2(1-\alpha)^2} - \frac{\pi^2}{2\alpha(4\alpha-1)} \tag{4.1}$$

Остальные значения $B_0^{(n)}$ и значения $B_s^{(n)}$ определять этим методом слишком громоздко. Поэтому по формуле (2.6) или (2.7) находим, при каком σ_3 выполняется неравенство $B_{\sigma_3}^{(3)} < \varepsilon$, и по формуле (1.11), переписанной в виде

$$B_p^{(1)} = B_{p-1}^{(1)} - \gamma_{p-1}\gamma_p, \qquad B_p^{(2)} = B_{p-1}^{(2)} - \gamma_{p-1}\gamma_p B_{p+1}^{(1)} \tag{4.2}$$

вычисляем $B_p^{(1)}$ от $p = 1$ до $\sigma_3 + 2$ и $B_p^{(2)}$ от $p = 1$ до $\sigma_3 + 1$. После этого, положив $B_{\sigma_3}^{(3)} = 0$ (с ошибкой $|\Delta_3| < \varepsilon$), по формуле (1.11), переписанной в виде

$$B_{p-1}^{(n)} = B_p^{(n)} + \gamma_{p-1}\gamma_p B_{p+1}^{(n-1)} \tag{4.3}$$

вычисляем $B_p^{(3)}$ для p от σ_3 до s. Оценив далее по формулам (2.6) или (2.7), при каком $\sigma_4 > s$ выполняется неравенство $B_{\sigma_4}^{(4)} < \varepsilon$, по формуле (4.3) находим все $B_p^{(4)}$ $\sigma_4 < p < s$, причем все $B_{p+1}^{(3)}$ уже определены раньше. Этот процесс (практически сходящийся очень быстро) продолжаем до некоторого значения $n = \nu$, после чего вычисляем сумму ряда.

Нетрудно методом индукции определить предельную ошибку, которая возникает при таком способе вычисления. Не выписывая общей формулы, дадим выражения для ошибки, появляющейся при вычислении $B_s^{(3)}$, $B_s^{(4)}$ и $B_s^{(5)}$. На практике суммы большей кратности могут встретиться очень редко:

$$\Delta B_s^{(3)} = \Delta_3, \qquad \Delta B_s^{(4)} = \Delta_4 + \Delta_3 \sum_{i=s}^{\sigma_4 - 1} \gamma_i\gamma_{i+1}$$

$$\Delta B_s^{(5)} = \Delta_5 + \Delta_4 \sum_{i=s}^{\sigma_5 - 1} \gamma_i\gamma_{i+1} + \Delta_3 \sum_{i=s}^{\sigma_5 - 1} \gamma_i\gamma_{i+1} \sum_{j=i+2}^{\sigma_4 - 1} \gamma_j\gamma_{j+1}$$

n° 5. Вычисление конечных определителей D_s^k. Вычисление конечных определителей D_s^k проще всего последовательно проводить по формуле (1.3), приняв во внимание очевидное равенство $D_s^0 = D_s^1 = 1$. Использование равенства (1.9) требует значительно большего труда.

n° 6. Применение определителей D_s к вычислению бесконечного определителя $\Delta(0)$. Бесконечный определитель $\Delta(0)$ можно рассматривать как предел при $m \to \infty$ определителя конечного порядка $\Delta_m(0) = D_{-m}^{2m+1}$. Элементы этого определителя выражаются равенством (0.2), откуда следует, что $\alpha = {}^1/_4\lambda$ и $\beta = -{}^1/_4 q$. Применяя к определителю D_{-m}^{2m+1} разложение (1.7) для $s = -m$, $k = 2m + 1$, $t = m + 1$, получаем соотношение, которое в силу четности γ относительно i можно записать в виде

$$\Delta_m(0) = D_1^m D_0^{m+1} - \gamma_0\gamma_1 D_2^{m-1} D_1^m \tag{6.1}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$ и при помощи (1.5) исключая D_2, получаем окончательно

$$\Delta(0) = D_1(2D_0 - D_1) \tag{6.2}$$

и задача вычисления определителя $\Delta(0)$ сводится к описанному выше вычислению определителей D_0 и D_1.

Подставляя в (6.2) разложения (1.10) определителей D_0 и D_1 и собирая члены с одинаковыми степенями β^2, получаем, ограничиваясь степенями β^4:

$$\Delta(0) = 1 - 2B_0^{(1)} + (B_0^{(1)})^2 - (B_0^{(1)} - B_1^{(1)})^2 + 2B_0^{(2)}] + \cdots \tag{6.3}$$

Применяя равенства (4.1), можно убедиться, что второй член разложения совпадает с обычно приводимым [1] (стр. 85), [3] (стр. 551) в теории уравнения Матье¹, а третий член разложения — с приводимым в [3] (стр. 551). Дальнейшие члены разложения получить затруднительно, однако соотношение (6.2) позволяет провести расчет с произвольной степенью точности.

n° 7. Определение частного периодического решения уравнения Матье с правой частью, частота которой кратна (или равна) частоте периодического коэффициента. Рассмотрим уравнение Матье с правой частью

$$y'' + (\alpha + 2\beta\cos x)\,y = \sum_{n=}^{\infty} f_n \cos nx \tag{7.1}$$

Согласно результатам Котовской [4] (стр. 215) искомое решение можно представить в виде ряда Фурье

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{7.2}$$

Подставив его в (7.1) и считая, что точка (α, β) не лежит на переходной кривой, получим бесконечную систему уравнений для бесконечного числа неизвестных $a_k = \xi_{k+1}$:

$$\xi_1 + 2\gamma_0\xi_2 = \delta_1, \qquad \xi_k + \gamma_{k-1}(\xi_{k-1} + \xi_{k+1}) = \delta_k \qquad (k = 2, 3, \ldots) \tag{7.3}$$

где

$$\delta_{k+1} = \frac{f_k}{\alpha - k^2}, \; \gamma_k = \frac{\beta}{\alpha - k^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Решение этой бесконечной системы можно представить в виде абсолютно сходящихся рядов, поскольку определитель системы (7.3) Δ_0 является нормальным [5] (§ 73), а величины f_k убывают, как k^{-1}. Если алгебраическое дополнение элемента этого определителя обозначить A_{ks}, то решение системы (7.3) имеет вид:

$$\xi_s = a_{s-1} = \frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{\infty} A_{ks}\delta_k \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{7.4}$$

Путем простых преобразований A_{ks} можно представить в виде

$$\begin{array}{ll} (-1)^{k+s}\Delta_0^{s-1}D_k \prod\limits_{i=s-i}^{k-2} \gamma_i & (1 \leqslant s < k) \\ \Delta_0^{k-1}D_k & (s = k) \\ (-1)^{k+s}\,\Delta_0^{k-1}D_s \prod\limits_{i=k}^{s-1} \gamma_i & (s > k) \end{array} \tag{7.5}$$

где Δ_0^p или Δ_0 — определители того же вида, что и D_0^p и D_0, но в которых γ_0 заменено на $2\gamma_0$. Между ними существуют соотношения

$$\Delta_0 = D_0 - \gamma_0\gamma_1 D_2, \qquad \Delta_0^p = D_0^p - \gamma_0\gamma_1 D_0^{p-2}, \qquad \Delta_0^0 = \Delta_0^1 = 1 \tag{7.6}$$

Если даже на систему действует только одна гармоника внешней силы с номером m, то в решении (7.2) все равно будут присутствовать все гармоники, амплитуды которых равны

$$a_{s-1} = \frac{1}{\Delta_0} A_{m+1,s}\delta_{m+1} \tag{7.7}$$

¹ В книге Стретта [8] (стр. 31) из-за неправильного написания членов определителя $\Delta(0)$, а именно, $-2h^2/(\lambda - 4k^2)$ вместо правильного значения $-h^2/(\lambda - 4k^2)$, второй член разложения получился в 4 раза больше. В статье Бремекампа [9] (стр. 142) из-за ошибки при преобразовании дроби в $\alpha_k(0)$ выписан неправильный общий член определителя $-0.5\,bd^2/(4k^2\lambda^2 - d^2)$ вместо правильного $-0.5\,bd^2/(k^2\lambda^2 - d^2)$, что привело к искажению величины второго члена разложения.

Из (7.5) и (7.7) следует, что, начиная с некоторого s, амплитуды $|a_s|$ будут быстро убывать, так как a_s пропорционально произведению $\gamma_{m+1}\gamma_{m+2}\cdots\gamma_s$, в котором $\gamma_i \to 0$ при $i \to \infty$. Если β и α таковы, что $|\gamma_k| = |\beta/(\alpha - k^2)| < 1$ для всех k, то частота максимальной амплитуды будет равна частоте внешней силы. Невыполнение этого условия может вести к сдвигу максимума амплитуды и появлению дополнительных максимумов [1].

Оценка a_{s-1} из равенства (7.4) показывает, что ряд (7.2) обязательно сходится, так как a_s убывает быстрее, чем s^{-1}.

Если уравнение (7.1) обладает нечетной правой частью, то решение (7.2) надо искать в виде ряда синусов. Ход решения при этом изменится несущественно.

n° 8. Случай, когда в уравнении (7.1) α равно квадрату целого числа. При $\alpha = m^2$ (m — целое) нельзя применять изложенный выше способ решения, так как γ_m обращается в бесконечность. В этом случае можно изменить систему (7.3) и получить решение при помощи тех же определителей [2]. Для этого m-е уравнение системы не будем делить на $\alpha - m^2$, равное нулю, а запишем в виде

$$\beta(\xi_m + \xi_{m+2}) = \delta_{m+1} \qquad \left(\delta_{m+1} = \frac{f_m}{\alpha}\right)$$

Это значит, что в $(m+1)$-й строке определителя надо единицу заменить нулем и положить $\gamma_m = \beta$. Тогда определители, входящие в (7.4) и (7.5), можно представить так:

конечные определители

$$\begin{array}{ll} (p < m+1) & D_0^p \quad \text{(не меняет своего вида)} \\ (p = m+1) & D_0^{m+1} = -\beta\gamma_{m-1}D_0^{m-1} \\ (p > m+1) & D_0^p = -\beta\gamma_{m-1}D_0^{m-1}D_{m+1}^{p-m-1} - \beta\gamma_{m+1}D_0^m D_{m+2}^{p-m-2} \end{array}$$

полубесконечные определители

$$\begin{array}{ll} (s < m) & D_s = -\beta\gamma_{m-1}D_s^{m-s-1}D_{m+1} - \beta\gamma_{m+1}D_s^{m-s}D_{m+2} \\ (s = m) & D_m = -\beta\gamma_{m+1}D_{m+2} \\ (s > m) & D_s \quad \text{(не меняет своего вида)} \end{array} \tag{8.1}$$

Случай равенства $\alpha = m^2$ не представит трудностей и при вычислении $\Delta(0)$. В этом случае надо только, пользуясь (6.2), применить при вычислении определителей D_0 и D_1 подходящие формулы (8.1).

n° 9. Примеры. 1. Рассмотрим вычисление определителя $\Delta(0)$ для уравнения Матье:

$$y'' + (12 - 24\cos 2x)\,y = 0$$

Как было указано в n° 6, такому уравнению соответствуют $\alpha = 3$, $\beta = -3$. Из условия (2.2) следует, что $s_m = \sqrt{3}$, так что, начиная с $s = 2$, можно применять все полученные выше оценки. Задаваясь точностью вычислений в 1%, из условия (3.1) находим, что, начиная с $s = 11$, имеет место неравенство $1 - D_s < 0.01$. Поэтому, полагая $D_{11} = D_{12} = 1$, по формуле (1.5) последовательно определяем $D_{10}, D_9, \ldots, D_0$, составив предварительно таблицу произведений $\gamma_n\gamma_{n+1}$ для $n \geqslant 0$. Весь расчет сводится в таблицу, приводимую ниже, и не требует больше никаких записей. Точность определения D_0 и D_1 составляет также 1%.

---

[1] В статье Г. Горелика [10] (стр. 1799—1800) обсуждается аналогичное явление, но ввиду бо́льшей общности рассуждения этот эффект не отмечается.

[2] А. П. Проскуряков [3] делит основную систему не на $\alpha - m^2$, а на m^2, и для него такой трудности не существует. Однако определитель системы (7.3) имеет в этом случае более сложный вид.

Последний знак в столбце D_n сомнительный, и его следует отбросить. Для $\Delta(0)$ получаем значение согласно (6.2) $\Delta(0) = 15.4$ с ошибкой, не превышающей 2%. Более точный расчет дает $\Delta(0) = 15.5$, в то время как расчет по формулам (6.3) и (4.1) дает примерно в два раза меньшее значение $\Delta(0) = 6.8$.

n	n^2-3	$\gamma_n = 3 / (n^2-3)$	$\gamma_n\gamma_{n+1}$	D_n
0	—3	—1.000	1.500	4.036
1	—2	—1.500	—4.500	3.159
2	1	3.000	1.500	—0.585
3	6	0.500	0.115	0.832
4	13	0.231	0.031	0.944
5	22	0.136	0.012	0.975
6	33	0.091	0.006	0.987
7	46	0.065	0.003	0.993
8	61	0.049	0.002	0.996
9	78	0.038	0.001	0.998
10	97	0.031	0.001	0.999
11	118	0.025	0.000	1.000

2. В качестве второго примера найдем вынужденное колебание системы под действием третьей гармоники периодического коэффициента:

$$y'' + (3 + 2\cos x)\, y = f_3 \cos 3x$$

В этом случае $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Так как решение зависит от f_3 линейно, то положим $f_3 = 1$. Из всех δ_i только δ_4 будет отлично от нуля. Поэтому в формуле (7.5) $k = 4$. Для вычисления всех A_{4s} нам надо найти следующие величины: все γ_i, D_0, D_2, D_4, D_5 и т. д., D_0^2 и D_0^3. Зададимся точностью вычислений в 10^{-6}. Первый способ вычисления определителей здесь невыгоден, так как из (3.1) видно, что $\sigma \approx 100$ и нам придется составлять таблицу из 100 строк. Применим поэтому второй способ. По формулам (4.1) находим

$$B_0^{(1)} = -0.147278, \qquad B_2^{(2)} = 0.022456$$

Из (2.6) находим σ_3, при котором $B_{\sigma_3}^{(3)} < 10^{-6}$: $\sigma_3 = 4$. Таблицу составляем из 10 строк (а не из 7), так как мы хотим рассчитать семь гармоник по формуле (7.7).

Вычислив $\gamma_n\gamma_{n+1}$, по формулам (4.2) вычисляем $B_p^{(1)}$ и $B_p^{(2)}$ до $p = 8$. Теперь, положив $B_4^{(3)} = 0$, будем вычислять по формуле (4.3) значения $B_p^{(3)}$ от $p = 3$ до $p = 0$. Проверка для $B_s^{(4)}$ при $s = 1$ невозможна, но для $s = 2$ из формулы (2.6)

n	$3-n^2$	$\gamma_n = 1 / (3-n^2)$	$\gamma_n\gamma_{n+1}$	$B_p^{(1)}$	$B_p^{(2)}$	$B_p^{(3)}$	$B_p^{(4)}$
0	3	0.333333	0.166667	—0.147278	0.022456	0.000168	0
1	2	0.500000	—0.500000	—0.313934	—0.008555	—0.000023	0
2	— 1	—1.000000	0.166667	0.186066	0.001145	0.000001	0
3	— 6	—0.166667	0.012820	0.019400	0.000048	0.000000	
4	—13	—0.076923	0.003496	0.006580	0.000008		
5	—22	—0.045454	0.001377	0.003084	0.000002		
6	—33	—0.030303	0.000659	0.001707	0.000001		
7	—46	—0.021739	0.000356	0.001048	0.000000		
8	—61	—0.016393	0.000210	0.000692			
9	—78	—0.012820					

следует, что $B_2^{(4)} < 10^{-6}$. Положив $B_2^{(4)} = 0$, по (4.3) находим $B_1^{(4)}$ и $B_0^{(4)}$, которые оба оказались меньше 10^{-6}. На этом составление таблицы заканчивается. Пользуясь ею, можно при помощи ряда (1.10) найти определители

$$D_0 = 1.169555,\ D_2 = 0.815084,\ D_4 = 0.993428,\ D_5 = 0{,}996918,\ D_6 = 0.998294$$
$$D_7 = 0.998952,\ D_8 = 0.999308$$

Пользоваться (1.5) для вычисления D_{s+2} неудобно из-за малости произведения $\gamma_s \gamma_{s+1}$. Для Δ_0 из (7.6) получаем $\Delta_0 = 1.033708$. Далее находим по (1.3) конечные определители D_0^2 и D_0^3, откуда при помощи (7.6) получаем $\Delta_0^2 = 0.666668$ и $\Delta_0^3 = 1.166668$. Теперь все подготовлено для вычисления по формуле (7.7) коэффициентов разложения (7.2). Окончательно получаем

$$0{,}5\, a_0 = 0{,}161138,\quad a_2 = 0{,}640690,\quad a_4 = 0.086550,\quad a_6 = 0.000119$$
$$a_1 = -0.480516,\quad a_3 = 1.121208,\quad a_5 = 0.003939,\quad a_7 = 0.000003$$

Вычислительная работа по приведенной схеме не требует почти никаких дополнительных записей, кроме простого расчета по формулам (4.1), все вычисление умещается на нескольких листах и занимает несколько часов даже для столь большой точности расчета. Преимущество этого способа по сравнению со способом [4] сказывается особенно сильно при вычислении гармоник высокого порядка. Метод вариации произвольных постоянных требует предварительного определения с достаточной степенью точности решения однородного уравнения Матье, что само по себе представляет громоздкую задачу.

Поступила 4 V 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ. М., 1953.
2. Tisserand F. Traité de Mecaniqe céleste, т. III. Париж, 1894.
3. Проскуряков А. П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
4. Kotowski G. Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichungen mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz. ZAMM, 23, 1943.
5. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, 1922.
6. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГТТИ, М., 1948.
7. Проскуряков А. П. О вычислении некоторых сумм в теории уравнения Хилла, ПММ, т. XI, вып. 5, 1947.
8. Стретт М. Д. О Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике ОНТИ, Харьков, 1935.
9. Bremekamp H. Over de voortplanting van een golfbeweging in een medium van periodieke structuur. Physika (Голландия), 6, 1926, стр. 136.
10. Горелик Г. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами, ЖТФ, т. IV, стр. 1783, 1934.