перед и за скачком, где местная система координат выбирается так, что $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)=0$. Известный произвол здесь объясняется невозможностью точного выполнения всех условий на скачке одновременно, если считать движение потенциальным; при таком выборе условия (13) последнее, как видно из уравнения (12), принимает вид:

$$\frac{d\varphi_1}{d\psi_1}=\frac{d\varphi_2}{d\psi_2}=\pm g(w_1, w_2) \qquad (g(w_1, w_2)\equiv g(w_2, w_1)) \tag{14}$$

Как и в случае прямого скачка, наша краевая задача сводится к линейному функциональному уравнению для функции $\tau(\theta)=\psi(\theta, 0)$ на отрезке AF оси θ. В самом деле, зная $\tau(\theta)$, мы можем, пользуясь краевыми условиями (5), (6), (9), найти решение в области $ABCDCEFA$; затем, зная ψ и φ на AB, благодаря $\psi_2=\psi_1$, $\varphi_2=\varphi_1$ и (7) находим значения ψ и φ на AH. Решая задачу Коши в области AHG, находим ψ на характеристике AG. Из этих значений и уже полученных значений $\partial\psi/\partial\eta$ на AF находим значения ψ в области AGF, следовательно, снова значения $\tau(\theta)$.

Заметим, что это рассуждение применимо только при условии, когда дуга AH лежит между характеристиками, исходящими из точки A, т. е. когда

$$|\theta_1-\theta_A|<\frac{2}{3}|\eta_1|^{3/2}, \qquad \left|\frac{d\theta_1}{d\eta_1}\right|<\sqrt{|\eta_1|} \tag{15}$$

С другой стороны, достаточным условием для выполнимости уравнения (7) является неравенство

$$|\theta_1-\theta_A|<\frac{1}{\sqrt{2}}|\eta_1|^{3/2} \tag{16}$$

Но поскольку $\frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, условие (16) следует из условия (15); если условие (15) не выполнено, наша краевая задача не может быть законно поставлена.

Вопрос о существовании и единственности решения задачи требует дальнейших исследований.

Поступила 27 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверх звуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.

К ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Б. М. Булах

(Саратов)

В заметке обсуждается вопрос о том, какие сверхзвуковые конические течения могут без скачка примыкать к однородному потоку газа вдоль конуса Маха. В более ранней заметке [1] автор высказал предположение, что единственными течениями такого рода являются осесимметричные течения. Однако дальнейшее изучение вопроса показало, что конический потенциал F имеет на конусе Маха логарифмическую особенность и зависит от произвольной функции θ.

Так, если φ — потенциал скорости и ось z направлена по скорости однородного потока, то

$$\varphi=zF(\xi, \eta), \qquad \xi=\frac{x}{z}, \qquad \eta=\frac{y}{z}, \qquad z=\sqrt{\xi^2+\eta^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{\eta}{\xi}$$

Эти результаты являются обобщением результатов А. Буземана [2], относящихся к осесимметричным течениям, на случай произвольных конических течений[1].

Выражения для компонент скорости конического течения по осям декартовых координат x, y, z записываются в виде

$$u=\cos\theta F_r-\frac{\sin\theta}{r}F_\theta, \qquad v=\sin\theta F_r+\frac{\cos\theta}{r}F_\theta, \qquad w=F-rF_r$$

---

[1] Буземан рассматривал конические течения в пространстве годографа.

Производные обозначены индексами, F удовлетворяет уравнению:

$$\{a^2(1+r^2)-[rF-(1+r^2)F_r]^2\}F_{rr}+2\left[F-\left(r+\frac{1}{r}\right)F_r\right]F_\theta\left(\frac{1}{r^2}F_{r\theta}-\frac{1}{r^2}F_\theta\right)+$$
$$+\left(a^2-\frac{1}{r^2}F_\theta{}^2\right)\left(\frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}+\frac{1}{r}F_r\right)=0 \tag{1}$$
$$a^2=a_0{}^2-\frac{\varkappa-1}{2}\left[F_r{}^2+\frac{1}{r^2}F_\theta{}^2+(F-rF_r)^2-F_0{}^2\right]$$

где $\varkappa$ — адиабатический индекс, a_0 — скорость звука, F_0 — значение потенциала в однородном потоке, равное его скорости w_0. На конусе Маха

$$r=r_0=(M_0{}^2-1)^{-1/2},\qquad M_0=\frac{w_0}{a_0},\qquad F_r=F_\theta=0$$

Предполагаем, что F имеет непрерывные третьи производные по r и θ в окрестности и на самом конусе Маха. Дифференцируя уравнение (1) по r и устремляя r к r_0, или в пределе, получим уравнение для $(F_{rr})_{r=r_0}$, из которого следует, что

$$(F_{rr})_{r=r_0}\equiv 0,\qquad \text{или}\qquad (F_{rr})_{r=r_0}=\frac{w_0}{\varkappa+1}\,\frac{(M_0{}^2-1)^2}{M_0{}^4}$$

Первое значение соответствует однородному потоку; второе значение $(F_{rr})_{r=r}$ соответствует эллиптическому типу решения (1) в окрестности $r=r_0$; откуда следует аналитичность F относительно r и θ. Повторное дифференцирование (1) по r и стремление r к r_0 дают:

$$\lim\,[F_{rrr}P-a_0{}^2(M_0{}^2-1)^{1/2}F_{rrrr}(r-r_0)]+\alpha=0\qquad \text{при } r\to r_0 \tag{2}$$

где полином $P=P(r,\ \theta,\ F,\ F_r,\ F_\theta,\ F_{rr},\ F_{r\theta},\ F_{\theta\theta})$ обращается в нуль при $r=r_0$ и

$$\alpha=a_0{}^2\frac{w_0}{(\varkappa+1)^2}\,\frac{(M_0{}^2-1)^3}{M_0{}^6}\,[(\varkappa+1)(2-M_0{}^2)-3(M_0{}^2-1)]$$

Изучение различных вариантов скорости стремления P к нулю показало, что единственной возможностью удовлетворения (2) является $\lim F_{rrrr}(r-r_0)=\text{const}$ при $r\to r_0$; откуда следует, что $\lim F_{rrr}P=0$ при $r\to r_0$ и

$$F=w_0+\beta(r_0-r)^2+\gamma(r_0-r)^3\ln(r_0-r)+R \tag{3}$$

где

$$\beta=\frac{w_0}{2(\varkappa+1)}\,\frac{(M_0{}^2-1)^2}{M_0{}^4},\qquad \gamma=\frac{w_0}{6(\varkappa+1)^2}\,\frac{(M_0{}^2-1)^{5/2}}{M_0{}^6}\,[3(M_0{}^2-1)-(\varkappa+1)(2-M_0{}^2)]$$

через R обозначены члены высшего порядка относительно $r-r_0$. Будем искать главный член R в виде:

$$R=C(\theta)(r_0-r)^3+\cdots \tag{4}$$

При подстановке (3), с учетом (4), в (1) первыми членами наинизшего порядка в левой части (1) будут члены

$$O\,[r_0-r],\qquad O\,[(r_0-r)^2\ln(r_0-r)],\qquad O\,[(r_0-r)^2],$$

порождаемые выписанными явно членами в формулах (3) и (4). Члены $O\,[r_0-r]$ сокращаются вследствие выбора β; члены $O\,[(r_0-r)^2\ln(r_0-r)]$ сокращаются при любых γ, $C(\theta)$; члены $O\,[(r-r)^2]$, не содержащие $C(\theta)$, сокращаются при ранее указанном значении γ; остальные члены $O\,[(r_0-r)^2]$ сокращаются при любой функции $C(\theta)$, что и указывает на ее произвольность.

Поступила 9 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Булах Б. М. К теории конических течений, ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954, стр. 451—452.
2. Буземан А. Осесимметрическое коническое сверхзвуковое течение, Сб. «Газовая динамика», Изд. ИЛ, 1950, стр. 197—218.