ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.
2. Красильщикова Е. А. Неустановившиеся движения крыла бесконечного размаха. Известия АН СССР, ОТН, вып. 2, 1954.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. ГИТТЛ, 1949.
4. Schwarz L. Untersuchung einiger mit den Zylinderfunctionen nullter Ordnung verwandter Funktionen. Luftfahrtforschung, Bd. 20, 1944, pp. 340—372.

ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНОЙ, ОКАНЧИВАЮЩЕЙСЯ ИСКРИВЛЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Ф. И. Франкль

(Фрунзе)

В работе [1] автор рассматривал названную проблему в частном случае, когда сверхзвуковая зона оканчивается прямым скачком уплотнения.

Была сформулирована краевая задача в плоскости $\theta\eta$ (θ — угол наклона скорости, η — введенная автором функция модуля скорости), приводящая к обтеканию указанного вида.

В случае, когда скачок уплотнения искривленный, получается несколько более сложная краевая задача.

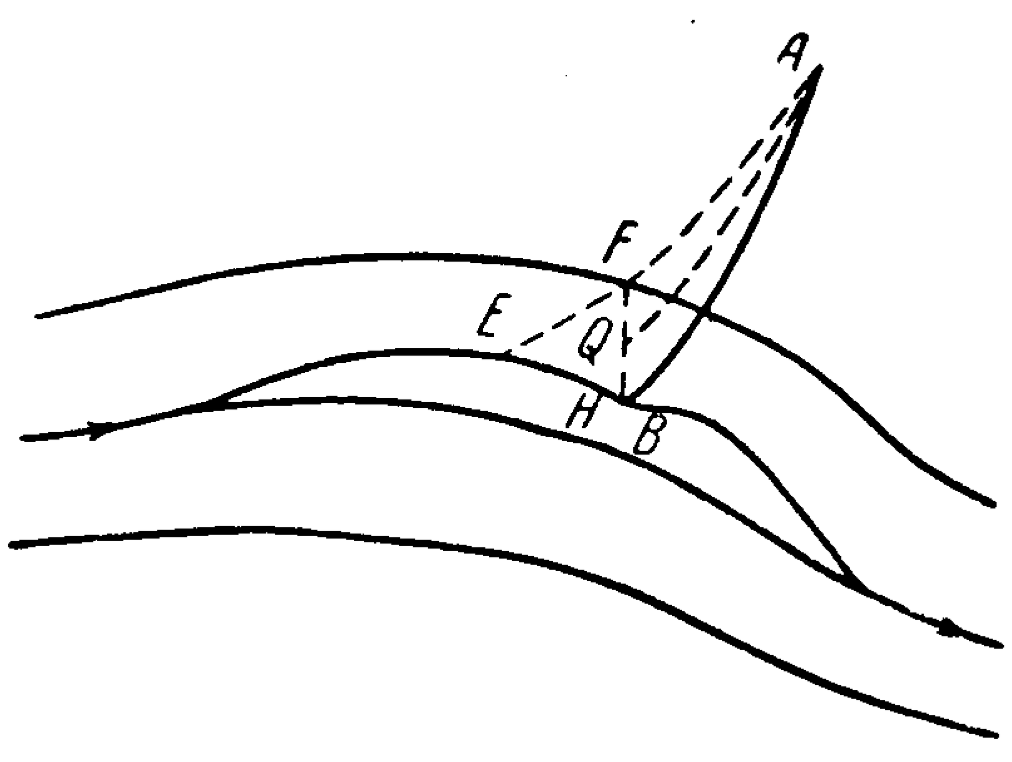
Пусть рассматриваемый газ является газом Трикоми-Фальковича, так что имеем для функции тока уравнение

$$\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0 \tag{1}$$

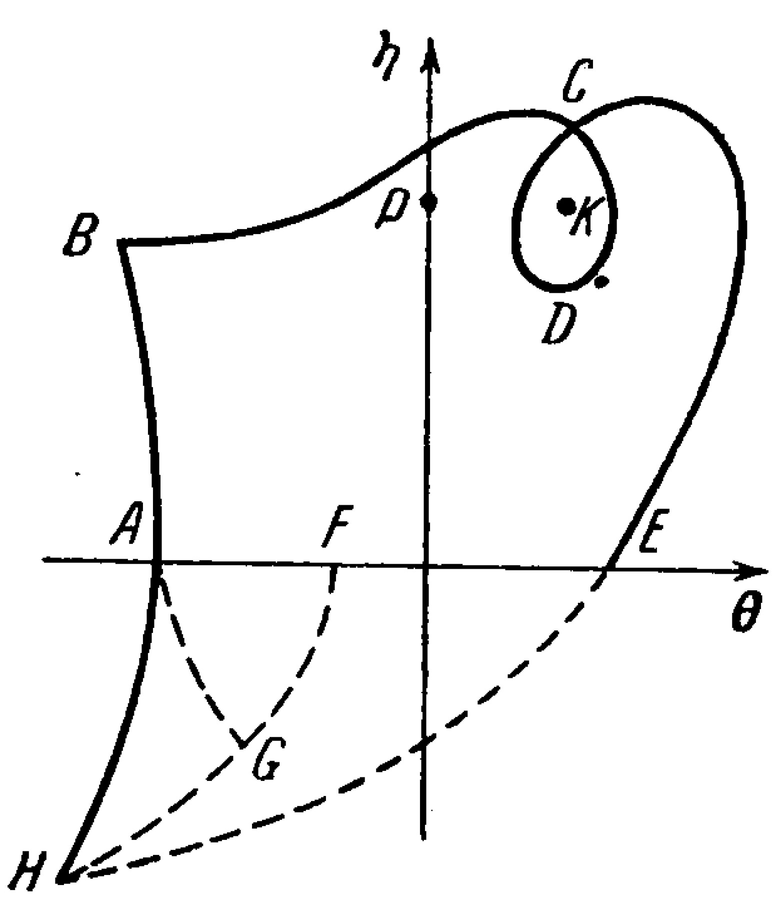
Ограничиваемся сперва случаем существования циркуляции, отличной от нуля.

Пусть обтекание происходит согласно фиг. 1.

В плоскости годографа имеем соответственно фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь FGH — характеристика уравнения (1). Решение ищется в области $ABCDCEFGHA$; при этом допустима многолистность области с заданными точками разветвления (на фигуре точка K). Этим точкам разветвления соответствуют в физической плоскости точки нулевого ускорения, и в них функция тока должна быть конечной; точки разветвления могут, однако, отсутствовать, и область может быть однолистной. Точка P на оси η соответствует бесконечно отдаленной точке физической плоскости. Дуги AH и AB соответствуют передней (сверхзвуковой) и задней (дозвуковой) сторонам скачка уплотнения.

Искомое решение должно иметь в точке P особенность вида

$$\psi = \alpha \frac{\cos t}{\rho} + \beta \ln \rho + O(1) \tag{2}$$

Здесь

$$\rho = \sqrt{\theta^2 + (s - s_p)^2}, \qquad \cos t = \frac{s - s_p}{\rho}, \qquad s = \frac{2}{3}\eta^{3/2} \tag{3}$$

$$\alpha = -\frac{\Gamma}{2\pi C\sqrt{\eta_p}}, \qquad \beta = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sigma_p}{\sigma_0} \tag{4}$$

При этом Γ — циркуляция, σ_p и σ_0 — плотности в бесконечности и в точке нулевой скорости, вычисленные для газа Трикоми—Фальковича,

$$C = \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{1/(\varkappa - 1)} (\varkappa + 1)^{1/3} \tag{4a}$$

Вывод условий на бесконечности дан в работе [1]. Краевые условия следующие:

а) $\psi = 0$ на $BCDCE$ (5)

б) $\psi = f(\theta)$ на EF (6)

где $f(\theta)$ — заданная функция;

в) на дуге BAH точки дуги AB $(\eta = \eta_2)$ и дуги AH $(\eta = \eta_1)$ поставлены в соответствие друг с другом посредством уравнения

$$(\theta_2 - \theta_1)^2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2(-\eta_1 - \eta_2) \tag{7}$$

причем в соответствующих друг другу точках должно иметь место соотношение

$$\psi(\theta_1, \eta_1) = \psi(\theta_2, \eta_2) \tag{8}$$

Точки (θ_1, η_1) и (θ_2, η_2) соответствуют векторам скорости в одной и той же точке скачка уплотнения соответственно на его передней и задней сторонах. Точки B и H при этом соответствуют друг другу.

Кроме того, на BAH должно иметь место соотношение

$$\frac{d\varphi_1}{d\psi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\psi_2} = \pm\frac{C}{\sqrt{2}}\sqrt{-\eta_1 - \eta_2} \tag{9}$$

Соотношения (7), (8), (9) легко получаются на основании обычной теории косого скачка уплотнения для скоростей, близких к критической. Из (7) и (9) следует $\varphi_2 = \varphi_1$.

В случае прямолинейного скачка $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$ уравнения (7) и (9) переходят в условия

$$\eta_2 = -\eta_1, \qquad \varphi_2 = \varphi_1 = \text{const} \qquad \left(\text{или } \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0\right)$$

данные в работе [1].

В случае отсутствия циркуляции имеем в точке, соответствующей бесконечно отдаленной точке физической плоскости, точку разветвления второго порядка, в окрестности которой имеем

$$\psi = \rho^{-1/2} \sin\frac{t}{2} + O(\rho^{1/2}) \tag{10}$$

так что в этом случае область в плоскости годографа обязательно двухлистная, как и в соответствующей задаче работы [1].

В газах Чаплыгина имеем вместо условий (4), (7), (9) соответственно условия

$$\alpha = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sigma_p}{\sigma_0}, \qquad \beta = -\frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{K_p}} \tag{11}$$

$$(w_2 - w_1)^2(w_1 w_2 - a^{*2}) = 2w_1 w_2 \sin^2\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\left(w_1^2 + w_2^2 + 2a^{*2} - \frac{4\varkappa}{\varkappa + 1}w_1 w_2 \cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\psi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\psi_2} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1 w_1} + \frac{\sigma_0}{\sigma_2 w_2}\right)\frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1}\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \tag{13}$$

Последнее уравнение получается из требования совпадения величин

$$dx = \frac{\cos\theta}{w}d\varphi - \frac{\sigma_0}{\sigma w}\sin\theta\, d\psi$$

перед и за скачком, где местная система координат выбирается так, что $^1/_2(\theta_1+\theta_2)=0$. Известный произвол здесь объясняется невозможностью точного выполнения всех условий на скачке одновременно,если считать движение потенциальным; при таком выборе условия (13) последнее, как видно из уравнения (12), принимает вид:

$$\frac{d\varphi_1}{d\psi_1}=\frac{d\varphi_2}{d\psi_2}=\pm g(w_1, w_2) \qquad (g(w_1, w_2)\equiv g(w_2, w_1)) \tag{14}$$

Как и в случае прямого скачка, наша краевая задача сводится к линейному функциональному уравнению для функции $\tau(\theta)=\psi(\theta, 0)$ на отрезке AF оси θ. В самом деле, зная $\tau(\theta)$, мы можем, пользуясь краевыми условиями (5), (6), (9), найти решение в области $ABCDCEFA$; затем, зная ψ и φ на AB, благодаря $\psi_2=\psi_1$, $\varphi_2=\varphi_1$ и (7) находим значения ψ и φ на AH. Решая задачу Коши в области AHG, находим ψ на характеристике AG. Из этих значений и уже полученных значений $\partial\psi/\partial\eta$ на AF находим значения ψ в области AGF, следовательно, снова значения $\tau(\theta)$.

Заметим, что это рассуждение применимо только при условии, когда дуга AH лежит между характеристиками, исходящими из точки A, т. е. когда

$$|\theta_1-\theta_A|<\frac{2}{3}|\eta_1|^{3/2}, \qquad \left|\frac{d\theta_1}{d\eta_1}\right|<\sqrt{|\eta_1|} \tag{15}$$

С другой стороны, достаточным условием для выполнимости уравнения (7) является неравенство

$$|\theta_1-\theta_A|<\frac{1}{\sqrt{2}}|\eta_1|^{3/2} \tag{16}$$

Но поскольку $\frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, условие (16) следует из условия (15); если условие (15) не выполнено, наша краевая задача не может быть законно поставлена.

Вопрос о существовании и единственности решения задачи требует дальнейших исследований.

Поступила 27 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверх звуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.

К ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Б. М. Булах

(Саратов)

В заметке обсуждается вопрос о том, какие сверхзвуковые конические течения могут без скачка примыкать к однородному потоку газа вдоль конуса Маха. В более ранней заметке [1] автор высказал предположение, что единственными течениями такого рода являются осесимметричные течения. Однако дальнейшее изучение вопроса показало, что конический потенциал F имеет на конусе Маха логарифмическую особенность и зависит от произвольной функции θ.

Так, если φ — потенциал скорости и ось z направлена по скорости однородного потока, то

$$\varphi=zF(\xi, \eta), \qquad \xi=\frac{x}{z}, \qquad \eta=\frac{y}{z}, \qquad z=\sqrt{\xi^2+\eta^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{\eta}{\xi}$$

Эти результаты являются обобщением результатов А. Буземана [2], относящихся к осесимметричным течениям, на случай произвольных конических течений [1].

Выражения для компонент скорости конического течения по осям декартовых координат x, y, z записываются в виде

$$u=\cos\theta F_r-\frac{\sin\theta}{r}F_\theta, \qquad v=\sin\theta F_r+\frac{\cos\theta}{r}F_\theta, \qquad w=F-rF_r$$

[1] Буземан рассматривал конические течения в пространстве годографа.