

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Г. И. Копзон

(Ленинград)

Малые гармонические колебания тонкого крыла в сверхзвуковом потоке газа изучены Е. А. Красильщиковой [1]. Этим же автором получены решения задачи о произвольном движении крыла в условиях, при которых возможны обычные допущения, принимаемые при линеаризации уравнений [2].

§ 1. Применение преобразования Лапласа к потенциалу скоростей в виде

$$\Phi(x, y, z, s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(x, y, z, t) dt \quad (1.1)$$

позволяет рассмотреть общий случай граничных условий на крыле с произвольной зависимостью от времени

$$(\partial\varphi/\partial y)_{t \geq 0} \text{ на } S = v(x, z, t) \quad (1.2)$$

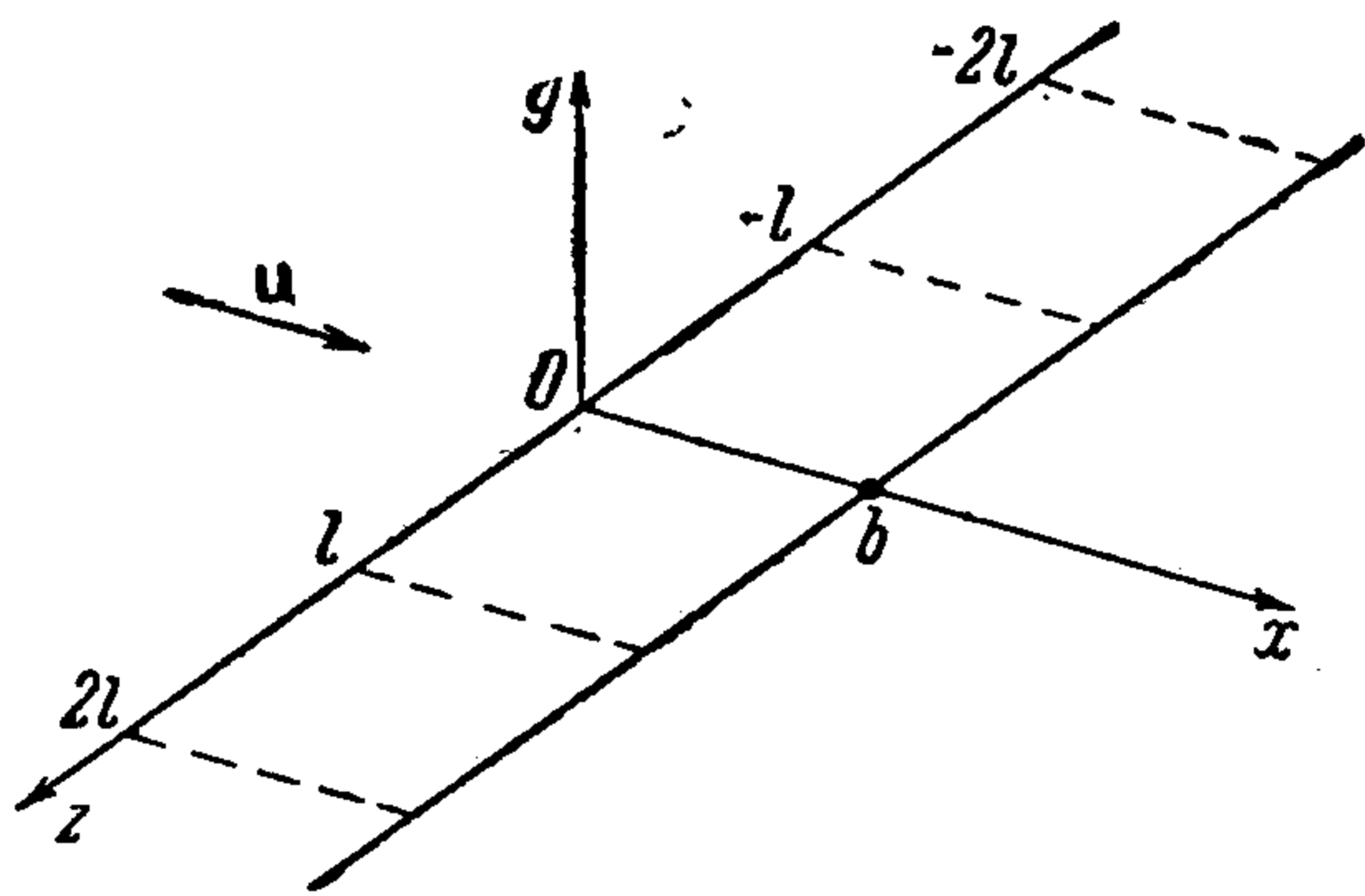
Здесь  $S$  — площадь крыла в плане; при этом могут быть также рассмотрены граничные поверхности, движение которых существенно зависит от обтекающего их потока:

$$L_{xzt}(\partial\varphi/\partial y) = l_{xz}(\rho\partial\varphi/\partial t + \rho u \partial\varphi/\partial x) \quad (1.3)$$

Здесь  $L_{xzt}$ ,  $l_{xz}$  — интегро-дифференциальные операторы. Конкретные случаи таких задач изучены ниже.

Полагая движение начинающимся в момент  $t = 0$ , имеем начальные условия

$$[\varphi]_{t=0} = F(x, y, z), \quad (\partial\varphi/\partial t)_{t=0} = f(x, y, z) \quad (1.4)$$



Фиг. 1

В остальном сохраняется постановка задачи [1]. Рассмотрим крыло с равноотстоящими нервюрами (фиг. 1); интересующие нас величины разлагаем в ряд Фурье по  $\exp i\alpha_n z$ , где  $\alpha_n = 2\pi n/l$ . Применяем преобразование (1.1) и используем результаты работы [1]. Тогда в окончательном виде для  $n$ -го члена разложения в ряд Фурье по  $z$  потенциала на крыле найдем

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left[s\left(t + \frac{Mx}{a\sqrt{M^2-1}}\right)\right] \Psi_n(x, 0, s) \frac{ds}{s} \\ \Psi_n(x, y, s) &= \int_0^x V_n(\xi, s) J_0[\lambda_n \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}] d\xi + \\ &+ \iint_D f_n(x, y, s) J_0[\lambda_n \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 &= \alpha_n^2 - \frac{1}{M^2-1} \left(\frac{s}{a}\right)^2, \quad v = \frac{M}{\sqrt{M^2-1}} \frac{s}{a}, \quad V_n(x, s) = se^{-vx} \int_0^{\infty} e^{-st} v_n(x, t) dt \\ f_n(x, y, s) &= se^{-vx} \left[ 2 \frac{M}{a\sqrt{M^2-1}} \frac{\partial\varphi_n(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{s}{a^2} \varphi_n(x, y, 0) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial\varphi_n(x, y, 0)}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Здесь  $D$  — характеристический треугольник с вершиной в точке  $(x, y)$ .

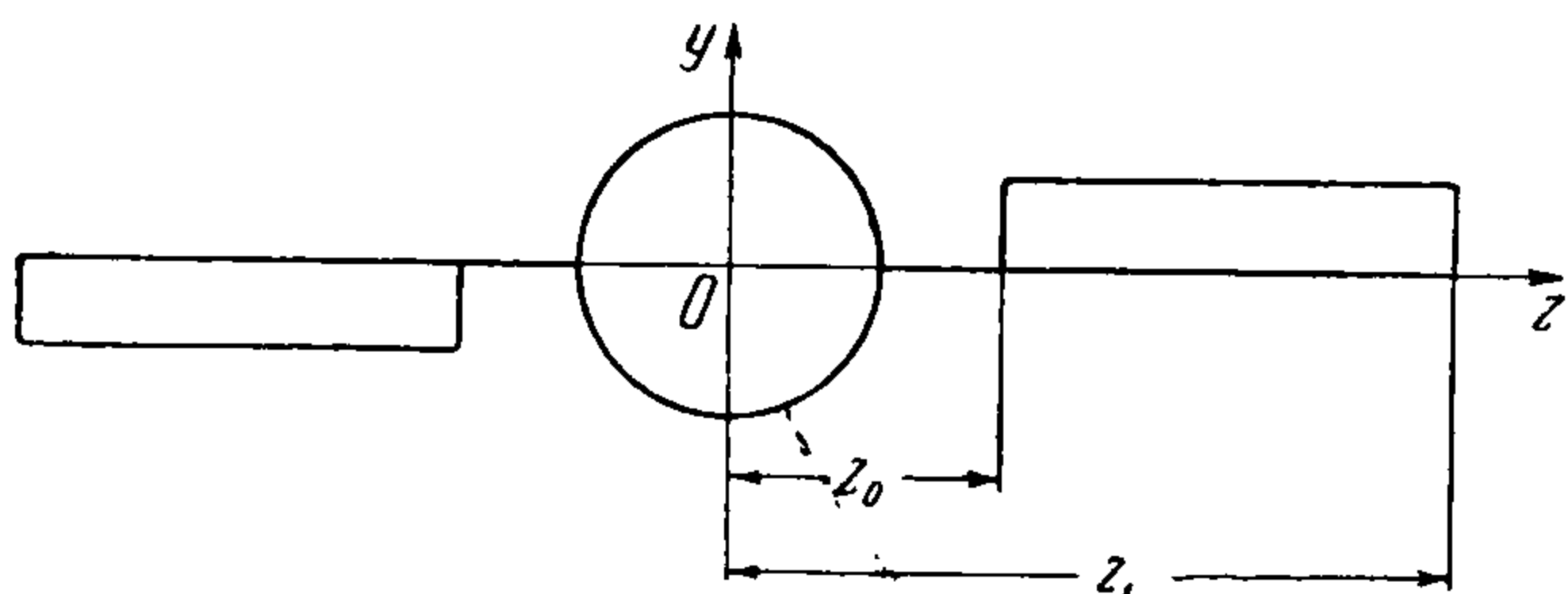
В виде примера рассмотрим два случая задачи типа (1.2), полагая, что при  $t = 0$  имеет место установившийся режим и  $f_n(x, y, s) = 0$ . А именно,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{t \geq 0} \text{ на } S = \chi(x) \exp \omega t, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{t \geq 0} \text{ на } S = \frac{1}{m!} \chi_m(x) (\omega t)^m \quad (1.6)$$

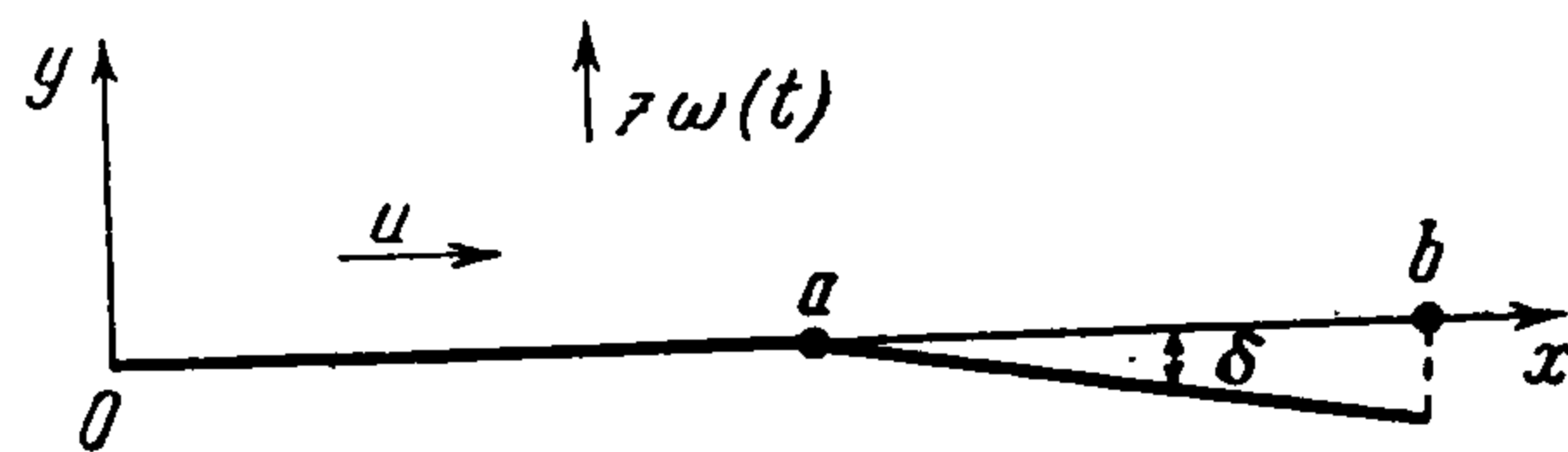
Для первого из них получается

$$\varphi(x, 0, t) = e^{\omega t} \int_0^x \chi(\xi) \exp \frac{M\omega(x-\xi)}{a\sqrt{M^2-1}} J_0 \left[ (x-\xi) \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{M^2-1} \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \right] d\xi \quad (1.7)$$

Интересно отметить, что отсюда при  $\omega = i\omega_0$  получается формула, выведенная



Фиг. 2



Фиг. 3

Е. А. Красильщиковой [1]. Это совпадение является следствием нераспространения возмущений против потока ( $M > 1$ ). Во втором случае (1.6) получим

$$\varphi(x, 0, t) = \omega^m \int_0^x \chi_m(\xi) C_m(x-\xi, t) d\xi \quad (1.8)$$

$$C_m(x-\xi, t) = \sum_{k=0}^{E[1/2m]} \delta_k(x-\xi) \frac{J_0^{(k)}[\alpha(x-\xi)]}{k!} \frac{1}{(m-2k)!} \left[ t + \frac{M(x-\xi)}{a\sqrt{M^2-1}} \right]^{m-2k}$$

$$\delta_k(x) = 1 \quad \text{при } k=0, \quad \delta_k = \frac{x}{a^2(M^2-1)2\alpha} \quad \text{при } k>0$$

При  $m=1$

$$\varphi(x, 0, t) = \omega \int_0^x \left[ t + \frac{M(x-\xi)}{a\sqrt{M^2-1}} \right] \chi_1(\xi) J_0[\alpha(x-\xi)] d\xi \quad (1.9)$$

При  $\chi = \text{const}$  интеграл представим рядом по  $J_{2k+1}(\alpha x)$ . При  $m=0$

$$\varphi(x, 0, t) = \int_0^x \chi(\xi) J_0[\alpha(x-\xi)] d\xi \quad (1.10)$$

Если, кроме того,  $\chi(\xi) = -u\alpha_0$  (установившееся обтекание пластинки), то, заменяя  $x$  на  $x/\sqrt{M^2-1}$ , из (1.10) получим известную формулу

$$\varphi(x, 0, t) = \varphi_0(x, 0) = -\frac{u\alpha_0 x}{\sqrt{M^2-1}} \quad (1.11)$$

Переходим к задачам типа (1.4).

§ 2. В качестве первого примера рассмотрим вращение осесимметрического тела в сверхзвуковом потоке под действием внезапно отклоненных элеронов. Наложим следующие ограничения:

а) крыло и элероны имеют достаточно большие удлинения, так что приближенно может быть принята гипотеза плоских сечений;

б) рассматриваются лишь медленные вращения тела вокруг продольной оси, так что углы атаки крыльев и элеронов достаточно малы, и допускается применение линеаризованных уравнений аэродинамики.

На фиг. 2 изображен вид спереди при отклоненных элеронах; фиг. 3 изображает сечение крыла плоскостью  $z = \text{const}$  на участке расположения элерона, отклоненного вниз. Обозначения  $z_0, z_1, a, b$  и  $\delta$  показаны на чертеже. В дальнейшем, кроме того, обозначаем через  $I$  момент инерции тела относительно оси  $x$ , через  $\omega = \omega(t)$  — угловую скорость вращения, через  $M = M(t)$  — вращающий момент от внешних (аэродинамических) сил, приложенных к телу.

Будем решать следующую задачу: в момент времени  $t=0$  элероны внезапно переключаются на постоянный угол  $\delta$ , и тело начинает вращаться вокруг продольной оси

Ох. Требуется вычислить угловую скорость вращения  $\omega = \omega(t)$  и исследовать поведение тела при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. в конечном счете найти  $\lim \omega(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Уравнение вращения вокруг оси  $x$  записывается в следующем виде:

$$I\dot{\omega} = M(t) \quad (M(t) = 2 \int_0^{z_1} z dz \int_0^b p(x, z, t) dx) \quad (2.1)$$

Здесь  $p(x, z, t)$  — величина избыточного давления, определяемая через потенциал скоростей по формуле Лагранжа — Коши.

Применяя к (2.1) преобразование типа (1.1) и снова возвращаясь к переменной  $t$ , после несложных преобразований в случае  $\omega(0) = 0$  получим

$$\omega(t) = \omega_1 \left[ 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \frac{\Delta(a, s)}{\Delta(b, s)} \frac{ds}{s} \right] \quad (2.2)$$

$$\Delta(x, s) = js - [sB(v, \lambda, x) + uA(v, \lambda, x)]$$

$$\omega_1 = \frac{3(z_1^2 - z_0^2)}{2(z_1^3 - z_0^3)} u\delta, \quad j = \frac{3J}{2\rho(z_1^3 - z_0^3)} \quad (2.3)$$

$$A(v, \lambda, x) = \int_0^x e^{vx} J_0(\lambda x) dx, \quad B(v, \lambda, x) = \int_0^x A(v, \lambda, x) dx$$

Пользуясь заменой  $\sigma = st$  и переходя к пределу в (2.2), легко получить

$$\lim \omega(t) = \frac{3(z_1^2 - z_0^2)}{2(z_1^3 - z_0^3)} \frac{b-a}{b} u\delta = \omega_\infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

Величина  $\omega_\infty$  равна скорости установившегося вращения тела при отклонении элеронов на угол  $\delta$ .

§ 3. В качестве второго примера рассмотрим вибрации упругих пластин, помещенных в сверхзвуковой поток газа (фиг. 1). В обозначениях [3] уравнение совместных колебаний системы «пластинка-поток» принимает вид:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{\gamma h}{Dg} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w = \frac{1}{D} p(x, z, t) \quad (3.1)$$

причем

$$\frac{\partial w(x, z, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s, \quad p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_s$$

Применяем к (3.1) преобразование типа (1.1). Обозначая индексом 0 начальные значения прогиба  $w$  и нормальной скорости  $v_N$  на пластине, из (3.1) получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 W(x, z, s) + \frac{\gamma h}{Dg} [s^2 W(x, z, s) - sv_{N0}(x, z) - s^2 w_0(x, z)] = \\ & = \frac{1}{D} P(x, z, s) \quad \{P(x, z, s) = \text{Lap}_t [p(x, z, t)]\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Разлагая в ряд по  $\exp i\alpha_n z$  и применяя повторное преобразование Лапласа по  $x$ , придем к точному выражению  $w_n(x, t)$  в виде

$$w_n(x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} e^{px} \frac{dp}{p} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} W_n^\times(p, s) \frac{ds}{s} \quad (3.3)$$

$$[W_n^\times = \text{Lap}_x(W), \quad W = \text{Lap}_t(w)]$$

$$\begin{aligned} W_n^\times(p, s) = & \frac{D V \sqrt{(p-v)^2 + \lambda_n^2}}{D V \sqrt{(p-v)^2 + \lambda_n^2} (p^2 - \alpha_n^2)^2 - \rho s (s + up)} \left\{ \sum_{k=1}^4 p^k \frac{\partial^{4-k} W_n(0, s)}{\partial x^{4-k}} - \right. \\ & \left. - 2\alpha_n^2 \sum_{k=1}^2 p^k \frac{\partial^{2-k} W_n(0, s)}{\partial x^{2-k}} + \left[ s^2 - \frac{\rho s}{D V \sqrt{(p-v)^2 + \lambda_n^2}} \frac{s + up}{s} \right] w_{0n}^\times(p) + sv_{N0}^{(n)\times}(p) \right\} \end{aligned}$$

Вычисления по формуле (3.3) могут быть выполнены до конца. Однако, ввиду их чрезвычайной громоздкости обратимся к методу малого параметра, позволяющему приближенно решать уравнение (3.2), минуя преобразование Лапласа по  $x$ .

Вводим следующие безразмерные величины:

$$x_1 = \frac{x}{b}, \quad \alpha_{n1} = b\alpha_n, \quad s_1 = \frac{bs}{u}, \quad v_1 = \frac{v}{b}, \quad \lambda_{n1} = \frac{\lambda_n}{b}, \quad \varepsilon = \frac{12(1-v_p^2)\rho u^2}{E}$$

$$v_{N1} = \frac{v_N}{u}, \quad w_1 = \frac{w}{b}, \quad h_1 = \frac{h}{b}, \quad m = \frac{\varepsilon}{h_1^3}, \quad m_1 = \frac{\varepsilon}{h_1^2} \Delta, \quad \Delta = \frac{\gamma}{\rho gb}$$

(в дальнейшем для удобства индекс 1 опущен). Разлагая в ряд по  $\exp i\alpha_n z$ , представим  $n$ -й коэффициент решения формулой

$$W_n(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} m^k U_k^{(n)}(x, s) \quad (3.4)$$

Приведя (3.2) к безразмерному виду, получим следующую систему уравнений для последовательного определения  $U_k^{(n)}(x, s)$ :

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} - \alpha_n^2 \right)^2 + m_1 s^2 \right] U_0^{(n)}(x, s) = m_1 [s^2 w_0^{(n)}(x) + s v_{N0}^{(n)}(x)] \quad (3.5)$$

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} - \alpha_n^2 \right)^2 + m_1 s^2 \right] U_1^{(n)}(x, s) =$$

$$= s \left( s + \frac{d}{dx} \right) \int_0^x [U_0^{(n)}(\xi, s) - w_0^{(n)}(\xi)] e^{v(x-\xi)} J[\lambda_n(x-\xi)] d\xi$$

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} - \alpha_n^2 \right)^2 + m_1 s^2 \right] U_k^{(n)}(x, s) =$$

$$= s \left( s + \frac{d}{dx} \right) \int_0^x U_{k-1}^{(n)}(\xi, s) e^{v(x-\xi)} J_0[\lambda_n(x-\xi)] d\xi \quad (k \geq 2)$$

Малость параметра  $m$  соответствует случаю весьма жесткой оболочки, имеющему практический интерес.

Исследуем решения (3.5). Первое из уравнений (3.5) определяет вибрации оболочки в пустоте. Очевидно,  $U_0^{(n)}$  должно быть найдено с учетом контурных условий крепления оболочки. Остальные коэффициенты  $U_k^{(n)}$ , определяющие поправку на влияние потока, находятся из соответствующих неоднородных уравнений при нулевых условиях закрепления на контуре.

Будем считать, что собственные колебания оболочки в пустоте с учетом условий крепления на контуре известны и могут быть представлены в следующем виде:

$$w_c(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_c^{(n)}(x, t) e^{i\alpha_n z}, \quad w_c^{(n)}(x, t) = \sum_j C_j e^{(\gamma_j x + \omega_j t) i} \quad (3.6)$$

Начальными условиями зададимся в виде рядов Фурье:

$$w_0^{(n)}(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_{nr} e^{i\beta_r x}, \quad v_{N0}^{(n)}(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} B_{nr} e^{i\beta_r x}, \quad \beta_r = \frac{2\pi r}{b} \quad (3.7)$$

На основании (3.6)–(3.7) в нулевом приближении получим

$$U_0^{(n)}(x, s) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{nr} e^{i\beta_r x} + U_c^{(n)}(x, s) \quad (3.8)$$

$$U_c^{(n)}(x, s) = \sum_j \frac{C_j}{s - i\omega_j} e^{i\gamma_j x}, \quad C_{nr} = m_1 \frac{s^2 A_{nr} + s B_{nr}}{(\beta_r^2 + \alpha_n^2)^2 + m_1 s^2} \quad (3.9)$$

Полагая  $m$  достаточно малым, ограничимся вычислением только первого члена  $U_1^{(n)}$ , дающего поправку на влияние потока. Получим уравнение

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} - \alpha_n^2 \right)^2 + m_1 s^2 \right] U_1^{(n)}(x, s) = \sum_j A s \left( s + \frac{d}{ds} \right) \int_0^x e^{ip\xi + \nu(x-\xi)} J_0[\lambda_n(x-\xi)] d\xi \quad (3.10)$$

Справа стоит сумма членов, коэффициенты которых выражаются через ранее введенные величины следующим образом:

$$A = \frac{C_j}{s - i\omega_j} \quad \text{либо } C_{nr}, \quad p = \gamma_j \quad \text{либо } \beta_r \quad (3.11)$$

Первыми из значений  $A$  и  $p$  в (3.11) представлены контурные условия закрепления, а вторыми — начальные условия.

Решение уравнения (3.10) с последующим переходом от  $U_1^{(n)}(x, s)$  к оригиналу  $w_1^{(n)}(x, t)$  является хотя и несложной, но довольно громоздкой операцией. Ниже приводятся окончательные результаты вычислений.

Разделяя  $U_1^{(n)}$  на части, зависящие от начальных  $U_{10}^{(n)}$  и контурных (граничных)  $U_{1*}^{(n)}$  условий, будем иметь

$$U_1^{(n)}(x, s) = \sum_j [U_{1*}^{(n)\times} - U_{1*}^{(n)\times\times}] + \sum_j [U_{10}^{(n)\times} - U_{10}^{(n)\times\times}] \quad (3.12)$$

$$U_1^{(n)\times}(x, s) = \sum_j A s \left( \frac{s - k_j}{ip - k_j} + 1 \right) e^{ipx} \int_0^x e^{(\nu - ip)\xi} J_0(\lambda\xi) d\xi$$

$$U_1^{(n)\times\times}(x, s) = \sum_j A s \frac{s - k_j}{ip - k_j} e^{ik_j x} \int_0^x e^{(\nu - ik_j)\xi} J_0(\lambda\xi) d\xi$$

Здесь  $A, p$  определены (3.11) для начальных (индекс 0) и граничных (индекс  $\times$ ) условий, а

$$k_j = \pm \sqrt{\alpha_n^2 \pm is\sqrt{m_1}} \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

В случае легких оболочек ( $m_1 \approx 0$ ) вычисление оригинала  $w_1^{(n)}(x, t)$  выполняется особенно просто по одним только вычетам подынтегральной функции в интеграле Римана-Меллина:

$$w_1^{(n)}(x, t) = \sum_j C_j \left[ e^{i(\gamma_j x + \omega_j t)} \left( \frac{\omega_j - \alpha_n}{\gamma_j - \alpha_n} + 1 \right) \int_0^x e^{i(\nu_0 \omega_j + \gamma_j)\xi} J_0(\lambda_n' \xi) d\xi + \frac{\omega_j - \alpha_n}{\gamma_j - \alpha_n} e^{i(\alpha_n x + \omega_j t)} \int_0^x e^{i(\nu_0 \omega_j - \alpha_n)\xi} J_0(\lambda_n' \xi) d\xi \right] \quad (3.13)$$

Здесь  $\lambda_n'$  получается из  $\lambda_n$  заменой  $s$  на  $i\omega_j$ ; интегралы, входящие в (3.13), известны, и для них имеются таблицы [4]. Кроме того,  $\nu_0 = M/a\sqrt{M^2 - 1}$ .

В более общем случае  $m_1 \neq 0$  вычисление оригинала  $w_1^{(n)}(x, t)$  осложняется появлением точек разветвления подынтегральной функции  $s_{p1, 2} = \pm i\alpha_n^2/\sqrt{m_1}$ , как это следует из выражения для  $k_j$ .

Оценка интегралов по соответствующим разрезам при больших значениях времени показывает, что в общем решении появятся члены, растущие во времени пропорционально  $\sqrt{t}$  и  $t$ .

Интересно отметить, что в частном случае  $m_1 \approx 0$  поправка на влияние потока  $w_1^{(n)}(x, t)$  сохраняет такую же зависимость от времени, как и основной член  $w_0^{(n)}(x, t)$ , определяющий в данном примере собственные колебания оболочки в пустоте. Таким образом, в случае весьма жестких легких оболочек поправка на влияние потока сказывается на величине амплитуды, так что в общем виде

$$w(x, z, t) \approx \sum_j [A_i \text{собств}(x, z) + mB_j(x, z)] e^{i\omega_j t} \quad (3.14)$$

Здесь  $mB_j$  — поправка на влияние потока, взятая в первом приближении по формуле (3.13).

Поступила 25 III 1955

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.
2. Красильщикова Е. А. Неустойчивые движения крыла бесконечного размаха. Известия АН СССР, ОТН, вып. 2, 1954.
3. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. ГИТТЛ, 1949.
4. Schwarz L. Untersuchung einiger mit den Zylinderfunctionen nullter Ordnung verwandter Funktionen. Luftfahrtforschung, Bd. 20, 1944, pp. 340—372.

**ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНОЙ, ОКОНЧИВАЮЩЕЙСЯ ИСКРИВЛЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ**

Ф. И. Франкль  
(Фрунзе)

В работе [1] автор рассматривал названную проблему в частном случае, когда сверхзвуковая зона оканчивается прямым скачком уплотнения.

Была сформулирована краевая задача в плоскости  $\theta\eta$  ( $\theta$  — угол наклона скорости,  $\eta$  — введенная автором функция модуля скорости), приводящая к обтеканию указанного вида.

В случае, когда скачок уплотнения искривленный, получается несколько более сложная краевая задача.

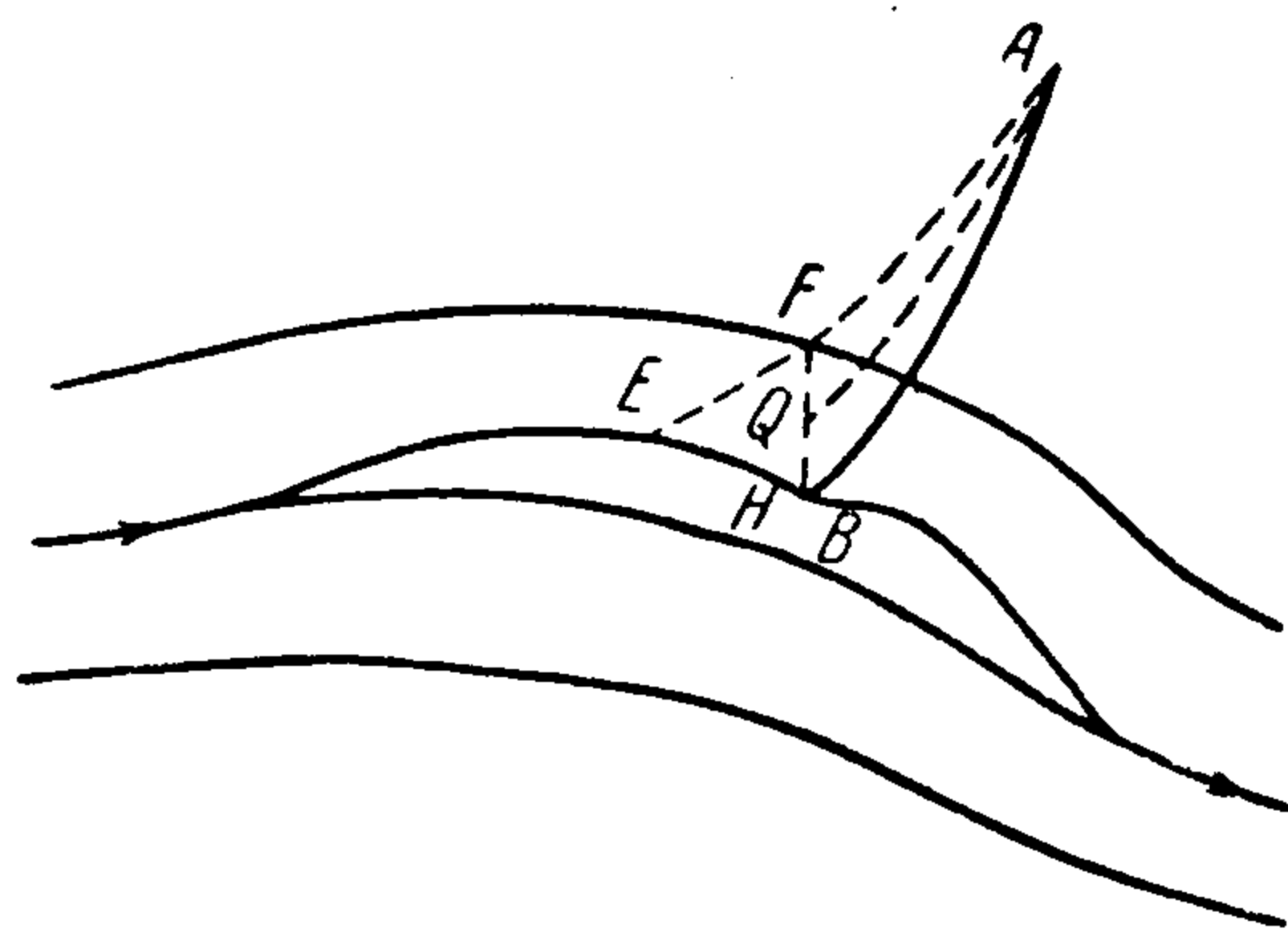
Пусть рассматриваемый газ является газом Трикоми-Фальковича, так что имеем для функции тока уравнение

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1)$$

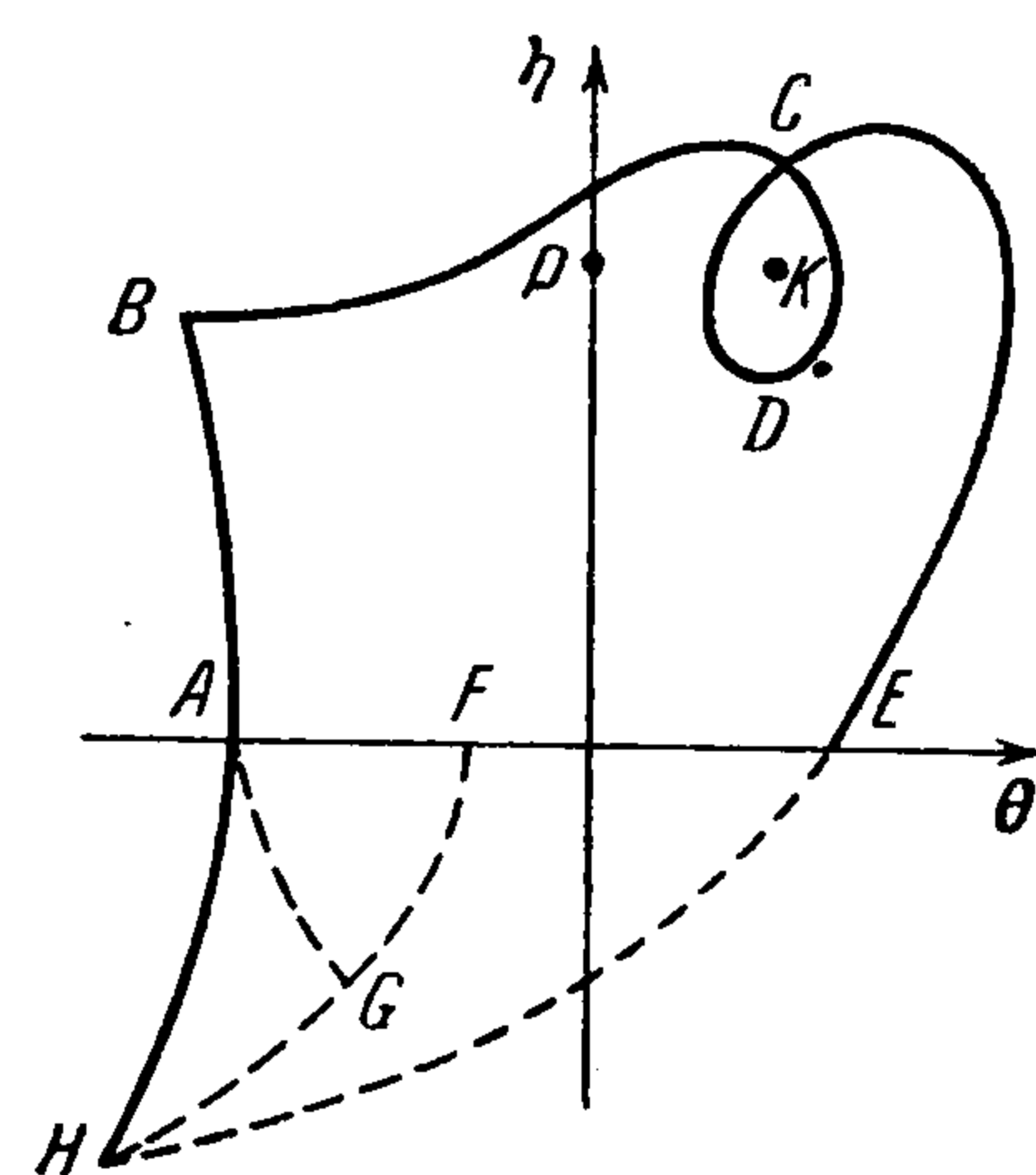
Ограничиваемся сперва случаем существования циркуляции, отличной от нуля.

Пусть обтекание происходит согласно фиг. 1.

В плоскости годографа имеем соответственно фиг. 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь  $FGH$  — характеристика уравнения (1). Решение ищется в области  $ABCDCEFGHA$ ; при этом допустима многолистность области с заданными точками разветвления (на фигуре точка  $K$ ). Этим точкам разветвления соответствуют в физической плоскости точки нулевого ускорения, и в них функция тока должна быть конечной; точки разветвления могут, однако, отсутствовать, и область может быть однолистной. Точка  $P$  на оси  $\eta$  соответствует бесконечно отдаленной точке физической плоскости. Дуги  $AH$  и  $AB$  соответствуют передней (сверхзвуковой) и задней (дозвуковой) сторонам скачка уплотнения.