# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

**В. Е. Гермаидзе**

(Свердловск)

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{1}$$

где функции $X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ определены и непрерывны в области

$$\|x\| < H, \qquad 0 \leqslant t < \infty \qquad (\|x\| = \sup\{|x_1| \ldots |x_n|\}) \tag{2}$$

удовлетворяют в этой области условиям Липшица по переменным $x_j$:

$$|X_s(t, x_1'', \ldots, x_n'') - X_s(t, x_1', \ldots, x_n')| < L\|x'' - x'\| \tag{3}$$

Кроме того, $X(t, 0 \ldots 0) \equiv 0$.

Функции $R_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ в области (2) удовлетворяют неравенствам

$$|R_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < \|x\| \varphi(t) \tag{4}$$

Наряду с системой (1) будем рассматривать уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{5}$$

*Теорема.* Пусть любое решение уравнений (5) при начальных значениях из области (2) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t_0, x_0, t)\| \leqslant B\|x_0\| \exp\{-\alpha(t - t_0)\} \qquad (t > t_0) \tag{6}$$

где $B$, $\alpha$ — положительные постоянные, не зависящие от $t_0$. Если существует по крайней мере одно $T > 0$ такое, что при всех $t_0 \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(\xi)\, d\xi < \gamma$$

$$\left(\gamma = \frac{c_2}{c_1^2}(1 - q),\ c_1 = \frac{e^{L\theta} - 1}{L},\ c_2 = \frac{e^{\alpha\theta} - 1}{\alpha B},\ \theta = \frac{1}{\alpha}\ln 2B,\ 0 < q < 1\right) \tag{7}$$

то нулевое решение уравнений (1) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Уравнения (5) в области (2) при выполнении условий Липшица и неравенств (6) допускают функцию Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$:

$$V(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) = \int_{t_0-\theta}^{t_0} \|x(t_0, x_0, t)\|\, dt \tag{8}$$

Опираясь на условие (6) и неравенство

$$\|x(t_0, x_0'', t) - x(t_0, x_0', t)\| \leqslant e^{L[t-t_0]}\|x_0'' - x_0'\| \tag{9}$$

можно доказать, что функция $V$ удовлетворяет следующим оценкам:

$$c_2\|x\| \leqslant V(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_1\|x\| \tag{10}$$

$$(dV/dt)_{(5)} \leqslant -\|x\| \tag{11}$$

$$|V(t, x_1'', \ldots, x_n'') - V(t, x_1', \ldots, x_n')| < c_1\|x'' - x'\| \tag{12}$$

где $c_1$ и $c_2$ даны формулами (7).

Неравенства (10) и (11) показывают, что функция $V$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [1].

Следуя замечанию Н. Г. Четаева [2], будем искать функцию Ляпунова для уравнений (1) в виде $W = f(t)V$. Положим $f(t) = e^{\beta(t)}$, следовательно,

$$W(t, x_1, \ldots, x_n) = e^{\beta(t)} V(t, x, \ldots, x_n) \tag{13}$$

Согласно второму методу Ляпунова следует вычислить $dW/dt$ в силу (1). Однако для функции $V$ не доказано существование частных производных $\partial V/\partial x_j$.

Поэтому вместо $dW/dt$ вычислим $\overline{\lim}\,(\Delta W/\Delta t)$ при $\Delta t\to +0$ в силу уравнений (1)[1]:

$$\overline{\lim_{\Delta t\to +0}}\frac{\Delta W}{\Delta t}\leqslant e^{\beta(t)}\left\{\beta'(t)+\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(5)}+\right.$$
$$\left.+\overline{\lim_{\Delta t\to +0}}\frac{V(t+\Delta t, x_1'', \ldots, x_n'')-V(t+\Delta t, x_1', \ldots, x_n')}{\Delta t}\right\} \tag{14}$$

где $(x_1'', \ldots, x_n'')$ — точка на интегральной кривой (1), а $(x_1', \ldots, x_n')$ — точка на интегральной кривой уравнений (5), причем обе кривые в момент $t$ выходят из общей точки $(x_1, \ldots, x_n)$. Применяя к неравенству (15) оценки (10), (11), (12) и принимая во внимание, что в силу (4)

$$\overline{\lim_{\Delta t\to +0}}\frac{\|x''-x'\|}{\Delta t}\leqslant\|x\|\,\varphi(t) \tag{15}$$

получим

$$\overline{\lim_{\Delta t\to +0}}\frac{\Delta W}{\Delta t}\leqslant\left\{\beta'(t)-\frac{1}{c_1}+\frac{c_1}{c_2}\varphi(t)\right\}W \tag{16}$$

Положим

$$\beta(t)=\frac{1-q}{c_1}t-\frac{c_1}{c_2}\int_0^t\varphi(\xi)\,d\xi-\int_0^t\omega(\xi)\,d\xi \tag{17}$$

где $\omega(t)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{KT}^{KT+T}\omega(\xi)\,d\xi=\frac{1-q}{c_1}T-\frac{c_1}{c_2}\int_{KT}^{KT+T}\varphi(\xi)\,d\xi\qquad (K=0, 1, \ldots) \tag{18}$$

Существование $\omega(t)$ следует из условия (7). Теперь легко проверить, что выполняются неравенства

$$|\beta(t)\|\leqslant\frac{1-q}{c_1}T,\qquad \beta(KT)=0\qquad (K=0, 1, \ldots) \tag{19}$$

$$\overline{\lim_{\Delta t\to +0}}\frac{\Delta W}{\Delta t}\leqslant-\left(\frac{q}{c_1}+\omega(t)\right)W \tag{20}$$

Сопоставляя (10), (13), (19) и (20), получим

$$c_4\|x\|\leqslant W(t, x_1, \ldots, x_n)\leqslant c_3\|x\| \tag{21}$$

$$\overline{\lim_{\Delta t\to +0}}\frac{\Delta W}{\Delta t}\leqslant-\frac{q}{c_1}W \tag{22}$$

где

$$c_3=c_1\exp\left\{\frac{1-q}{c_1}T\right\},\qquad c_4=c_2\exp\left\{-\frac{1-q}{c_1}T\right\}$$

Итак, в силу неравенств (21) и (22) $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ суть определенно-положительная функция, допускающая бесконечно малый высший предел, верхняя правая производная которой, вычисленная в силу уравнений (1), есть функция определенно-отрицательная.

Следовательно, согласно теореме Ляпунова нулевое решение уравнений (1) асимптотически устойчиво [3].

*Замечание.* Согласно теореме И. Г. Малкина [4] (стр. 134) устойчивость нулевого решения уравнений (1) будет равномерной по $t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}$ (и здесь замена $dW/dt$

---

1 О возможности такой замены в условиях теоремы Ляпунова см. работу [2] (стр. 263).

на $\overline{\lim}(\Delta W / \Delta t)$ при $\Delta t \to +0$ не нарушает справедливости теоремы). Более того, можно проверить, что решения (1) удовлетворяют неравенству

$$\| x(t_0, x_0, t) \| \leqslant B_1 \| x_0 \| \exp\{-\alpha_1 (t - t_0)\} \tag{23}$$

где постоянные $B_1$, $\alpha_1$ просчитываются из оценок (21) и (22). Область начальных данных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, для которых в силу уравнений (1) выполняется неравенство (23), может быть оценена обычным для второго метода Ляпунова способом [2] (стр. 29), исходя из неравенств (21). Эти оценки можно варьировать, изменяя $q\,(0 < q < 1)$.

Условие (7) говорит о малости добавочных членов «в среднем», не требуя малости в каждой точке. Естественно, что если добавочные функции $R_s$ малы в каждой точке $t$, то условие (7) выполняется. Это позволяет рассматривать доказанную теорему как некоторое обобщение результатов, изложенных в работах [5—8] (стр. 47, 96, 104).

В работах [8] (стр. 53) и [9] показано, что если

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, dt = Q < \infty$$

то нулевое решение уравнений (1) асимптотически устойчиво. Условие (7) в этом случае выполняется для всех достаточно больших $T$. Таким образом, рассмотренный критерий охватывает цитируемый результат Беллмана [8] и Антосевича [9].

Для линейных систем $dy / dt = A(t)\, y$, где $A(t)$ — периодическая матрица, условие (6) теоремы в случае асимптотической устойчивости всегда выполняется [5,6]. Запишем систему $dx / dt = P(t)\, x$ в виде $dx / dt = A(t)\, x + [P(t) - A(t)]\, x$. Тогда условие (7) примет вид:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \| p_{ik}(t) - a_{ik}(t) \|\, dt < \delta$$

Критерий такого типа для некоторых линейных систем рассмотрен в работе Н. Я. Лященко [10].

Вообще говоря, оценка (7) для $\gamma$ не может быть улучшена, так как, например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x + \gamma\, | x |$$

эта оценка дает $\gamma = 1 - q\,(0 < q < 1)$, т. е. является точной.

Поступила 26 X 1956

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
3. Красовский Н. Н. Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
4. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
5. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Известия физ.-мат. общества при Казанском университете, т. X, 1936—1937.
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
7. Барбашин Е. А., Скалкина М. А. К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XIX, вып. 5, 1955.
8. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, 1954.
9. Antosiewitcz H. A. Stable systems of differential equations with integrable perturbations terms. J. London, Math., 1956. Soc., 31, № 122, 208—212.
10. Лященко Н. Я. Об асимптотической устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. XCVI, № 2, 1954.