УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

П. А. Кузьмин

(Казань)

§ 1. В исследованиях устойчивости движения по Ляпунову, как известно, сравнивается некоторое определенное «невозмущенное» движение материальной системы, которому отвечает частное решение дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с другими движениями этой системы, возможными для нее при тех же силах, т. е. при тех же правых частях f_s этих уравнений. Рассматривая для упрощения вопрос устойчивости лишь по отношению к фазовым координатам $y_1, \ldots, y_n$, можно это сравнение интерпретировать следующим известным образом.

Пусть невозмущенное движение определено функциями $y_s = \varphi_s(t)$. Вводя отклонения остальных движений от невозмущенного $x_s = y_s - \varphi_s$, занимаемся изучением поведения функций x_s. Эти функции будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum f_{sj} x_j + F_s \tag{2}$$

где коэффициенты f_{sj} представляют частные производные $\partial f_s / \partial y_j$, вычисленные для невозмущенного движения $y_s = \varphi_s(t)$, а функции F_s — дальнейшие члены разложения функций f_s.

По Ляпунову невозмущенное движение устойчиво, если модули отклонений x_s, будучи достаточно малыми вначале, сохраняют малость в заданных границах во все время дальнейшего движения. Таким образом, в этой классической постановке задачи всякое возмущенное движение отличается от невозмущенного лишь иными начальными условиями.

С физической стороны задачу устойчивости движения, пожалуй, чаще интерпретируют так: в некоторый момент времени невозмущенное движение подверглось действию некоторых возмущений типа ударов или небольших кратковременно действующих сил, после прекращения действия которых материальная система вновь попадает в прежнее силовое поле, но, конечно, с измененными начальными данными, что и приводит к необходимости сравнения в указанном смысле возмущенных движений с невозмущенным.

Н. Г. Четаеву принадлежат первые исследования по теории устойчивости движения с учетом возмущающих сил. Другие исследования устойчивости при наличии возмущающих сил («с постоянно действующими возмущениями», как это стали чаще называть) принадлежат Г. Н. Дубошину, Н. А. Артемьеву, И. Г. Малкину, ученикам К. П. Персидского и другим.

Мы здесь не ставим цели охватить все разнообразные и многочисленные определения устойчивости движения, накопившиеся в литературе и вызванные к жизни как физическими требованиями новых задач, так и стремлениями к полноте математических обобщений (как, например, устойчивость по Пуассону, устойчивость на конечном интервале времени, устойчивость в целом и т. п.).

В случае наличия возмущающих сил уравнения возмущенного движения приобретают вместо (2) вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum f_{sj} x_j + F_s + w_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

где дополнительные функции w_s обусловлены действием возмущающих сил.

Необходимо заметить, что функции w_s не могут рассматриваться лишенными каких-либо ограничений, так как полное отсутствие последних лишает задачу устойчивости всякого смысла.

Н. Г. Четаев, рассматривая устойчивость консервативных систем, и возмущающие силы предполагал, например, малыми силами той же физической природы, т. е. допускающими потенциал; он исходил, следовательно, из структурных ограничений для этих сил, которые в остальном предполагались наперед не известными.

В исследованиях прежде всего самого Ляпунова, в задаче об устойчивости по первому приближению, а затем в работах, например, И. Г. Малкина и других названных выше авторов функции w_s не имеют таких ограничений; эти функции носят характер как бы статистически случайных неизвестных возмущающих факторов, достаточно малых, произвольных по структуре и лишь только допускающих существование решений уравнений (3) в рассматриваемой области (впрочем, у Ляпунова они не ниже второго порядка малости, что отчасти является и структурным ограничением).

В настоящей статье, посвященной тоже устойчивости с учетом возмущающих сил, последние имеют структуру, полностью определенную полем основных сил невозмущенных движений, и физическое происхождение возмущающих сил связывается с возмущением разнообразных физических параметров, входящих в дифференциальные уравнения движения любой материальной системы.

Заметим еще, что число степеней свободы для простоты рассматривается конечным, а необходимые требования существования и единственности решений дифференциальных уравнений, фигурирующих в статье, без оговорок предполагаются соблюденными.

§ 2. Пусть мы имеем совокупность движений, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(t, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) \quad (s=1, \ldots, n), \qquad \frac{da_j}{dt} = 0 \quad (j=1, \ldots, k) \tag{4}$$

где a_j — постоянные параметры. Выделим одно определенное невозмущенное движение $y_s = \varphi_s(t)$, $a_j = \alpha_j$ и введем отклонения $x_s = y_s - \varphi_s$, $\varepsilon_j = a_j - \alpha_j$ всех остальных движений, возможных для системы (4).

Заменяя y_s в уравнениях (4) через $\varphi_s + x_s$ и a_s через $\alpha_j + \varepsilon_j$ и предполагая еще для простоты голоморфность вблизи ведущего движения по всем аргументам y_s, a_j, будем иметь дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum f_{si} x_i + \sum f_s^i \varepsilon_i + R_s(t, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k), \qquad \frac{d\varepsilon_j}{dt} = 0$$

$$\left(f_{si} = \frac{\partial f_s}{\partial \varphi_i}, \quad f_s^i = \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_i}\right) \tag{5}$$

Здесь R_s — члены выше первого порядка относительно x_s и ε_j. В отличие от обычных уравнений возмущенного движения здесь имеются возмущения ε_j постоянных параметров, причем в целях известного удобства эти возмущения в уравнениях (5) фигурируют наравне с отклонениями x_s основных переменных.

Ведущее движение по определению устойчиво по отношению к величинам $y_1, \ldots, y_n$, если для заданного положительного числа ε, как бы оно ни было мало, будет выполняться неравенство $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon$ для всякого $t \geqslant t_0$ при условии, что начальные значения отклонений x_{s0}, ε_j удовлетворяют неравенству

$$(x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2) + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 < \delta$$

где δ — достаточно малая положительная постоянная, зависящая от ε.

В отличие от постановки задачи устойчивости при постоянно действующих возмущениях здесь возмущающие силы имеют строго определенный характер.

Какова целесообразность подобной постановки задачи об устойчивости?

Вообразим сначала, что при помощи уравнений (4) движение моделируется достаточно успешно, т. е. что эти уравнения прямо или косвенно опираются на удовлетворительное совпадение с экспериментом, словом, корректность уравнений (4) не подлежит сомнению. Допустим теперь, что теоретически установленное невозмущенное движение, определенное частным решением $y_s = \varphi_s(t)$, $a_j = \alpha_j$, мы хотим пронаблюдать опытным путем, например, с целью какой-либо проверки. Ясно, что вследствие неточностей изготовления объектов наблюдения и неточностей измерений величин $y_1, \ldots, y_n$ в самом опыте мы в действительности будем иметь дело при наблюдении не с невозмущенным движением, а с возмущенным, в котором и начальные значения для переменных y_s будут не теоретические и параметры a_j, представляющие собой некоторые физические константы (масса, размеры и пр.), в опыте будут иметь значения возмущенные: $a_j = \alpha_j + \varepsilon_j$. Таким образом, в опыте будут действовать некоторые возмущающие силы, которые приходится предполагать даже при самой корректной теории вследствие изменений силового поля f_s за счет возмущений параметров. Развивая эту мысль, по-видимому, целесообразно под опытной проверкой невозмущенного движения понимать не единичный эксперимент, а целую их историческую совокупность, в которой точность всяких измерений, изготовления модели и осуществления всевозможных наблюдений постоянно улучшается и, как мы будем предполагать, может стать со временем сколь угодно высокой. Тогда для устойчивого ведущего движения мы будем иметь, что при достаточно малых неточностях в опытах разница между теоретическим движением и его опытной проверкой заключена в заданных малых границах, т. е. опыт в указанном широком смысле этого слова подтверждает теорию в отношении замеряемых величин $y_1, \ldots, y_n$. Наоборот, при неустойчивости движения, как бы мы ни уточняли приемы опыта (измерений, изготовления), мы не можем средствами этого уточнения достигнуть практического совпадения теории с опытом, как было в случае устойчивости; опыт не подтверждает теорию [и это вопреки предположенной корректности основных уравнений (4)]. Это означает, что данный опыт с замером величин $y_1, \ldots, y_n$ не подходит для проверки теории.

Есть и другая сторона вопроса, связанная с моделированием движения при помощи уравнений (4). Допустим, например, что эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(t, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_k) + a_1\Phi_s(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad \frac{da_j}{dt} = 0$$

где Φ_s — известные (хотя бы в пределах требований задачи устойчивости) функции, а параметр a_1 имеет значение, которое пусть можно численно уменьшать, например, более тщательной обработкой связей или еще каким-нибудь способом. Так или иначе представляется научно важным идеализировать явление, рассматривая в теории предельную модель при $a_1 = \alpha_1 = 0$. Тогда сравнение возмущенных движений (для $a_1 = \varepsilon$) с невозмущенным (для $a_1 = 0$) по признакам устойчивости и неустойчивости дает некоторый теоретический критерий законности или незаконности самого моделирования. Конечно, не всякое моделирование подобного вида располагает функциями Φ_s как данными, и тогда мы приходим к известному уже аспекту теории.

Заметим, что n первых уравнений (5), конечно, можно рассматривать как имеющие вид уравнений (3), в которых функциям w_s придали заранее известную аналитическую форму, строго определенную возмущением параметров, как это сказано выше. Разумеется поэтому, что какие-либо достаточные условия устойчивости, полученные при произвольных w_s, будут сохранять свое значение и в нашем случае. Так, например, известна теорема, доказанная И. Г. Малкиным, по которой движение при постоянно действующих возмущениях устойчиво, если существует определенно-положительная функция Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ с ограниченными частными производными $\partial V / \partial x_s$ и определенно-отрицательной производной dV / dt, построенной в силу уравнений (3), где положено $w_s = 0$. Требования этой теоремы в ряде случаев могут оказаться чрезмерно жесткими. Таковы, например, в первую очередь случаи механики с гамильтоновой формой уравнений движения, для которых в случае линейности имеет место неустойчивость при постоянно действующих возмущениях. Хорошо известно, особенно после работ Н. Г. Четаева и его учеников, что при отсутствии возмущающих сил имеют место многочисленные случаи устойчивости механических систем при наличии знакоопределенного интеграла. Ясно, что возмущающими силами при произвольности их структуры, как бы малы они ни были, все такие движения можно сбить на неустойчивые. В частности, классическая теорема

Лагранжа об устойчивости равновесия будет при постоянно действующих возмущениях нарушена. Таким образом, удовлетворение требований устойчивости с возмущающими силами произвольной структуры, по-видимому, слишком дорогая и неоправданная жертва, так как она вынуждает отказ от механики консервативных систем, модели гладких связей и т. д.

Изложенное основывалось на идеях Ляпунова и Н. Г. Четаева; что касается необходимости рассмотрения возмущения физических параметров для возмущенных движений, то она, естественно, вытекает из требований обязательного соответствия теории и эксперимента.

Все предыдущее позволяет также заключить, что алгорифмические методы исследования устойчивости движения при параметрических возмущениях будут находиться среди теорем, подобных общим теоремам Ляпунова, скорее — его второй методы. Несомненно, что задача вообще усложнится. В задачах устойчивости механических систем пока на первый план следует, по-видимому, поставить метод, связанный с построением знакоопределенных интегралов для возмущенных движений, как показывают отдельные примеры.

Поступила 25 VII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. Уч. зап. Казанского университета, 1931.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. Сб. научных трудов Казанского авиационного ин-та, № 5, 1936.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость и классические законы. Там же, № 6, 1936.
5. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, т. IX, 1945.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1946.
7. Артемьев Н. А. Осуществимые движения. Известия АН СССР, сер. матем., № 3, 1939.
8. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГАИШ, т. XIV, вып. 1, 1940.
9. Малкин И. Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. VIII, № 3, 1944.
10. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.