# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ, КОГДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ ОДНУ ПАРУ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ (УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД)

**С. В. Калинин**

(Москва)

Применение метода Ляпунова [1] к исследованию систем уравнений с периодическими коэффициентами требует интеграции уравнений первого приближения. Чтобы обойти это затруднение, пользуются заменой периодических коэффициентов их средними значениями за период. Этим способом Ш. Нугманова [2] получила для некритических случаев достаточные условия устойчивости или неустойчивости периодических решений механических систем со многими степенями свободы.

Решение задачи об устойчивости периодических движений в критическом случае одного нулевого корня проведено автором в работах [3, 4]. Здесь рассматривается решение задачи упрощенным методом в случае двух чисто мнимых корней.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y, \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Здесь $\lambda$ — постоянное число; периодические коэффициенты $p_{sr}$ определяются формулами

$$p_{sr} = c_{sr} + \varepsilon f_{sr}(t), \qquad c_{sr} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p_{sr}(t)\,dt \tag{2}$$

где $f_{sr}$ — периодические функции $t$ с периодом $\omega$.

Функции $X$, $Y$ и $X_s$ имеют члены выше второго порядка относительно переменных $x$, $y$ и $x_s$; коэффициенты при членах разложения $X$, $Y$ и $X_s$ являются также периодическими и имеют структуру (2), указанную выше.

После осреднения за один период периодических коэффициентов система (1) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \overline{X}, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \overline{Y}, \qquad \frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n + \overline{X}_s \tag{3}$$

Характеристическое уравнение (3) имеет два чисто мнимых сопряженных корня $\pm i\lambda$.

Пусть далее уравнение

$$\| c_{sr} - \delta_{sr}\varkappa \| = 0 \qquad (\delta_{ss} = 1, \ \delta_{sr} = 0 \text{ при } r \neq s) \tag{4}$$

не имеет ни нулевых, ни чисто мнимых корней, а имеет лишь корни с отрицательными вещественными частями.

Будем также считать, что функции $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ будут обращаться в нуль, когда $x$ и $y$ равны нулю. Вместо $x$ и $y$ введем полярные координаты $r$ и $\theta$.

После подстановки значений $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ в уравнения (3) получим

$$\frac{dr}{dt} = \overline{X}\cos\theta + \overline{Y}\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \lambda + \Theta, \qquad \frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \cdots + c_{sn}x_n + \overline{X}_s \qquad \left(\Theta = \frac{1}{r}(\overline{Y}\cos\theta - \overline{X}\sin\theta)\right) \tag{5}$$

В этих уравнениях $\Theta$ — аналитическая функция переменных $r$ и $x_s$, разложение которой по степеням этих переменных сходится, когда модули этих величин не превосходят некоторых постоянных пределов; это разложение уничтожается при одновременном равенстве нулю $r$ и всех $x_s$. Коэффициенты разложения суть периодические функции $\theta$ (периода $2\pi$), являющиеся полиномами относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Из этих уравнений также видно, что пока величины $|r|$ и $|x_s|$ не превосходят некоторых постоянных величин (пределов) и остаются достаточно малыми, то $\Theta$

будет непрерывной возрастающей функцией $t$ и что если величины $|r|$ и $|x_s|$ во все время движения остаются достаточно малыми, то с беспредельным возрастанием $t$ будет также возрастать беспредельно и $\theta$. Так как поставленную задачу можно рассматривать как задачу устойчивости по отношению к величинам $r$ и $x_s$, то можно считать, что при решении задачи об устойчивости переменная $\theta$ будет играть такую же роль, как и переменная $t$.

Примем $\theta$ за независимую переменную вместо $t$; связь между новой переменной $\theta$ и прежней переменной $t$ устанавливается вторым уравнением системы (5). Тогда система (5) примет следующий вид:

$$\frac{dr}{d\theta} = rR, \qquad \frac{dx_s}{d\theta} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + Q_s \tag{6}$$

где

$$rR = \frac{\overline{X}\cos\theta + \overline{Y}\sin\theta}{\lambda + \theta}, \qquad q_{sr} = \frac{c_{sr}}{\lambda} \tag{7}$$

Здесь $rR$ — сходящийся ряд, расположенный по степеням $r$ и $x_s$, начиная с членов второго порядка; он образован из рядов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$; коэффициенты при членах этого ряда представляют различные сочетания целых рациональных функций синусов и косинусов кратных дуг $\theta$. Величины $Q_s$ — функции, которые не будут содержать в своих разложениях членов ниже второго измерения относительно $r$ и $x_s$. Функции $rR$ и $Q_s$ будут функциями такого же характера, как и $\theta$.

Из уравнений (5) видно, что если начальное значение $r$ есть нуль, то $r$ будет равняться нулю для всякого значения $\theta$. Таким образом, до тех пор пока значения величин $r$, $x_s$ будут по абсолютной величине достаточно малыми, $r$ будет сохранять знак своего начального значения. Из определения $r$ видно, что можно рассматривать $r$ какого-либо одного знака; будем считать, что $r$ не получает отрицательных значений.

Разложим $rR$ и $Q_s$ по степеням $r$. Обозначим через $rR°$ и $Q_s°$ эти же выражения в том случае, когда все $x_s$ в них являются нулями и когда величины $R$ и $Q_s$ будут только функциями $r$.

Будем считать, что наинизшая степень $r$ принадлежит $rR°$. В конце статьи показано, что степень переменного $r$ будет нечетной, и мы обозначим ее через $2m+1$.

Будем полагать, что разложения $rR$ и $Q_s$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} rR &= (g + \varepsilon G)\, r^{2m+1} + P^{(1)}r + \ldots + P^{(m+1)}r^{m+1} + Q + R' \\ Q_s &= P_s^{(1)}r + P_s^{(2)}r^2 + \ldots + P_s^{(m)}r^m + Q_s' \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $g$ — некоторая постоянная величина, отличная от нуля, $\varepsilon$ — некоторый параметр, $G$ — периодическая функция $\theta$ (с периодом $2\pi$), удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} G d\theta = 0$$

Величины $P^{(k)}$ и $P_s^{(k)}$ в разложениях (8) будут линейными формами, а $Q$—квадратичной формой переменных $x_s$ и будут иметь следующий вид:

$$P^{(k)} = \sum_r (a_r^{(k)} + \varepsilon A_r^{(k)})\, x_r, \qquad P_s^{(k)} = \sum_s (a_s^{(k)} + \varepsilon A_s^{(k)})\, x_s$$

$$Q = \sum_{s,\, r} (b_{sr} + \varepsilon B_{sr})\, x_s x_r \tag{9}$$

где $a_r^{(k)}$, $a_s^{(k)}$, $b_{sr}$ — постоянные, а $A_r^{(k)}$, $A_s^{(k)}$, $B_{sr}$ — периодические функции $\theta$ с периодом $2\pi$, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^{2\pi} A_r^{(k)}\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} A_s^{(k)}\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} B_{sr} d\theta = 0$$

Далее $R'$ представляет собою голоморфную функцию переменных $r$ и $x_s$, разложение которой не имеет членов ниже третьего порядка, причем в линейных относительно $x_s$ членах $r$ содержится в степенях не ниже $m+1$; наконец, $Q_s'$ — также голоморфные функции переменных $r$ и $x_s$, члены разложения которых могут содержать $r$ только в степенях выше $m$ в тех членах, которые не зависят от величин $x_s$.

Сделаем в уравнениях (8) замену периодических коэффициентов осредненными за один период $2\pi$ коэффициентами. Тогда уравнения (8) примут вид:

$$\begin{aligned} rR &= gr^{2m+1} + a^{(1)}r + \ldots + a^{(m+1)}r^{m+1} + \overline{Q} + \overline{R}' \\ Q_s &= a_s^{(1)}r + a_s^{(2)}r^2 + \ldots + a_s^{(m)}r^m + \overline{Q}_s' \end{aligned} \tag{10}$$

где все коэффициенты будут постоянными.

Составим функцию Ляпунова $V$, разрешающую нашу задачу, в следующем виде:

$$V = \frac{1}{2}r^2 + U^{(1)}r^2 + U^{(2)}r^3 + \ldots + U^{(m)}r^{m+1} + W \tag{11}$$

Здесь функции $U^{(k)}$ линейные, а $W$ квадратичная форма переменных $r$ и $x_s$.

Пользуясь соотношениями (10) для производной $dV/d\theta$, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= gr^{2m+2} + a^{(1)}r^2 + \ldots + a^{(m)}r^{m+1} + Qr + \overline{R}'r + \sum_{k=1}^{m}(k+1)\,r^{k+1}U^{(k)}R + \\ &+ \sum_s\sum_k r^{k+1}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s}(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + a_s^{(1)}r + \ldots + a_s^{(m)}r^m + \overline{Q}_s') + \\ &+ \sum_s \frac{\partial W}{\partial x_s}(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + \overline{Q}_s) \end{aligned} \tag{12}$$

Функции $U^{(k)}$ можно выбрать так, чтобы в выражении (12) не было членов, в которые входили бы одновременно и переменная $x_s$ в первой степени и переменная $x$ в степенях ниже $m+1$.

Эти формы определим согласно следующим уравнениям:

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s}(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n) + a^{(1)} = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U^{(2)}}{\partial x_s}(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n) + \sum_s \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s}a_s^{(1)} + a^{(2)} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sum_s \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s}(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n) + \sum_s\sum_{\alpha+\beta=k}^{m}\frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial x_s}a_s^{(\beta)} + a^{(k)} = 0$$

$$\begin{pmatrix} s = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, m-1;\ \beta = 1, \ldots, m-1 \\ \alpha + \beta = k, \quad k = 3, 4, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{13}$$

Это есть система $m$-го порядка с постоянными коэффициентами; она дает возможность определить все функции $U^{(k)}$.

Квадратичную функцию $W$ определим, подчинив ее следующему условию:

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_s}(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n) = g\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{14}$$

После того как определены функции $U^{(k)}$ и $W$, составляется окончательное выражение (11) для функции Ляпунова $V$.

Когда определена функция $V$, то находится производная от этой функции в силу первоначально заданных уравнений возмущенного движения (1).

После этого необходимо определить знак производной $dV/dt$; он будет зависеть от знака квадратичной части выражения (14). Так как функция $V'$ зависит от $t$, то для определения знакоопределенности ее берем такую не зависящую от $t$ определенно-положительную функцию $W$, чтобы одно из двух выражений $V' - \overline{W}$ или $(-\overline{V'} - \overline{W})$ было функцией положительной.

Полагая

$$\overline{W} = \mu (r^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

составим выражение

$$V' - \mu (r^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

которое является квадратичной частью выражения (12). Для этой квадратичной части составим определитель, который в краткой записи имеет следующий вид:

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} g - \mu + w_{00} & w_{01} & \ldots & w_{0n} \\ w_{10} & g - \mu + w_{11} & \ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n0} & w_{n1} & \ldots & g - \mu + w_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь главный диагональный минор порядка $k$ от определителя $D(\mu)$ будет полиномом от $\varepsilon$ со свободным членом $(g-\mu)^k$ и с частью, зависящей от $\varepsilon$ и уничтожающейся вместе с $\varepsilon$.

Производная $V'$ будет представлять по отношению к $r$ и $x_s$ знакоопределенную функцию, которая при достаточно малых значениях $r$ и $x_s$ будет сохранять знак постоянной $g$.

Если $g < 0$, то функция $V$ (при $r \geqslant 0$) будет определенно-положительной относительно переменных $r$ и $x_s$, так как форма $W$ как функция переменных $x_s$ будет определенно-положительной. Функция $V$ будет удовлетворять условиям теоремы Ляпунова об устойчивости по отношению к $r$ и $x_s$, а следовательно, и по отношению к $x$, $y$ и $x_s$, и всякое близкое к нему возмущенное движение стремится к невозмущенному асимптотически.

Если $g > 0$, то функция $W$ будет определенно-отрицательной относительно переменных $x_s$; считая $r$ и $x_s$ сколь угодно малыми, функцию $V$ можно сделать функцией любого знака, в том числе и одного знака с $g$.

Таким образом, при $g > 0$ (при $r \geqslant 0$) функция $V$ будет удовлетворять условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости и невозмущенное движение будет неустойчивым.

При проведении предыдущего анализа предполагалось, что $r$ принимает только положительные значения. Это ограничение можно снять и считать, что $r$ может принимать и отрицательные значения. В последнем случае изложенный выше метод нужно подвергнуть некоторому изменению: нужно в уравнениях (14) величину $g$ заменить величиной $(-1)^k g$, где $k$ обозначает показатель степени переменного $r$ в разложении (10). Функция $V$ будет знакоопределенной и положительной, если $(-1)^k g$ представляет отрицательное число.

Таким образом, приходим к заключению, что при $(-1)^k g < 0$ невозмущенное движение будет устойчиво, а при $(-1)^n g > 0$ движение будет неустойчиво.

Полученные условия будут совпадать с предыдущими только в случае, когда $k$ будет числом нечетным, т. е. $k = 2m + 1$.

Поступила 18 X 1956

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935; то же, ГИТТЛ, 1950.
2. Нугманова Ш. С. Об устойчивости периодических движений, ДАН СССР, т. XLII, № 5, 1944.
3. Калинин С. В. Об устойчивости периодических движений в случае, когда один корень равен нулю. ПММ, т. XII, вып. 5, 1948.
4. Калинин С. В. Об устойчивости периодических движений в случае, когда один корень равен нулю. ПММ, т. XIII, вып. 3, 1949.