ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА[1]

А. А. Лебедев

(Москва)

В работе развиваются методы построения функций Ляпунова, предложенные Н. Г. Четаевым [1, 2]. При этом используются некоторые результаты, полученные автором [3].

Рассмотрим линейную систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{in}(t)\,x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ — вещественные, периодические, ограниченные и непрерывные функции вещественного переменного t.

Для исследования этой системы прямым методом Ляпунова в качестве функции Ляпунова может быть использована квадратичная форма

$$B(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} \beta_{ik}(t)\,x_i x_k \tag{2}$$

Производная dB/dt, составленная в силу уравнений (1), представляет собой квадратичную форму

$$\frac{dB}{dt} = H(t, x_i) = \sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik} x_i x_k \tag{3}$$

коэффициенты которой имеют вид:

$$C_{ik}(t) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}[\beta_{si}p_{sk}(t) + \beta_{sk}p_{si}(t)] + \frac{1}{2}\frac{d\beta_{ik}}{dt} \tag{4}$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

где p_{ij} — значения коэффициентов $p_{ij}(t)$ системы (1) в какой-либо момент времени t, например в начальный момент t_0, или средние значения коэффициентов на каком-либо промежутке времени, например средние значения за период.

Допустим, что все корни характеристического уравнения

$$|\,p_{ij} - \varkappa\delta_{ij}\,| = 0 \tag{6}$$

имеют отрицательные вещественные части. Величины β_{ik} выберем таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$\frac{dB}{dt} = \sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial B}{\partial x_s} = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{7}$$

Тогда для определения величин β_{ik} будем иметь следующую систему $^1/_2 n(n+1)$ уравнений:

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(\beta_{si}p_{sk} + \beta_{sk}p_{si}) = -\delta_{ik} \tag{8}$$

где δ_{ik} — единица Кронекера. Функцию (2), построенную таким приемом, обозначим через B_1.

Представим в выражении (4) коэффициенты $p_{sj}(t)$ суммой

$$p_{sj}(t) = p_{sj} + \Delta p_{sj}(t) \tag{9}$$

---

[1] Доложено на совещании по теории устойчивости и теории колебаний механических систем при Институте механики АН СССР 27 мая 1955 г.

Тогда на основании (8) получим

$$C_{ik}(t) = -\delta_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{s=1} [\beta_{si}\Delta p_{sk}(t) + \beta_{sk}\Delta p_{si}(t)] \tag{10}$$

Если при всех $t \geqslant T$ выполняются неравенства

$$(-1)^r \begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{r1} & \ldots & C_{rr} \end{vmatrix} \geqslant \delta > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

где δ — некоторое положительное число, то асимптотической устойчивости нулевого решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (5) с постоянными коэффициентами p_{ij} отвечает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы [1] (1).

Рассмотрим теперь «характеристическое» уравнение

$$|p_{ij}(t) - \varkappa(t)\delta_{ij}| = 0 \tag{12}$$

Допустим, что все корни $\varkappa_i(t)$ этого уравнения при всех $t \geqslant T$ имеют отрицательные вещественные части. Функции $\beta_{ik}(t)$ выберем так, чтобы они в каждый момент времени удовлетворяли $^1/_2 n(n+1)$ уравнениям

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} [\beta_{si}(t) p_{sk}(t) + \beta_{sk}(t) p_{si}(t)] = -\delta_{ik} \tag{13}$$

аналогичным уравнениям (8). Построенную таким приемом функцию (2) обозначим через B_2.

Пусть при всех $t \geqslant T$ вещественные части всех корней уравнения (12) меньше некоторого отрицательного числа. Тогда квадратичная форма B_2 является определенно-положительной в смысле Ляпунова. Если при этом производная dB_2/dt определенно-отрицательна, т. е. при $t \geqslant T$ выполняются неравенства

$$(-1)^r \begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{r1} & \ldots & C_{rr} \end{vmatrix} \geqslant \delta > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

где

$$C_{ik}(t) = -\delta_{ik} + \frac{1}{2}\frac{d\beta_{ik}(t)}{dt} \tag{15}$$

то нулевое решение уравнений (1) асимптотически устойчиво [2].

Применение рассмотренных способов построения функций Ляпунова не всегда дает решение вопроса об устойчивости. Может оказаться, что производные dB_1/dt и dB_2/dt не являются определенно-отрицательными или что функция B_2, зависящая от t, не является определенно-положительной в смысле Ляпунова, хотя в действительности невозмущенное движение устойчиво. Для решения вопроса об устойчивости в этих случаях при помощи функций B_1 и B_2 предлагается ниже прием, который был применен нами ранее в задаче об устойчивости на конечном интервале времени [3].

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \varphi(t) B(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{16}$$

где B — квадратичная форма (2), а $\varphi(t)$ — положительная, ограниченная и непрерывно дифференцируемая функция. Из ограниченности функций $\varphi(t)$ и $\beta_{ik}(t)$ следует, что функция (16) имеет бесконечно малый высший предел. Производная функции (16), составленная в силу уравнений (1), равна

$$\frac{dV}{dt} = \varphi(H + \psi B) \qquad \left(\psi(t) = \frac{d\ln\varphi(t)}{dt}\right) \tag{17}$$

Укажем условия, которым должна удовлетворять функция $\psi(t)$, чтобы производная dV/dt была знакопостоянной отрицательной. Форма B построена нами таким образом, что в каждый момент t она принимает только положительные значения.

Поэтому формы B и H могут быть одновременно представлены в виде суммы квадратов. При этом квадратичная форма $H+\psi B$ приводится к виду

$$H+\psi B=(\psi-\psi_{*1})\,z_1^2+\ldots+(\psi-\psi_{*n})\,z_n^2 \tag{18}$$

где $\psi_{*1},\ldots,\psi_{*n}$ являются корнями уравнения

$$|\,C_{ik}+\psi\beta_{ik}\,|=0 \tag{19}$$

Все n корней этого уравнения представляют собой вещественные, непрерывные функции от коэффициентов $p_{ij}(t)$ системы (1) и коэффициентов $\beta_{ik}(t)$ квадратичной формы B. Пусть $\psi_k(t)$ — наименьший в каждый момент времени корень уравнения (19). Из (18) вытекает, что производная (17) является знакопостоянной отрицательной тогда и только тогда, когда при всех $t\geqslant T$ выполняется неравенство $\psi(t)\leqslant\leqslant\psi_k(t)$.

Пусть для исследования возмущенного движения построена по правилам, указанным выше, квадратичная форма B. Невозмущенное движение будет устойчиво, если для данной квадратичной формы B может быть выбрана $\varphi(t)$ так, чтобы функция $V=\varphi B$ удовлетворяла основным теоремам Ляпунова об устойчивости. Отсюда следует, что для значений $\varphi(t)$ в каждый момент времени можно указать две границы: верхнюю и нижнюю.

Условие неположительности производной dV/dt определяет верхнюю границу — критическую функцию

$$\varphi_k(t)=\varphi(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\psi_k(t)\,dt$$

Из определения функции $\psi_k(t)$ следует, что составленная в силу уравнений (1) полная производная от функции $V_k=\varphi_k B$ является знакопостоянной отрицательной. Отсюда вытекает следующее свойство верхней границы $\varphi_k(t)$ функций $\varphi(t)$.

Решения $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ линейной системы уравнений (1) для любых начальных возмущений $x_{10},\ldots,x_{n0}$, принадлежащих области

$$\varphi(t_0)\sum_{i,\,k=1}^{n}\beta_{ik}(t_0)\,x_{i0}x_{k0}\leqslant A \tag{20}$$

при всех $t>t_0$ принадлежат области

$$\varphi_k(t)\sum_{i,\,k=1}^{n}\beta_{ik}(t)\,x_ix_k\leqslant A \tag{21}$$

Условие, чтобы функция (16) была определенно-положительной в смысле Ляпунова, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$V(t,x_1,\ldots,x_n)\geqslant W(x_1,\ldots,x_n) \tag{22}$$

определяет нижнюю границу $\varphi_{\text{н}}(t)$ функций $\varphi(t)$.

Для вычисления нижней границы $\varphi_{\text{н}}(t)$ воспользуемся понятием о диаметре области $V\leqslant A$, представляющем собой верхнюю границу расстояний между двумя точками поверхности $V=A$ [3]. Диаметр $D(t)$ области $V=\varphi B\leqslant A$ определяется выражением

$$\frac{D(t)}{D(t_0)}=\frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t)}\sqrt{\frac{\gamma_{\min}(t_0)}{\gamma_{\min}(t)}} \tag{23}$$

где $\gamma_{\min}(t)$ — наименьшее в каждый момент времени характеристическое число матрицы $\|\beta_{ik}\|_1^n$.

Если отношение $D(t)/D(t_0$ является величиной ограниченной, то форма (16) удовлетворяет неравенству (22) и обратно. Условие (22) и требование ограниченности $D(t)/D(t_0)$ равносильны.

Пусть каким-нибудь способом построена функция B, не зависящая от t; тогда

$$\frac{D(t)}{D(t_0)}=\frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t)} \tag{24}$$

Следовательно, для не зависящей от t функции B, например для функции B_1, нижняя граница функций $\varphi(t)$ определяется условием $\varphi_н = \delta > 0$, где δ — некоторое положительное число.

Пусть теперь дана какая-либо функция B, зависящая от t, например функция B_2. Тогда нижняя граница функций $\varphi(t)$ определяется условием

$$\varphi_н(t)\sqrt{\gamma_{\min}(t)} = \delta > 0 \tag{25}$$

Нулевое решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ уравнений (1) будет устойчивым в смысле Ляпунова, если при всех $t \geqslant T$ будет выполняться неравенство $\varphi_k(t) \geqslant \varphi_н(t)$.

Очевидно, что в этом случае может быть построена функция V вида (16), удовлетворяющая основной теореме Ляпунова об устойчивости. (Такой функцией может быть, например, функция $V_k = \varphi_k B$.) При этом устойчивость будет равномерной, что следует из основной теоремы Ляпунова в формулировке К. П. Персидского [4].

Полученные результаты являются справедливыми для любой функции Ляпунова, построенной в виде квадратичной формы, и могут быть сформулированы следующей теоремой.

Теорема. Пусть дана квадратичная форма (2). Нулевое решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ уравнений (1) равномерно устойчиво, если при всех $t \geqslant T$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\gamma_{\min}(t)}\exp\int_T^t \psi_k(t)\,dt \geqslant \delta > 0 \tag{26}$$

где δ — некоторое положительное число.

Примечание. Если дана квадратичная форма, не зависящая от t, то условие (26) принимает вид:

$$-\infty < l \leqslant \int_T^t \psi_k(t)\,dt \tag{27}$$

где l — некоторая постоянная.

Поступила 3 I 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1946.
2. Четаев Н. Г. О наименьшем характеристическом числе. ПММ, т. IX, вып. 3, 1945.
3. Лебедев А. А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
4. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1949.