ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б. С. Разумихин

(Москва)

1. Рассматривается система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

Пусть

$$V(t,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i;j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\cdot x_i x_j \quad (\alpha_{ij}=\alpha_{ji}) \tag{1.2}$$

определенно-положительная квадратичная форма, являющаяся функцией Ляпунова [1] для системы (1.1).

Производная функции V в силу системы (1.1) будет знакоопределенной квадратичной формой U:

$$U(t,x_1,\ldots,x_n)=\frac{dV}{dt}=\sum_{i;j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_i x_j \qquad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{1.3}$$

Н. Г. Четаевым была предложена [2] следующая оценка для функции V[1]:

$$V_0\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_1(t)\,dt\leqslant V\leqslant V_0\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_2(t)\,dt \tag{1.4}$$

где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — соответственно наименьший и наибольший из корней уравнения $\det\|a_{ij}(t)-\lambda\alpha_{ij}(t)\|=0$.

Пользуясь оценкой (1.4), возможно получить оценки для возмущений координат. Действительно, неособенным линейным преобразованием квадратичную форму V можно привести к каноническому виду:

$$V=\sum_{i=1}^{n} h_i y_i^2 \tag{1.5}$$

В силу знакоопределенности существует столь малое положительное число ε такое, что $h_i>\varepsilon>0$ для $i=1,\ldots,n$.

Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$V_0\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_1(t)\,dt\leqslant\sum_{i=1}^{n}h_i y_i^2\leqslant V_0\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_2(t)\,dt \tag{1.6}$$

Так как $h_1y_1^2+\ldots+h_ny_n^2\geqslant h_sy_s^2$ при любом $s=1,\ldots,n$, то

$$h_sy_s^2\leqslant V_0\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_2(t)\,dt, \qquad |y_s|\leqslant\sqrt{\frac{V_0}{h_s}}\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\lambda_2(t)\,dt \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{1.7}$$

Если преобразование квадратичной формы V к каноническому виду ортогонально, то множитель $(V_0/h_s)^{1/2}$ представляет длину соответствующей полуоси A_s° эллипсоида $V=V_0$.

Из оценки (1.6) легко получить оценку для радиуса ρ сферы, содержащей точку возмущенной траектории $\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$. Действительно,

$$h^{(2)}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}h_iy_i^2\geqslant h^{(1)}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \tag{1.8}$$

---

[1] Результаты работы [2] обобщены Н. Г. Четаевым на случай систем вида (1.1).

Здесь $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ — наименьший и наибольший корни уравнения

$$\det \| a_{ij}(t) - \delta_{ij}h \| = 0 \qquad (\delta_{ij} = 1 \text{ для } i = j, \ \delta_{ij} = 0 \text{ для } i \neq j)$$

Так как $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ в силу ортогональности преобразования, то из (1.6) и (1.8) получаем

$$(A_0^{(1)})^2 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_1(t)\,dt \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant (A_0^{(2)})^2 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_2(t)\,dt \quad \left(A_0^{(1)} = \sqrt{\frac{V_0}{h^{(2)}}},\ A_0^{(2)} = \sqrt{\frac{V_0}{h^{(1)}}}\right) \quad (1.9)$$

Очевидно, что $A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$ соответственно длины наименьшей и наибольшей полуосей эллипсоида $V = V_0$. Таким образом, получена искомая оценка:

$$A_0^{(1)} \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \lambda_1(t)\,dt \leqslant \rho \leqslant A_0^{(2)} \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \lambda_2(t)\,dt \qquad (1.10)$$

Метод Якоби приведения квадратичных форм к каноническому виду позволяет получить оценку для координат решения системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. Действительно, преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + k_{12}x_2 + \ldots + k_{1n}x_n \\ y_2 &= \phantom{x_1 + k_{12}} x_2 + \ldots + k_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \phantom{x_1 + k_{12}x_2 + \ldots + k_{2n}} x_n \end{aligned} \qquad (1.11)$$

переводит квадратичную форму (1.5) в квадратичную форму (1.2); при этом

$$h_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2i} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ii} \end{vmatrix} \qquad (1.12)$$

Так как $y_n = x_n$ согласно (1.11), то при $s = n$ на основании (1.7) получаем

$$|x_n| \leqslant \sqrt{V_0 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \lambda_2(t)\,dt}$$

Обозначая $\Delta_{n-1}^{(k)}$ определитель $n-1$-го порядка, получаемый из дискриминанта Δ_n квадратичной формы вычеркиванием столбца k и строки k, получим оценку для любой координаты решения системы (1.1):

$$|x_k| \leqslant \sqrt{V_0 \frac{\Delta_{n-1}^{(k)}}{\Delta_n} \exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \lambda_2(t)\,dt} \qquad (1.13)$$

Оценка (1.4) может служить не только основой для выбора параметров, обеспечивающих устойчивость движения механической системы и необходимое ее качество [2], но позволяет также устанавливать устойчивость очевидного решения системы вида (1.1) при помощи функций, не удовлетворяющих условиям теоремы Ляпунова об устойчивости. Действительно, из оценки (1.13) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема. Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (1.1) устойчиво, если существует знакоопределенная квадратичная форма (1.2), производная которой (1.3) в силу этой системы такова, что при $t > t_0$ существует конечная верхняя грань интеграла

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_2(t)\,dt$$

где $\lambda_2(t)$ — наибольший корень уравнения $\det \| a_{ij}(t) - \lambda a_{ij}(t) \| = 0$.

Из архива редакции 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической системы, ПММ, т. XV, 1951.