

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Б. Л. Минцберг

(Ленинград)

В работе [1] решается задача об определении смещений и напряжений в упругом полупространстве, которое скручивается вследствие поворота жесткого цилиндрического штампа, связанного с границей полупространства посредством трения или сцепления. В настоящей заметке показывается, что эта последняя задача имеет весьма простое и геометрически наглядное решение, если его осуществлять в специальных эллиптических координатах¹.

1. Воспользуемся формулами Черрути [3]

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\mu} z \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{1}{4\pi\mu} z \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w &= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \psi - \frac{1}{4\pi\mu} z \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ X_z &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad Y_z = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\ Z_z &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ Y_y &= \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ X_y &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} \right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где гармонические в полупространстве $z \geq 0$ функции H , F , G имеют вид:

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= - \iint_{\infty} Z_z(x', y', 0) \ln(z + \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}) dx' dy' \\ F(x, y, z) &= - \iint_{\infty} X_z(x', y', 0) \ln(z + \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}) dx' dy' \\ G(x, y, z) &= - \iint_{\infty} Y_z(x', y', 0) \ln(z + \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}) dx' dy' \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}, \quad \psi_1 = \int_{\infty}^z \psi dz \quad (1.4)$$

На границе полупространства $z = 0$

$$u = -\varepsilon y, \quad v = +\varepsilon x, \quad w = 0 \quad (r < a) \quad (1.5)$$

Здесь ε — угол поворота штампа,

$$Z_z = X_z = Y_z = 0 \quad (r > a) \quad (1.6)$$

Введем гармоническую функцию

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\psi}{4\pi(\lambda + \mu)}$$

исчезающую на бесконечности и обращающуюся в нуль при $z = 0$, $r < a$ в силу (1.5) и (1.1). Ее производная

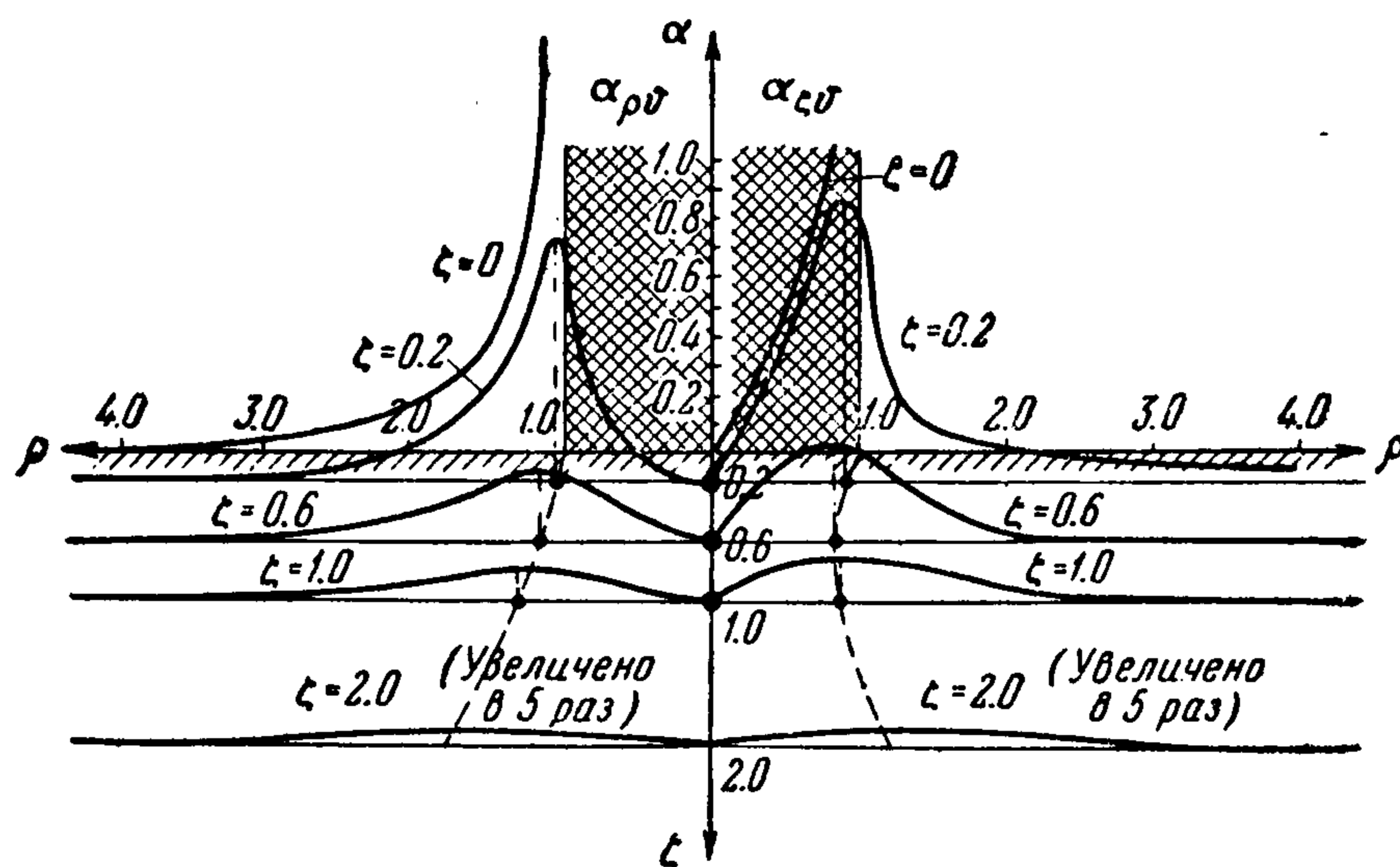
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} \right]$$

¹ Отдельные результаты были получены также в работе [2].

в силу (1.6) и осевой симметрии обращается в нуль при $z=0$ и $r>a$. При этом предполагается, что в зоне контакта $\tau_{rz}=0$. Тогда $\varphi \equiv 0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)$$

Аналогично показывается, что исчезающая на бесконечности гармоническая функция $\partial H / \partial z$ обращается в нуль на границе в зоне контакта (т. е. при $r < a$), а ее



Фиг. 1

нормальная производная $\partial^2 H / \partial z^2$ равна нулю согласно (1.6) и (1.2) при $z=0$ и $r>a$. Тогда $\partial H / \partial z \equiv 0$, а следовательно, $\psi \equiv 0$, $\psi_1 \equiv 0$, $Z_z \equiv 0$, $H \equiv 0$.

Уравнения (1.1) и (1.2) теперь дают

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi\mu} f, & v &= \frac{1}{2\pi\mu} g, & w &= 0 \\ X_z &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial z}, & Y_z &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial g}{\partial z}, & Z_z &= 0 \\ X_x &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial f}{\partial x}, & Y_y &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial g}{\partial y}, & X_y &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Задача свелась к определению двух гармонических функций $f = \partial F / \partial z$ и $g = \partial G / \partial z$ по граничным условиям

$$\begin{aligned} f &= -2\pi\mu\epsilon y, & g &= +2\pi\mu\epsilon x & \text{при } z=0, r < a \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial z} = 0 & & \text{при } z=0, r > a \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Одно из решений этой задачи теории потенциала дано А. И. Лурье^[4] в специальных эллиптических координатах:

$$x = a \sqrt{1+s^2} \sqrt{1-\eta^2} \cos \vartheta, \quad y = a \sqrt{1+s^2} \sqrt{1-\eta^2} \sin \vartheta, \quad z = as\eta \quad (2.1)$$

Поверхности $s = \text{const}$ суть сплюснутые эллипсоиды вращения

$$\frac{x^2}{a^2(1+s^2)} + \frac{y^2}{a^2(1+s^2)} + \frac{z^2}{a^2s^2} = 1$$

вырождающиеся при $s \rightarrow 0$ в диск $z=0$, $r \leq a$. Решение задачи (1.8) имеет вид

$$f = 4\mu\epsilon y \left(\frac{s}{1+s^2} - \text{arc ctg } s \right), \quad g = -4\mu\epsilon x \left(\frac{s}{1+s^2} - \text{arc ctg } s \right) \quad (2.2)$$

Из (1.7) находим

$$X_z \Big|_{z=0} = \frac{4\mu\epsilon}{\pi a} \frac{y}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad Y \Big|_{z=0} = -\frac{4\mu\epsilon}{\pi a} \frac{x}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Отсюда крутящий момент

$$M = \iint (y' X_z - x' Y_z) dx' dy' = \frac{16}{3} \mu \varepsilon a^3$$

По формулам (1.7) определяем все смещения и напряжения в любой точке полу-пространства.

В цилиндрических координатах $\rho = r/a$, $\zeta = z/a$, ϑ получим

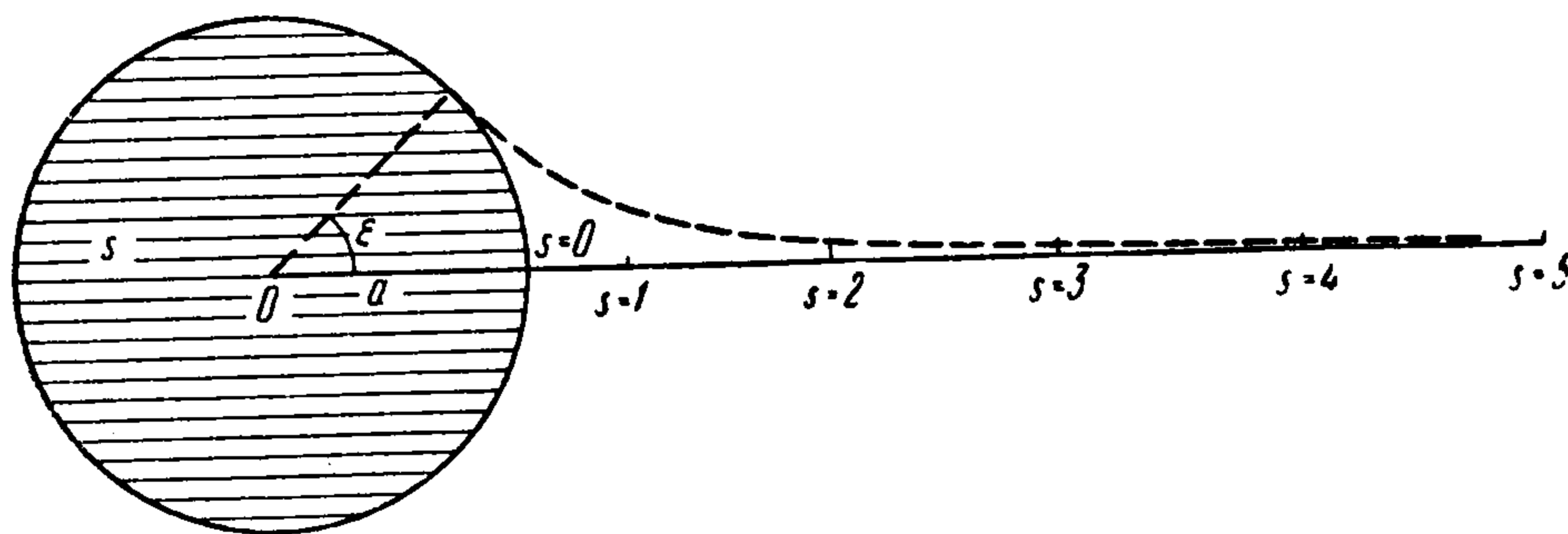
$$\begin{aligned} u_\rho = u_\zeta = 0, \quad u_\vartheta = \varepsilon(s) r, \quad \sigma_\rho = \sigma_\vartheta = \sigma_\zeta = \tau_{\rho\zeta} = 0 \\ \tau_{\rho\vartheta} = -\frac{3M}{4\pi a^3} \alpha_{\rho\vartheta}, \quad \tau_{\zeta\vartheta} = -\frac{3M}{4\pi a^3} \alpha_{\zeta\vartheta} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\varepsilon(s) = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \left(\frac{s}{1+s^2} - \text{arc ctg } s \right), \quad \alpha_{\rho\vartheta} = \frac{s(s^2 - \zeta^2)}{(1+s^2)(s^4 + \zeta^2)} \quad (2.4)$$

$$\rho^2 s^2 = (1+s^2)(s^2 - \zeta^2), \quad \alpha_{\zeta\vartheta} = \frac{\zeta \sqrt{s^2 - \zeta^2}}{\sqrt{1+s^2}(s^4 + \zeta^2)} \quad (2.5)$$

Графики $\alpha_{\rho\vartheta}$, $\alpha_{\zeta\vartheta}$ для различных $\zeta = \text{const}$ даны на фиг. 1. Точки, в которых эти функции имеют максимумы, соединены пунктирной кривой.



Фиг. 2

3. Замечательно простой вид смещения и напряжения приобретают в криволинейной ортогональной системе s , η , ϑ . Именно

$$u_s = u_\eta = 0, \quad u_\vartheta = \varepsilon(s) r, \quad \sigma_s = \sigma_\eta = \sigma_\vartheta = \tau_{s\eta} = \tau_{\eta\vartheta} = 0 \quad (3.1)$$

Единственное, отличное от нуля напряжение

$$\tau_{s\vartheta} = -\frac{3M}{4\pi a^3} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{(1+s^2)\sqrt{s^2+\eta^2}} \quad (3.2)$$

Правильность полученных результатов легко подтверждается непосредственной проверкой.

Полученные формулы показывают, что каждый из полуэллипсоидов $s = \text{const}$ будет, не деформируясь, как твердый, поворачиваться вокруг оси z на угол $\varepsilon(s)$. По мере увеличения s полуоси эллипсоидов увеличиваются, а угол поворота $\varepsilon(s)$ уменьшается, стремясь к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Предельный эллипсоид — круг контакта $s = 0$ — поворачивается на угол $\varepsilon(0) = \varepsilon$. Граница $z = 0$ остается плоской и свободной от нормальных напряжений. На фиг. 2 показан радиальный луч на граничной плоскости после деформации.

Поступила 21 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ростовцев Н. А. К задаче о кручении упругого полупространства. ПММ, т. XIX, вып. 1, 1955.
2. Reissner and Sagoci. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half — Space. Journal of Applied Physics, vol. 15, № 9, 1944.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
4. Лурье А. И. Некоторые контактные задачи теории упругости. ПММ, т. V, вып. 3, 1941.