ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В. Д. Клюшников
(Москва)

В настоящей заметке констатируется факт, что система уравнений пологих оболочек (см. [1])

$$\begin{aligned} \rho\ddot{\psi}+\dot{\psi}-\frac{\psi}{\rho}&=\left(\theta+\frac{\vartheta}{2}\right)\vartheta+f \\ \rho\ddot{\vartheta}+\dot{\vartheta}-\frac{\vartheta}{\rho}&=-k\psi(\theta+\vartheta)-\varphi \end{aligned} \qquad \left(k=12\,(1-\mu^2)\,\frac{r_1^2}{h^2}\right) \tag{1}$$

не есть система типа Эйлера, т. е. не является следствием никакой вариационной проблемы.

В этих уравнениях $\psi(\beta)$ и $\vartheta(\rho)$ — неизвестные функции, ρ — независимая переменная, $\theta(\rho)$ и $f(\rho)$ — известные функции, φ может быть представлено так:

$$\varphi=\omega(\rho)-\beta\int P_t\vartheta\rho\,d\rho,$$

Здесь $\omega(\rho)$, $P_t(\rho)$ — известные функции, β — известное постоянное; в дальнейшем h — толщина, а r_1 — радиус контура оболочки.

Полагая $\rho=x$, $\psi=y_1$, $\vartheta=y_2$, запишем уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_1&\equiv xy_1''+y_1'-\frac{y_1}{x}-\left(\theta+\frac{y_2}{2}\right)y_2-f(x)=0 \\ F_2&\equiv -xy_2''-y_2'+\frac{y_2}{x}-ky_1(\theta+y_2)-\omega(x)+\beta\int P_ty_2x\,dx=0 \end{aligned} \tag{2}$$

Известно (см. [2]), что условиями того, чтобы данная система дифференциальных уравнений

$$F_i(x,\,y_1,\,y_1',\,y_2,\,y_2',\,y_1'',\,y_2'')=0 \qquad (i=1,2) \tag{3}$$

была следствием некоторой вариационной проблемы, является выполнение тождеств:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F_i}{\partial y_j'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F_i}{\partial y_j''}\equiv\frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial y_j''}\equiv\frac{\partial F_j}{\partial y_i''} \\ -\frac{\partial F_i}{\partial y_j'}+2\frac{d}{dx}\frac{\partial F_i}{\partial y_j''}\equiv\frac{\partial F_j}{\partial y_i'} \end{gathered} \qquad (i,j=1,2) \tag{4}$$

Если эти условия выполнены, то существует некоторая функция z такая, что дифференциальные уравнения (3) суть условия экстремума функционала

$$V=\int_{x_0}^{x_1} z\,(x,\,y_1,\,y_1',\,y_2,\,y_2')\,dx$$

Следовательно,

$$F_i\equiv\frac{\partial z}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y_i'} \qquad (i=1,2) \tag{5}$$

Легко проверить, что уравнения (5) удовлетворяют всем условиям (4) тождественно, за исключением первого при $i\neq j$, которое выполняется только при

$$-\theta-y_2\equiv-k\theta-ky_2$$

Отсюда следует, что должно быть

$$k\equiv12\,(1-\mu^2)\,\frac{r_1^2}{h^2}=1$$

Но так как $\mu\leqslant0.5$, то условие $k=1$ не имеет реального смысла, так как

$$\frac{h^2}{r_1^2}\geqslant8$$

Поступила 1 XII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Федосеев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. Оборонгиз, М., 1949.
2. Рапопорт. Обратная задача вариационного исчисления. Изд. ФМО и НИИММ КГУ, т. X, сер. 3, стр. 93, 1938.