Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. М. Белоносов

(Рязань)

В работе рассматривается способ приближенного интегрирования гиперболических дифференциальных уравнений равновесия идеально пластического тела в случае плоской деформации. Наряду с довольно высокой точностью данный метод позволяет получить решение, пригодное для качественного исследования в некоторой области изменения параметров характеристик.

§ 1. Постановка задачи. Задача о плоской деформации идеально пластического тела, как известно [1], приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\chi}{\partial x}-\sin 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\&\frac{\partial\chi}{\partial y}+\cos 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\end{aligned}\qquad(1.1)$$

где $\chi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ связаны с напряжениями зависимостями

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\sigma_0+k\,(2\chi\pm\cos 2\varphi),\qquad \tau_{xy}=k\sin 2\varphi\qquad(1.2)$$

k — заданная постоянная материала, σ_0 — произвольная, но наперед выбранная постоянная величина. Уравнения (1.1) и (1.2) справедливы при отсутствии объемных сил; если последние отличны от нуля, но имеют потенциал $X=\partial F/\partial x$, $Y=\partial F/\partial y$, то уравнения (1.1) и (1.2) сохраняют силу, если вместо σ_0 положить $\sigma_0+F(x, y)$.

Полагая $\chi+\varphi=\xi$, $\chi-\varphi=\eta$, имеем (за известными исключениями) следующие канонические уравнения характеристик системы (1.1):

$$\frac{\partial y}{\partial\eta}=\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial y}{\partial\xi}=\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x}{\partial\xi}\qquad(1.3)$$

Система (1.3) при помощи преобразования В. В. Соколовского

$$\begin{aligned}x&=-ue^{1/2(\xi+\eta)}\sin\varphi+ve^{-1/2(\xi+\eta)}\cos\varphi\\ y&=ue^{1/2(\xi+\eta)}\cos\varphi+ve^{-1/2(\xi+\eta)}\sin\varphi\end{aligned}\qquad(1.4)$$

может быть приведена к системе

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=e^{(\xi+\eta)}\frac{\partial u}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}=-e^{(\xi+\eta)}\frac{\partial u}{\partial\xi}\qquad(1.5)$$

Исключая отсюда одну из неизвестных, получаем уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,\qquad \frac{\partial^2v}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=0\qquad(1.6)$$

Общее решение последних уравнений можно выразить через две произвольные функции. Однако это выражение не является простым и поэтому редко используется на практике. В. В. Соколовским найдено [2] простое выражение приближенного решения уравнения (1.6). Используя идею С. А. Христиановича в теории сверхзвуковых течений газа [3], он заменяет уравнения (1.6) следующими уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{n}{\xi+\eta+a}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{n}{\xi+\eta+a}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=0 \tag{1.7}$$

Так как в задачах теории пластичности интервал изменения величины $2\chi=\xi+\eta$ обычно известен, то в каждой конкретной задаче можно выбрать постоянные n и a так, чтобы уравнения (1.7) аппроксимировали уравнения (1. 6). Общие решения уравнений (1.7) сравнительно просто выражаются через произвольные функции.

Так, при $n=1$ имеем

$$u=\frac{\Phi'(\xi)+\Psi'(\eta)}{A(\xi+\eta+a)} \tag{1.8}$$

$$v=2A[\Phi(\xi)-\Psi(\eta)]-A(\xi+\eta+a)[\Phi'(\xi)-\Psi'(\eta)]$$

Здесь A — произвольная постоянная, которая выбирается из условия, чтобы в заданном интервале функция $A^2(2\chi+a)^2$ аппроксимировала выражение $e^{2\chi}$. Например, при малых χ

$$A={}^1\!/_2,\quad a=2,\quad e^\chi\approx 1+\chi$$

При целых $n>1$ в общее решение уравнений (1.7) входят линейные комбинации производных $\Phi^{(k)}(\xi)$ и $\Psi^{(k)}(\eta)$ $(k=0,1,\ldots,n)$, что значительно осложняет использование приближенных решений при $n>1$.

Поставим задачу отыскания приближенного решения уравнений (1.5), (1,6), имеющего столь же простой вид, как выражения (1.8), но более точно аппроксимирующего истинное решение.

§ 2. Приближенное интегрирование уравнений плоской задачи теории пластичности. 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0\qquad (a=\text{const}) \tag{2.1}$$

Обозначив $t=\xi+\eta$, выберем начало координат в плоскости ξ, η так, чтобы t изменялось в интервале $-l\leqslant t\leqslant l$.

Постараемся найти такую функцию $A(t)$, чтобы уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \tag{2.2}$$

в заданном интервале $-l\leqslant t\leqslant l$ хорошо аппроксимировало уравнение (2.1) и чтобы его общее решение имело вид:

$$u(\xi,\eta)=\Phi(\xi)+\Psi(\eta)+f(t)[\Phi'(\xi)+\Psi'(\eta)] \tag{2.3}$$

$f(t)$ — функция, которая определяется ниже, $\Phi(\xi)$, $\Psi(\eta)$ — произвольные функции

Подставляя (2.3) в (2.2) и принимая во внимание произвольность $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\eta)$, получаем следующие уравнения для $A(t)$ и $f(t)$:

$$A=-\frac{f'}{f},\qquad f''-\frac{2f'^2}{f}-\frac{f'}{f}=0 \tag{2.4}$$

Заметим, что частным решением уравнений (2.4) является

$$f(t)=-\frac{t}{2}+c,\qquad A(t)=\frac{1}{2c-t}$$

где c — произвольная постоянная.

Это решение приводит ко второй из формул (1.8) и дает недостаточную точность аппроксимации решений уравнения (2.1). Найдем другие решения уравнений (2.4). Приняв за независимую переменную f, а за искомую $f'=p(f)$, находим

$$p'-\frac{2p}{f}-\frac{1}{f}=0$$

Отсюда

$$2p = c_1^2 f^2 - 1, \quad f(t) = \frac{1}{c_1} \frac{1 + c_2 e^{c_1 t}}{1 - c_2 e^{c_1 t}} \tag{2.5}$$

(c_1, c_2 — произвольные постоянные).

$$A(t) = -\frac{f'}{f} = 2c_1 c_2 \frac{e^{c_1 t}}{c_2^2 e^{2c_1 t} - 1} \tag{2.6}$$

Если имеются условия $A(0) = a$, $A'(0) = 0$, то получаем $c_2 = i$, $c_1 = ai$,

$$A(t) = \frac{a}{\cos at}, \qquad f(t) = \frac{1}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.7}$$

Таким образом, приходим к следующему уравнению, аппроксимирующему при малых t уравнение (2.1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{a}{\cos at}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{2.8}$$

Общее решение этого уравнения выражается формулой

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) + \frac{1}{a} \operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)[\Phi'(\xi) + \Psi'(\eta)] \tag{2.9}$$

2. Замене уравнения (2.1) уравнением (2.8) соответствует замена системы

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = e^{2a(\xi+\eta)} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = -e^{2a(\xi+\eta)} \frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{2.10}$$

следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{2.11}$$

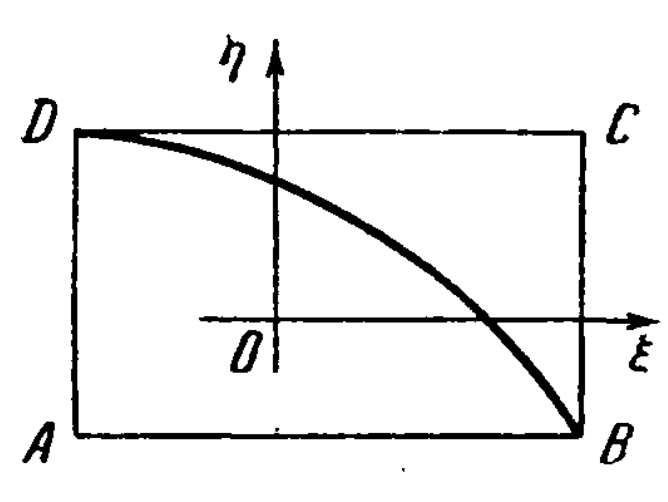
Функция $v(\xi, \eta)$ выражается через те же две произвольные функции $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\eta)$, что и $u(\xi, \eta)$, по формуле

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) - \Psi(\eta) - 1 / a \operatorname{tg}(^1/_2\, a + {}^1/_4\, \pi)\,[\Phi'(\xi) - \Psi'(\eta)] \tag{2.12}$$

§ 3. О приближенном решении краевых задач теории пластичности. Предполагая интервал $[-l, l]$ изменения переменной $t = \xi + \eta$ достаточно малым, заменим систему (2.10) (при $a = {}^1/_2$) системой (2.11), общее решение которой дается выражениями (2.9) и (2.12).

Формулировка трех основных задач для гиперболических уравнений (1.3) содержится в книге [1], § 34.

Ограничимся здесь изложением приближенного решения первой основной задачи, когда на нехарактеристической кривой BD, которую всякая прямая, параллельная осям координат, пересекает только в одной точке (фиг. 1), заданы значения функций $u(\xi, \eta)$ и $v(\xi, \eta)$ или (что равносильно) значения $u(\xi, \eta)$ и ее первых производных $\partial u / \partial \xi$ и $\partial u / \partial \eta$.



Фиг. 1

Искомое решение определяется в прямоугольнике $ABCD$ и, в частности, на его сторонах.

Дифференцируя равенство (2.9), получим соотношения, связывающие искомое решение $u(\xi, \eta)$ только с одной произвольной функцией $\Phi(\xi)$ или $\Psi(\eta)$

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{\cos at} + \operatorname{tg} at\right) = \Phi'''(\xi) + a^2 \Phi'(\xi) \tag{3.1}$$

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{1}{\cos at} + \operatorname{tg} at\right) = \Psi'''(\eta) + a^2 \Psi'(\eta) \tag{3.2}$$

Покажем, как, зная на кривой BD (фиг. 1) значения первых производных $\partial u / \partial \xi$, $\partial u / \partial \eta$, вычислить в точках этой кривой значения вторых производных $\partial^2 u / \partial \xi^2$ и $\partial^2 u / \partial \eta^2$.

По условию, всякая прямая, параллельная осям координат, пересекает дугу BD только в одной точке. Поэтому на кривой BD имеет место взаимнооднозначное соответствие между координатами $\xi = \xi(\eta)$, $\eta = \eta(\xi)$.

Пусть на BD

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f_1(\xi) = g_1(\eta), \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f_2(\xi) = g_2(\eta) \tag{3.3}$$

$f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $g_1(\eta)$, $g_2(\eta)$ — заданные функции.

Дифференцируя равенства (3.3) вдоль дуги BD, имеем соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{d\eta}{d\xi} = f_1'(\xi), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{d\xi}{d\eta} = g_2'(\eta)$$

Но из уравнения (2.8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{a}{\cos at}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -\frac{a}{\cos at}[f_1(\xi) + f_2(\xi)] = -\frac{a}{\cos at}[g_1(\eta) + g_2(\eta)]$$

Таким образом, вдоль кривой BD получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= f_1'(\xi) + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{a}{\cos at}[f_1(\xi) + f_2(\xi)] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= g_2'(\eta) + \frac{d\xi}{d\eta}\frac{a}{\cos at}[g_1(\eta) + g_2(\eta)] \end{aligned} \tag{3.4}$$

В силу (3.3) и (3.4) левые части соотношений (3.1) и (3.2) являются на дуге BD заданными функциями от ξ или от η; обозначим эти функции соответственно $F(\xi)$ и $G(\eta)$:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= a^2 f_1(\xi) + a\left(\frac{1}{\cos at} + \operatorname{tg} at\right)\left\{f_1'(\xi) + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{a}{\cos at}[f_1(\xi) + f_2(\xi)]\right\} \\ G(\eta) &= a^2 g_2(\eta) + a\left(\frac{1}{\cos at} + \operatorname{tg} at\right)\left\{g_2'(\eta) + \frac{d\xi}{d\eta}\frac{a}{\cos at}[g_1(\eta) + g_2(\eta)]\right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Записав теперь соотношения (3.1) и (3.2) для точек, расположенных вдоль дуги BD, получаем для $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\eta)$ дифференциальные уравнения

$$\Phi'''(\xi) + a^2\Phi'(\xi) = F(\xi), \qquad \Psi'''(\eta) + a^2\Psi'(\eta) = G(\eta) \tag{3.6}$$

Из уравнений (3.6) находим в квадратурах

$$\begin{aligned} \Phi'(\xi) &= \cos a\xi\left[C_1 - \frac{1}{a}\int F(\xi)\sin a\xi\, d\xi\right] + \sin a\xi\left[C_2 + \frac{1}{a}\int F(\xi)\cos a\xi\, d\xi\right] \\ \Psi'(\eta) &= \cos a\eta\left[D_1 - \frac{1}{a}\int G(\eta)\sin a\eta\, d\eta\right] + \sin a\eta\left[D_2 + \frac{1}{a}\int G(\eta)\cos a\eta\, d\eta\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь C_1, C_2, D_1, D_2 — произвольные постоянные. Интегрируя еще раз, получим $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\eta)$:

$$\Phi(\xi) = \int \Phi'(\xi)\, d\xi + E_1, \qquad \Psi(\eta) = \int \Psi'(\eta)\, d\eta + E_2 \tag{3.8}$$

E_1, E_2 — произвольные постоянные.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_0'(\xi) &= \frac{1}{a}\sin a\xi\int F(\xi)\cos a\xi\, d\xi - \frac{1}{a}\cos a\xi\int F(\xi)\sin a\xi\, d\xi \\ \Psi_0'(\eta) &= \frac{1}{a}\sin a\eta\int G(\eta)\cos a\eta\, d\eta - \frac{1}{a}\cos a\eta\int G(\eta)\sin a\eta\, d\eta \end{aligned} \tag{3.9}$$

При этом, в силу тождеств

$$(\sin a\xi + \sin a\eta) + \operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)[\cos a\xi + \cos a\eta] \equiv 0$$

$$-(\cos a\xi + \cos a\eta) + \operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)[\sin a\xi + \sin a\eta] \equiv 0$$

получаем

$$u(\xi, \eta) = \Phi_0(\xi) + \Psi_0(\eta) + \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)[\Phi_0'(\xi) + \Psi_0'(\eta)] + \\ + \frac{C_1 - D_1}{a}\left[\sin a\xi + \operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos a\xi\right] + \\ + \frac{D_2 - C_2}{a}\left[\cos a\xi - \operatorname{ctg}\left(\frac{at}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin a\xi\right] + E_1 + E_2 \qquad (3.10)$$

Таким образом, функция $u(\xi, \eta)$ найдена и содержит три постоянные:

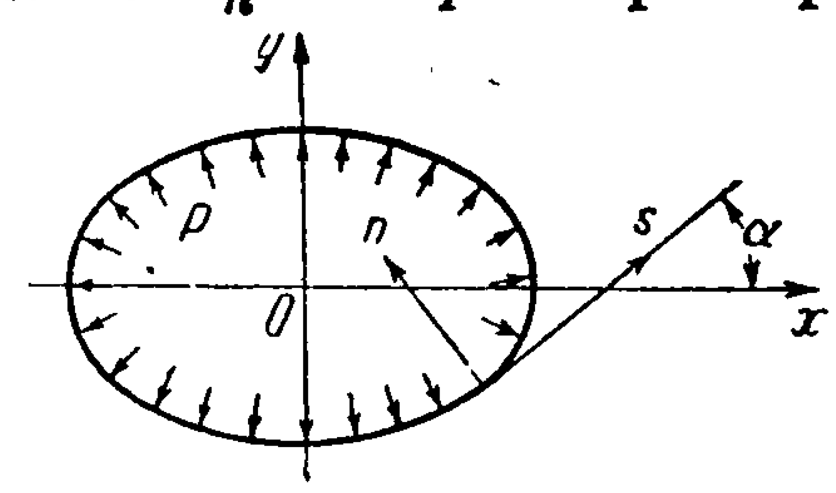
$$C = \frac{C_1 - D_1}{a}, \qquad D = \frac{D_2 - C_2}{a}, \qquad E = E_1 + E_2$$

Для определения этих постоянных у нас остались пока неиспользованными заданные на BD значения $u(\xi, \eta)$ и ее первых производных u_ξ, u_η (до сих пор мы использовали только линейные комбинации первых и вторых производных u_ξ, $u_{\xi\xi}$ и u_η, $u_{\eta\eta}$).

§ 4. **Распределение напряжений в пластической зоне вокруг овального отверстия.** Пусть требуется определить распределение напряжений и расположение характеристик в окрестности отверстия, ограниченного овальным контуром:

$$x = [d + b(\cos 2\alpha + 2)]\sin\alpha, \qquad y = -[d + b(\cos 2\alpha - 2)]\cos\alpha \qquad (4.1)$$

подверженным действию равномерно распределенного давления $\sigma_n = -p$. Параметр α геометрически означает угол, образованный касательной s к контуру и осью x (фиг. 2).



Фиг. 2

Из формул

$$\left.\begin{matrix}\sigma_s \\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \sigma_0 + k[2\chi \pm \cos 2(\varphi - \alpha)], \\ \tau_{sn} = k\sin 2(\varphi - \alpha) \qquad (4.2)$$

в силу $\tau_{sn} = 0$, имеем на контуре отверстия

$$\varphi = \alpha, \qquad \chi = 0 \qquad (4.3)$$

Так как $2\chi = \xi + \eta = t$, то на контуре $t = 0$, $\sigma_0 = k - p$. На прямой $t = 0$ имеем следующие краевые условия:

$$u\Big|_{t=0} = b\cos 2\alpha - a, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{t=0} = -b(\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha) \\ v\Big|_{t=0} = 2b\sin 2\alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{t=0} = b(\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha) \qquad (4.4)$$

По формуле (3.10) после вычислений получаем следующее приближенное выражение $u(\xi, \eta)$ $(a = 1/2)$:

$$u(\xi, \eta) = E + C\sin\frac{1}{2}\xi + D\cos\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{15}b\left(\sin 2\xi + \sin 2\eta + \frac{7}{2}\cos 2\xi + \frac{7}{2}\cos 2\eta\right) + \\ + 2\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{4}(\pi + \xi + \eta)\right]\left[\frac{1}{15}b(2\cos 2\xi + 2\cos 2\eta - 7\sin 2\xi - 7\sin 2\eta) + \\ + \frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}D\sin\frac{1}{2}\xi\right]$$

Подставляя это в первое из условий (4.4), находим $C = D = 0$, $E = -d$.

Переходя к переменным $\chi = 1/2(\xi + \eta)$, $\varphi = 1/2(\xi - \eta)$, получаем окончательно

$$u(\chi, \varphi) = -d + \frac{1}{15}b\cos 2\varphi\left\{\cos 2\chi\left[7 + 8\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\chi\right)\right] + \\ + \sin 2\chi\left[2 - 28\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right)\right]\right\} \qquad (4.5)$$

Для рассматриваемой задачи известно точное решение, вычисленное В. В. Соколовским [1]:

$$u(\chi, \varphi) = -d + 2be^{-\chi}\cos 2\varphi\sin\left(\frac{1}{6}\pi - \sqrt{3}\chi\right) \qquad (4.6)$$

Сравнивая формулы (4.5) и (4.6), мы имеем возможность численно оценить точность, даваемую изложенным выше приближенным методом интегрирования уравнений пластичности. С этой целью в табл. 1 приведены значения функций

$$Y_1(\chi)=\frac{1}{15}\left\{\cos 2\chi\left[7+8\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\chi\right)\right]+\sin 2\chi\left[2-28\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\chi\right)\right]\right\}$$

$$Y_0(\chi)=2e^{-\chi}\sin\left(\frac{1}{6}\pi-\sqrt{3}\chi\right)$$

в интервале $0\leqslant\chi\leqslant 1$.

Функция $v(\xi,\eta)$ находится из уравнений (2.11) при $a={}^1/_2$ и имеет вид:

$$v(\chi,\varphi)=\frac{1}{15}b\sin 2\varphi\left\{2\cos 2\chi-7\sin 2\chi+\operatorname{tg}\left[\frac{1}{4}(t+\pi)\right](8\sin 2\chi+28\cos 2\chi)\right\} \quad (4.7)$$

Точное выражение $v(\chi,\varphi)$, найденное В. В. Соколовским, дается формулой

$$v(\chi,\varphi)=2be^{\chi}\cos(\sqrt{3}\chi)\sin 2\varphi \quad (4.8)$$

В табл. 2 приведены значения функций

$$Z_1(\chi)=\frac{1}{30}\left\{2\cos 2\chi-7\sin 2\chi+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\chi+\frac{1}{4}\pi\right)(8\sin 2\chi+28\cos 2\chi)\right\}$$

$$Z_0(\chi)=e^{\chi}\cos(\sqrt{3}\chi)$$

Таблица 1

χ	Y_0	Y_1	$\Delta Y = Y_1 - Y_0$
0.1	0.6212	0.6212	0.0000
0.2	0.2886	0.2890	0.0004
0.3	0.0059	0.0074	0.0016
0.4	—0.2259	—0.2211	0.0048
0.5	—0.4073	—0.3965	0.0108
0.8	—	—	—
1.0	—0.6873	—0.6361	0.0512

Таблица 2

Z_0	Z_1	$\Delta Z = Z_1 - Z_0$
1.0886	1.0886	0.0000
1.1488	1.1492	0.0004
1.1715	1.1719	0.0004
1.1477	1.1481	0.0004
1.0679	1.0682	0.0003
0.4090	0.3547	—0.0543
—	—	—

Поступила 19 I 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
2. Соколовский В. В. Приближенное интегрирование уравнений плоской задачи теории пластичности. ПММ, т. XIII, вып. 3, 1949.
3. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.