

О РАВНОВЕСИИ СЖАТЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

В работе^[1] А. Пфлюгер рассматривает задачу о равновесии прямого упруго-пластического стержня, используя концепцию Шенли-Работного^[2,3], по которой в процессе продольного изгиба сжимающая сила на концах стержня может меняться. В настоящей работе показывается, что бывают случаи, где применение решения, данного Пфлюгером, может при определении прогиба стержня привести к значительным погрешностям. Дается метод для уточнения решения Пфлюгера.

1. Основное уравнение равновесия стержня. Рассмотрим прямой сжатый продольной силой стержень, сечение которого обладает двумя осями симметрии. Пусть ось x будет центральной продольной осью стержня, оси y и z — оси симметрии поперечного сечения; начало координат выбираем в конечном сечении стержня. Допустим, что при потере устойчивости изгиб стержня происходит в плоскости xz ; за положительное направление оси z примем направление прогибов.

Ограничиваясь случаем малых прогибов, для стержня со свободно опертыми концами имеем

$$T = -P, \quad M = Pw \quad \left(T = - \int_{-1/2h}^{+1/2h} \sigma b(z) dz, \quad M = - \int_{-1/2h}^{+1/2h} \sigma b(z) z dz \right) \quad (1.1)$$

Здесь T — нормальное растягивающее усилие, M — изгибающий момент, P — сжимающая сила, приложенная в концах стержня, w — прогиб, h и $b(z)$ — высота и ширина рассматриваемого сечения, σ — величина сжимающего напряжения.

Пусть e — относительное укорочение элемента стержня, σ_0 и e_0 — значения величин σ и e в критическом состоянии; в случае линейного упрочнения материала имеем

$$\sigma - \sigma_0 = E(1 - \lambda)(e - e_0) \quad \text{при } \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{de} = \text{const} \quad (1.2)$$

Из гипотезы плоских сечений следует, что (ε — относительное укорочение срединного слоя $z = 0$)

$$e = \varepsilon + z d^2w / dx^2 \quad (1.3)$$

Соотношение (1.2) имеет место только при активных пластических деформациях. Как известно, при пассивных деформациях (т. е. в зоне разгрузки) материал стержня деформируется упруго; кроме того, здесь следует иметь в виду, что в начале разгрузки сжимающее напряжение σ может и в некоторой мере превосходить его критическое значение σ_0 .

Если $\sigma_0 + \Delta\sigma$ и $e_0 + \Delta e$ — значения σ и e перед началом разгрузки, то

$$\Delta\sigma = E(1 - \lambda)\Delta e, \quad \sigma_0 + \Delta\sigma - \sigma = E(e_0 + \Delta e - e) \quad (1.4)$$

Исключая из этих зависимостей Δe , находим, что в зоне разгрузки

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\lambda}{1 - \lambda} \Delta\sigma + E\left(\varepsilon - \varepsilon_0 + z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \quad (1.5)$$

Пусть $z_0 = z_0(x, y)$ будет уравнением поверхности, разделяющей зоны активных и пассивных пластических деформаций в стержне. Условия (1.1) можно теперь в силу (1.2) и (1.5) написать в виде

$$\begin{aligned} T &= T_0 - E(F - \lambda B_1)(\varepsilon - \varepsilon_0) + E\lambda B_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \Delta P \\ M &= E\lambda B_2(\varepsilon - \varepsilon_0) - E(I - \lambda B_3) \frac{d^2 w}{dx^2} + \Delta M \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_i &= \int_{\frac{1}{2}h}^{z_0} b(z) z^{i-1} dz \quad (i = 1, 2, 3) \\ \Delta P &= \frac{\lambda}{1 - \lambda} \int_{z_0}^{\frac{1}{2}h} \Delta\sigma b(z) dz, \quad \Delta M = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \int_{z_0}^{\frac{1}{2}h} \Delta\sigma b(z) z dz \end{aligned} \quad (1.7)$$

Символы P_0, T_0, ε_0 обозначают значения величин P, T, ε в критическом состоянии; F — площадь сечения, I — момент инерции сечения.

В дальнейшем переходим к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \frac{2}{l}x, \quad w^* = \frac{2}{h}w, \quad z^* = \frac{2}{h}z, \quad c = \frac{h}{l} \\ F^* &= \frac{2}{hb(0)}F, \quad I^* = \left(\frac{2}{h}\right)^3 \frac{I}{b(0)}, \quad B_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^i \frac{B_i}{b(0)}, \quad \beta(z^*) = \frac{b(z)}{b(0)} \\ \alpha^2 &= \frac{Pl^2}{4EI(1 - \lambda)}, \quad p = \frac{\Delta Pl^2}{4EI(1 - \lambda)} = \frac{\lambda}{I^*(1 - \lambda)} \int_{z_0^*}^1 \frac{\Delta e}{c^2} \beta(z^*) dz^* \\ \alpha_0^2 &= \frac{P_0 l^2}{4EI(1 - \lambda)} = \frac{\pi^2}{4}, \quad m = \frac{\Delta M l^2}{2EIh(1 - \lambda)} = \frac{\lambda}{I^*(1 - \lambda)} \int_{z_0^*}^1 \frac{\Delta e}{c^2} \beta(z^*) z^* dz^* \end{aligned} \quad (1.8)$$

Вместо величины z_0^* будем использовать величину относительной толщины пластического слоя ζ , определяемую соотношением $\zeta = \frac{1}{2}(1 + z_0^*)$.

Подставляя выражения (1.6) в уравнения равновесия (1.1), исключая величину $\varepsilon - \varepsilon_0$ и переходя к безразмерным величинам (1.8), приходим к формуле

$$w^{*''} = -I^*(1 - \lambda) [\Phi_1(\zeta)(\alpha^2 w^* - m) + \Phi_2(\zeta)(\alpha^2 - \alpha_0^2 + p)] \quad (1.9)$$

где

$$[\Phi_1(\zeta)]^{-1} = I^* - \lambda B_3^* - \frac{\lambda^2 B_2^{*2}}{F^* - \lambda B_1^*}, \quad \Phi_2(\zeta) = -\frac{\lambda B_2^*}{F^* - \lambda B_1^*} \Phi_1(\zeta) \quad (1.10)$$

Уравнение (1.9) является основным уравнением равновесия упруго-пластического стержня (здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по ξ).

Как увидим в п. 2 настоящей работы, весь стержень не может деформироваться упруго-пластически и у концов стержня должна возник-

кату область чисто пластических деформаций, которая протянется от края пластинки $\xi = 1$ до некоторого значения координаты $\xi = \xi_1$. В этой области $\zeta = 1$, следовательно, $B_2 = 0$ и из второго уравнения системы (1.6) следует, что

$$M = -EI(1 - \lambda) \frac{d^2 w}{dx^2} = Pw$$

В безразмерных величинах это уравнение принимает вид: $w^{*''} + \alpha^2 w^* = 0$, решением которого, удовлетворяющим при $\xi = 1$ граничным условиям $w^* = M = 0$, является

$$w^* = A \sin [\alpha (1 - \xi)] \quad (1.11)$$

Решение уравнения (1.9) и величина w^* , определенные из (1.11), должны выполнять условия непрерывности относительно прогиба w^* и его первой производной $w^{*'}$ в точке $\xi = \xi_1$. Из этих требований следует (символами w_1^* и $w_1^{*'}$ обозначены величина w^* и ее первая производная в точке $\xi = \xi_1$)

$$\frac{w_1^{*'}}{w_1^*} = -\alpha \cot [\alpha (1 - \xi_1)] \quad (1.12)$$

Граничными условиями для уравнения (1.9) являются $w^{*'} = 0$ при $\xi = 0$ и условие (1.12).

2. Определение величины относительной толщины пластического слоя. Интегрирование основного уравнения равновесия (1.9) осуществимо в случае, если зависимость $\zeta = \zeta(\xi)$ задана (т. е. если распределение зон активных пластических деформаций является известным). Для определения искомой зависимости $\zeta = \zeta(\xi)$ будем исходить из условия

$$\delta e = \delta \varepsilon + z_0 \frac{d^2 \delta w}{dx^2} = 0 \quad (2.1)$$

которое всегда выполняется на границе активных и пассивных пластических деформаций.

Для вычисления вариаций $\delta \varepsilon$ и δw , встречающихся в формуле (2.1), допустим, что сжимающая сила P увеличилась на малую величину δP . Так как соответствующие изменения величин ΔP , ΔM , B_i вычисляются из формул (1.7) и величина $\Delta \sigma$ не подлежит варьированию, то находим

$$\begin{aligned} \delta(\Delta P) &= -\frac{\lambda}{1-\lambda} b(z_0) (\Delta \sigma)_{z=z_0} \delta z_0 \\ \delta(\Delta M) &= -\frac{\lambda}{1-\lambda} b(z_0) z_0 (\Delta \sigma)_{z=z_0} \delta z_0 \\ \delta B_i &= b(z_0) z_0^{i-1} \delta z_0 \end{aligned}$$

Путем варьирования соотношений (1.1) и (1.6) теперь получаем

$$\begin{aligned} \delta T &= -E(F - \lambda B_1) \delta \varepsilon + E\lambda B_2 \frac{d^2 \delta w}{dx^2} = -\delta P \\ \delta M &= E\lambda B_2 \delta \varepsilon - E(I - \lambda B_3) \frac{d^2 \delta w}{dx^2} = P\delta w + w\delta P \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вычисляя вариацию $\delta \varepsilon$ из уравнения (2.1), переходя к безразмерным величинам и введя новую переменную $v = \delta w^* / \delta \alpha^2$, можем систему уравнений (2.2) представить в виде

$$v'' = -\frac{I^*(1-\lambda)}{k_2}, \quad \alpha^2 v = \frac{k_2}{k_1} - w^* \quad (2.3)$$

Здесь¹

$$k_1 = (F^* - \lambda B_1^*) z_0^* + \lambda B_2^*, \quad k_2 = \lambda B_2^* z_0^* + I^* - \lambda B_3^* \quad (2.4)$$

Уравнения (2.3) имеют место в области упруго-пластических деформаций. При чисто пластических деформациях соответствующее соотношение можно получить варьированием уравнения (1.11); это дает

$$v = B \sin [\alpha (1 - \xi)] + \frac{1}{2\alpha} A (1 - \xi) \cos [\alpha (1 - \xi)] \quad (2.5)$$

Удовлетворяя условия непрерывности для v и ее первой производной v' в точке $\xi = \xi_1$ и элиминируя константу B из уравнения (2.5), находим, что

$$\begin{aligned} v_1 \alpha \cos [\alpha (1 - \xi_1)] + v_1' \sin [\alpha (1 - \xi_1)] = \\ = \frac{1}{2\alpha} A \{ \alpha (1 - \xi_1) - \sin [\alpha (1 - \xi_1)] \cos [\alpha (1 - \xi_1)] \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Граничными условиями к (2.3) являются $v' = 0$ при $\xi = 0$ и уравнение (2.6). Константа A в формуле (2.6) вычисляется из уравнения (1.11). Решая уравнение (2.3) при соответствующих граничных условиях, находим и искомую зависимость $\zeta = \zeta(\xi)$.

Докажем еще, что весь стержень не может деформироваться упруго-пластически. Действительно, если в стержне не возникло бы областей чисто пластических деформаций, то в силу граничных условий при $\xi = 1$ должно бы быть $w^* = v = 0$. Из второго уравнения системы (2.3) следовало бы, что $k_2 = 0$. Но последнее условие ведет к противоречию, так как величина k_2 пропорциональна модулю Кармана и не может равняться нулю, если только $\lambda \neq 1$. Отсюда и приходим к выводу, что равновесие без областей чисто пластических деформаций невозможно.

3. Предел применимости указанного выше решения. Все формулы из пп. 1—2 настоящей работы выведены в предположении, что в стержне не возникает зон вторичных пластических деформаций, т. е. что материал стержня в зоне разгрузки вновь не выйдет за предел упругости. Представим это условие в аналитическом виде².

Очевидно, что возникновение вторичных пластических деформаций начинается на выпуклой стороне стержня (т. е. при $z^* = +1$). Докажем, что на этой стороне величина сжимающего напряжения σ не может превосходить его критического значения σ_0 . Для этого допустим, что для некоторого сечения стержня составлена диаграмма $(\varepsilon, -w^{**})$. Из уравнения (2.1) находим, что $\delta\varepsilon/(-\delta w^{**}) = c^2 z_0^*$. Но так как величина z_0^* с ростом прогибов уменьшается, то кривая $\varepsilon = \varepsilon(-w^{**})$ является выпуклой. Принимая во внимание соотношения $e = \varepsilon + c^2 z^* w^{**}$ и $w^{**} < 0$, увидим, что выпуклыми оказываются и кривые $e = e(-w^{**})$. Вычисляем теперь наклон касательной к кривым $e = e(-w^{**})$ в критической точке $\sigma = \sigma_0$; осуществляя при этом предельный переход $z_0^* \rightarrow 1$, находим, что

$$\lim_{z_0^* \rightarrow 1} \frac{\delta e}{-\delta w^{**}} = \lim_{z_0^* \rightarrow 1} \frac{\delta \varepsilon}{-\delta w^{**}} - c^2 z^* = c^2 (1 - z^*)$$

¹ Величина k_2 связана модулем Кармана K по формуле $k_2 = KI^*/E$.

² На возможность возникновения зоны вторичных пластических деформаций в стержне потерянной устойчивости обращено внимание и в работе Я. Г. Пановко^[4].

Следовательно,

$$\lim_{z^* \rightarrow 1} \frac{\delta e}{-\delta w^{**}} = 0 \quad \text{при } z^* = 1$$

и так как кривая $e = e(-w^{**})$ выпуклая, то и должно быть $e \leq e_0$, что и требовалось доказать.

Допустим, что при $z^* = 1$ диаграмма σe , характеризующая поведение материала с линейным упрочением в процессах нагружения и разгрузки, известна (фиг. 1). Символом $\gamma(e_0)$ отмечен некоторый параметр $\gamma(e_0) > 1$, величину которого можно определить из опытов.

Условие для того, чтобы во всем стержне не возникало вторичных пластических деформаций, можем теперь написать в виде

$$e_0 - e < e_s \gamma(e_0) \quad \text{при } z^* = 1 \quad (3.1)$$

Из (1.3) и из первого уравнения системы (1.6) находим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{c^2}{F^* - \lambda B_1^*} [I^* (1 - \lambda) (\alpha^2 - \alpha_0^2 + p) + \lambda B_2^* w^{**}]$$

Теперь можем условие (3.1) переписать в виде

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{F^* - \lambda B_1^*} [I^* (1 - \lambda) (\alpha^2 - \alpha_0^2 + p) + \\ & + (F^* - \lambda B_1^* + \lambda B_2^*) w^{**}] < \mu \gamma(e_0) \quad \left(\mu = \frac{e_s}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как нас интересует только случай, когда потеря устойчивости происходит за пределом упругости, то должно еще быть выполнено неравенство $\sigma_0 > E e_s$. Учитывая, что

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F} = \pi^2 \frac{EI}{Fl^2} (1 - \lambda)$$

и переходя к безразмерным величинам, находим

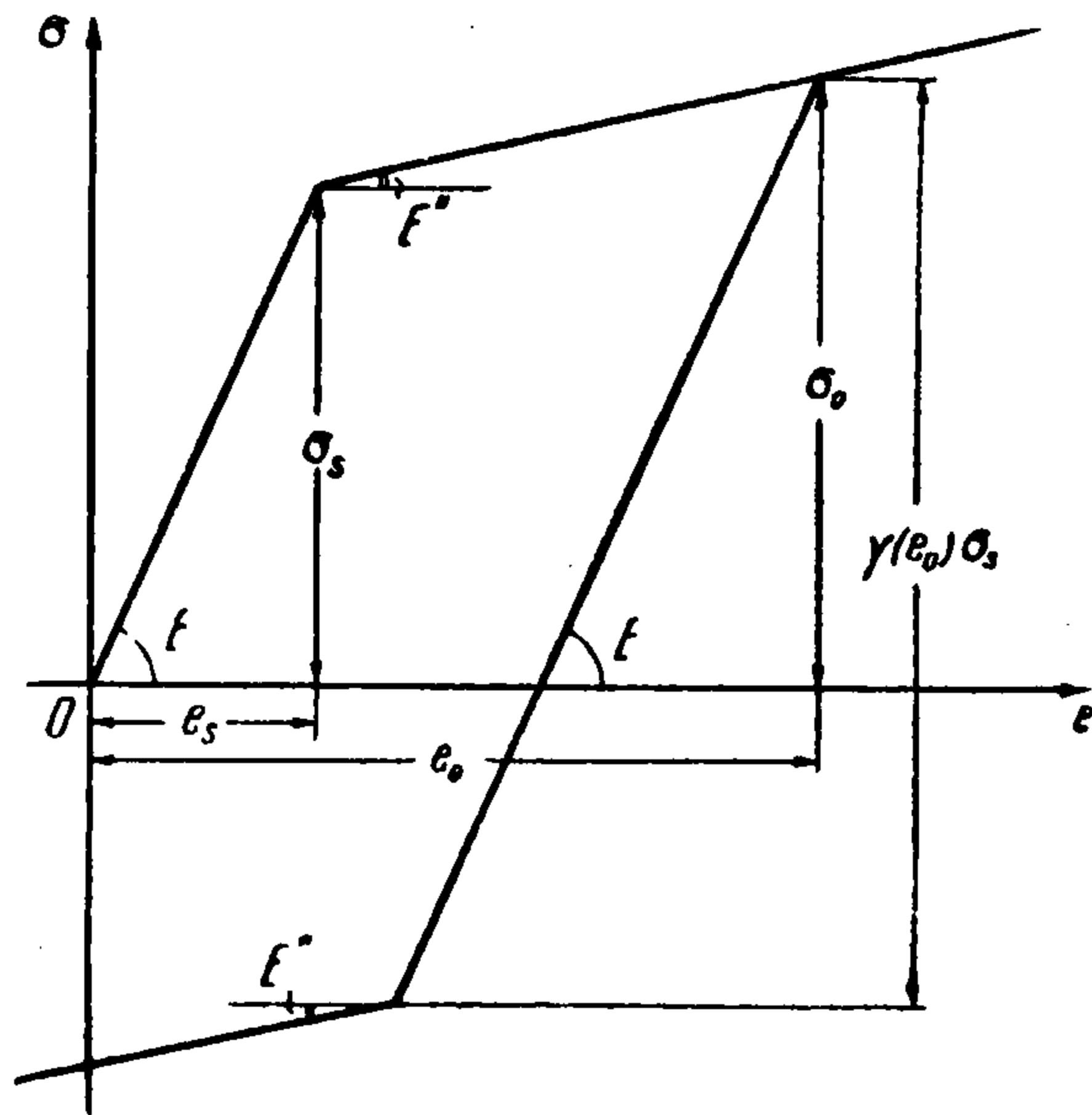
$$\mu < \frac{1}{4} \pi^2 \frac{I^*}{F^*} (1 - \lambda) \quad (3.3)$$

Отсюда приходим к выводу, что результаты, полученные в пп. 1—2, применимы только при тех значениях μ , которые удовлетворяют неравенствам (3.2) и (3.3).

4. Решение Пфлюгера и его критика. Решение задачи, поставленной в пп. 1—2 настоящей работы, можно представить в замкнутом виде, [если сделать предположение, что в зоне пассивных деформаций и на разделяющей поверхности $z = z_0$ выполняется условие $\Delta e = 0$ (т. е. перед началом разгрузки величина относительного укорочения e не может превышать ее критического значения e_0). В этом случае (2.1) можно заменить более простым:

$$(\Delta e)_{z=z_0} = \varepsilon - \varepsilon_0 + z_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (4.1)$$

Такой вариант решения задачи по существу принадлежит А. Пфлюгеру [1] и в общих чертах является следующим.



Фиг. 1

Так как в рассматриваемом случае $\Delta P = \Delta M = 0$, то из уравнений (1.6), если использовать соотношение (4.1) и перейти к безразмерным величинам, получаем

$$w^* = \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2}\right) \frac{k_2}{k_1}, \quad w^{*''} = -I^* (1 - \lambda) \frac{\alpha^2 - \alpha_0^2}{k_1} \quad (4.2)$$

Интегрируя эту систему по ξ , находим

$$w^{*'} = -\sqrt{2I^*(1-\lambda)} \frac{\alpha^2 - \alpha_0^2}{\alpha} A(\zeta_0, \zeta) \quad (4.3)$$

В этой формуле ζ_0 есть величина относительной толщины пластического слоя в середине стержня; кроме того, обозначено

$$A(\zeta_0, \zeta) = \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)}, \quad \Phi(\zeta) = -\int_{\zeta}^1 \frac{1}{k^1} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{k_2}{k_1}\right) d\zeta \quad (4.4)$$

Интегрируя уравнение (4.3) еще раз по ξ , после несложных преобразований получаем

$$\xi = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{I^*(1-\lambda)}} \left[k_1 A(\zeta_0, \zeta) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{dk_1}{d\zeta} A(\zeta_0, \zeta) d\zeta \right] \quad (4.5)$$

Уравнение (1.11) для чисто пластической области остается в силе; из условия непрерывности в точке $\xi = \xi_1$ находим

$$\cot[\alpha(1 - |\xi_1|)] = \sqrt{2I^*(1-\lambda)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)_{\zeta=1} A(\zeta_0, 1) \quad (4.6)$$

Из уравнений (4.5), (4.6) и из первого уравнения системы (4.2) можно вычислить параметр нагрузки α и величины w^* , ξ как функции от аргумента ζ , чем и по Пфлюгеру заканчивается решение задачи.

Следует отметить, что указанное выше решение, данное Пфлюгером, имеет и некоторые недостатки. Во-первых, А. Пфлюгер не учитывает возможности возникновения вторичных пластических деформаций. Однако, так как при появлении зон вторичных пластических деформаций сопротивление стержня к изгибу резко понижается, то решение Пфлюгера не дает правильной картины о поведении стержня в послекритической стадии; для максимальной нагрузки решение Пфлюгера дает повышенное значение. Здесь можно еще добавить, что условие (3.2) в силу (4.1) упрощается и его можно представить в виде

$$2I^*(1-\lambda) \frac{1-\zeta}{k_1} (\alpha^2 - \alpha_0^2) < \mu\gamma(\epsilon_0) \quad (4.7)$$

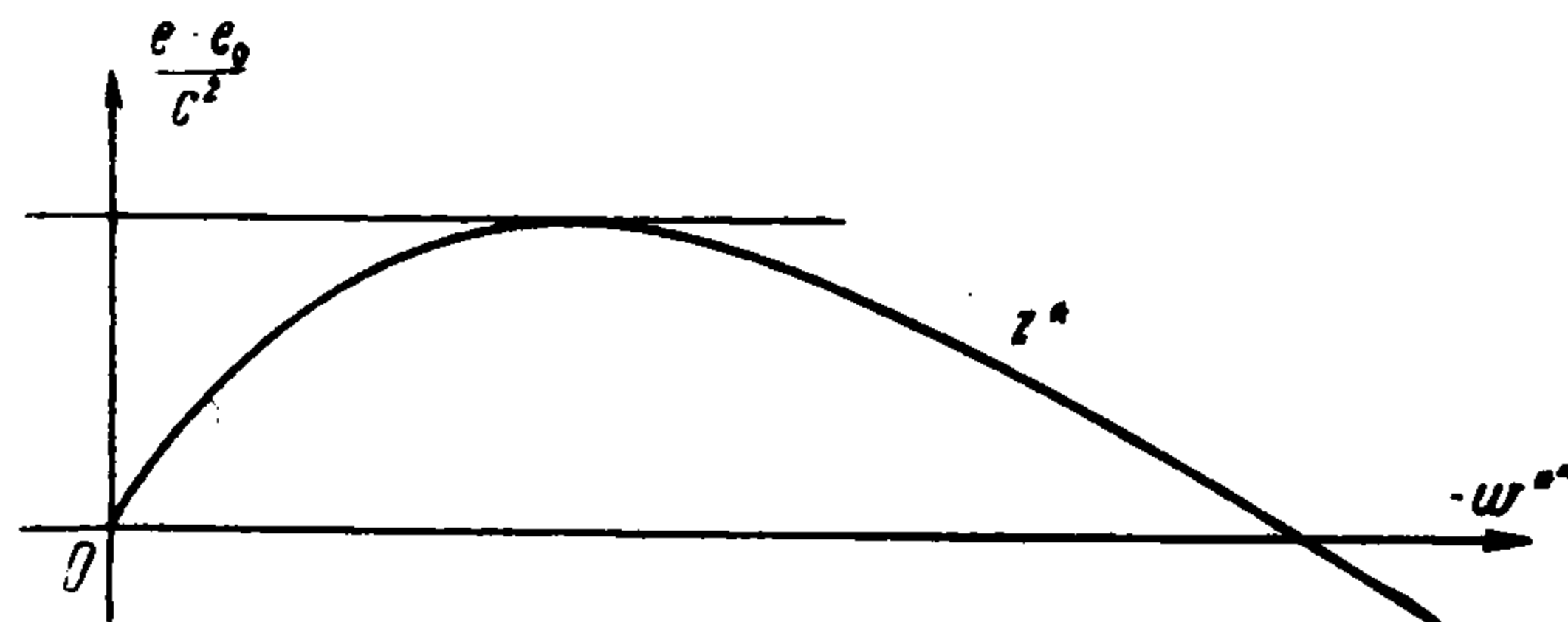
Некоторые возражения вызывает и применение приближенного выражения (4.1) вместо точного (2.1). Из обстоятельства, что при решении Пфлюгера в зоне разгрузки $e \leq e_0$, но при нагрузке $e > e_0$ следует, что относительное укорочение e при $z = z_0$ претерпевает разрыв; следовательно, распределение деформаций и напряжений в стержне уже нельзя считать непрерывным. Кроме того, как следует из вычислений, проведенных в п. 5, применение соотношения (4.1) может дать для прогиба стержня значения, значительно отличающиеся от истинных.

Нетрудно показать, что решение Пфлюгера дает для величины относительной толщины пластического слоя ζ преувеличенные значения. Из зависимостей (2.1) и (4.1) явствует, что при решении Пфлюгера по существу наклон касательной к диаграмме $(\epsilon, -w^{*''})$ заменяется наклоном пересекающей, что в рассматриваемом случае из-за выпуклости диаграммы равносильно увеличению наклона касательной. Однако из зависимостей $\delta\epsilon / (-\delta w^{*''}) = c^2 z_0^*$ и $z_0^* = 2\zeta - 1$ видно, что увеличение наклона касательной $\delta\epsilon / (-\delta w^{*''})$ принесет с собой увеличение величины ζ , чем и доказывается наше утверждение.

5. Уточнение решения Пфлюгера. В случаях, когда точность решения Пфлюгера является недостаточной, это решение можно уточнить на основании соотношений, выведенных в пп. 1—2 настоящей работы. Необходимые для того вычисления целесообразно провести в следующем порядке.

Задаем величине ζ_0 некоторое значение; из решения Пфлюгера определяем параметр нагрузки α и величины w^* , ζ как функции от координаты ξ . Оставляя величину α неизменной¹ и считая зависимость $w^* = w^*(\xi)$ данной из решения Пфлюгера, найдем из уравнений (2.3) функцию $\zeta = \zeta(\xi)$, характеризующую распределение зон пластических деформаций во втором приближении. На основании полученной зависимости $\zeta = \zeta(\xi)$ найдем из дифференциального уравнения (1.9) второе приближение для величины относительного прогиба w^* . Этот процесс можно повторять любой раз, однако уже второе приближение обычно является достаточным.

Поправочные члены p и m в основном уравнении равновесия (1.9) можно вычислить следующим образом. Решаем сначала задачу о равновесии стержня без этих поправок. На основании полученного решения построим для рассматриваемого сечения кривую зависимости величины $(e - e_0) / c^2$ от $-w^{**}$, считая при этом координату z^* параметром (фиг. 2). Для определения величины $(\Delta e) / c^2$ проведем к построенной кривой горизонтальную касательную и измерим полученный отрезок на оси ординат. Определяя таким образом величину $(\Delta e) / c^2$ при разных значениях параметра z^* , можем на основании (1.8) найти численные значения этих поправок для любого сечения стержня.



Фиг. 2

Проведенные вычисления показывали, что поправки p и m в общем являются малыми величинами и их влияние на величину прогибов и на распределение зон пластических деформаций незначительно.

Рассмотрим еще более подробно случай прямоугольного сечения стержня; тогда

$$F^* = 2, \quad I^* = \frac{2}{3}, \quad B_1^* = 2\zeta$$

$$B_2^* = -2\zeta(1 - \zeta), \quad B_3^* = \frac{2}{3}\zeta(3 - 6\zeta + 4\zeta^2)$$

$$k_1 = 2(-1 + 2\zeta - \lambda\zeta^2), \quad k_2 = \frac{2}{3}[1 - \lambda\zeta^2(3 - 2\zeta)]$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{3} \frac{1 - 3\zeta + 3\zeta^2 - \lambda\zeta^3}{(1 - 2\zeta + \lambda\zeta^2)^2} - \frac{1}{3(1 - \lambda)}$$

Для иллюстрации излагаемого метода проведем вычисления на двух следующих численных примерах, при которых для параметра упрочнения λ выбрано значение $\lambda = 0.5$. Уравнения (1.9) и (2.3) интегрированы графически.

Пример 1. Выбирая для ζ_0 начальное значение $\zeta_0 = 0.80$, из решения Пфлюгера найдем (символами w_0^* и v_0 обозначены значения величин w^* и v при $\xi = 0$).

$$\alpha = 1.63, \quad w_0^* = 0.046, \quad A = 0.045, \quad \xi_1 = 0.67$$

Принимая для коэффициента $\gamma(\epsilon_0)$ значение $\gamma(\epsilon_0) = 2$, из неравенств (3.3) и (4.7) находим, что $0.022 < \mu < 0.411$.

Уточняя решение Пфлюгера по указанному методу, находим в качестве второго приближения

$$v_0 = 0.41, \quad \zeta_0 = 0.72, \quad \xi_1 = 0.81, \quad w_0^* = 0.061, \quad A = 0.059$$

Третье приближение дает

$$v_0 = 0.45, \quad \zeta_0 = 0.71, \quad \xi_1 = 0.82, \quad w_0^* = 0.061, \quad A = 0.059$$

Из неравенств (3.2) и (3.3) следует, что уточненное решение имеет место при $0.035 < \mu < 0.411$.

Пример 2. При $\zeta_0 = 0.72$ решение Пфлюгера дает

$$\alpha = 1.71, \quad w_0^* = 0.17, \quad \xi_1 = 0.81$$

Считая $\gamma(\epsilon_0) = 2$, из (3.3) и (4.7) находим, что решение Пфлюгера применимо для значений μ в промежутке $0.116 < \mu < 0.411$.

Уточненным решением является

$$\zeta_0 = 0.61, \quad w_0^* = 0.40, \quad \xi_1 = 0.97$$

которое имеет место в промежутке $0.323 < \mu < 0.411$.

В обоих примерах найдены и величины поправок p и m ; однако при вычислении величин w_0^* , ζ_0 , ξ_1 , A они на написанные выше цифры влияния не оказывали.

Из последнего примера следует, что в этом случае величины относительного прогиба w_1^* , найденные по Пфлюгеру, оказываются заниженными больше чем в 2 раза; промежуток определения величины μ является в случае решения Пфлюгера расширенным сравнительно с истинным больше чем в 3 раза. Отсюда можно сделать вывод, что решение Пфлюгера описывает поведение стержня достаточно точно только в начальном участке послекритической стадии равновесия; в других случаях его придется уточнить.

Результаты настоящей работы можно обобщить и на случай больших прогибов, однако такое обобщение вряд ли имеет реальное значение, так как уже при сравнительно малых прогибах появляются зоны вторичных пластических деформаций.

Поступила 16 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. P f l ü g e r A. Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingenieur-Archiv, Bd. XX, H. 5, 1952.
2. S h a n l e y F. Inelastic Column Theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, Vol. 14, № 5, 1947.
3. Р а б о т н о в Ю. Н. О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности. Инженерный сборник, т. XI, 1952.
4. П а н о в к о Я. Г. О критической силе сжатого стержня в неупругой области. Инженерный сборник, т. XX, 1954.