О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ В. М. ПАНФЕРОВА ПО ТЕОРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В. М. Бабич

(Ленинград)

Работы В. М. Панферова «О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек» [1], «О сходимости метода упругих решений для задачи упруго-пластического изгиба пластин» [2], «О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций» [3], «Общий метод решения краевых задач в теории упруго-пластических деформаций при простом нагружении А. А. Ильюшина» [4] посвящены сложным вопросам принципиального характера.

Последняя работа является основной из всех работ рассматриваемого цикла. К ней мы прежде всего и обратимся.

В работе рассматривается среда Генки-Шмидта. Предполагается, что интенсивность касательных напряжений

$$\Sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6\,(X_y{}^2 + X_z{}^2 + Y_z{}^2)}$$

и интенсивность деформаций сдвига

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{xx} - e_{zz})^2 + \frac{3}{2}\,(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2)}$$

связаны соотношением

$$\Sigma_i = \Phi(e_i) = 3Ge_i\,(1 - \omega\,(e_i))$$

О функции ω предполагается, что

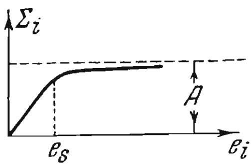
$$\omega(e_i) \equiv 0 \quad \text{при } e_i \leqslant e_s, \qquad \omega(e_i) > 0 \quad \text{при } e_i > e_s$$

(формула (5), стр. 42), причем

$$1 > \omega + e_i\, d\omega / de_i > \omega \geqslant 0, \qquad d\omega / de_i > 0$$

(формула (6), стр. 42).

Важной краевой задачей для уравнений равновесия рассматриваемой среды является задача о нахождении смещений внутри упруго-пластического тела по заданной нагрузке на его поверхности.



На стр. 44 [4] читаем: «Мы покажем, что решение такой краевой задачи всегда существует и единственное, если существует решение той же краевой задачи для упругих деформаций, причем эффективным методом решения является метод упругих решений, предложенный А. А. Ильюшиным». Доказательству этого и посвящена работа.

Приведем пример, опровергающий сформулированную выше теорему существования. Пусть на поверхности тела заданы напряжения. Предположим, что график зависимости интенсивности касательных напряжений Σ_i от интенсивности деформации сдвига e_i прямолинеен при $e_i \leqslant e_s$, обращен выпуклостью вверх при $e_i > e_s$ и имеет горизонтальную асимптоту $\Sigma_i = A$ $(A > 0)$. Очевидно, всегда $0 \leqslant \Sigma_i < A$. Пусть силы, заданные на поверхности S тела, таковы, что длина проекции вектора напряжений $\{X_\nu, Y_\nu, Z_\nu\}$ на касательную плоскость к поверхности S больше $3^{-1/2} A$.

Возьмем касательную плоскость за плоскость x, y. Тогда имеем, очевидно,

$$\sqrt{Y_z^2 + X_z^2} > \frac{1}{\sqrt{3}} A$$

$$\Sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + Y_z^2 + X_z^2)} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{3}\sqrt{Y_z^2 + X_z^2} > A$$

что невозможно.

«Доказательство» теоремы существования, приведенное в рассматриваемой работе, распространяется, следовательно, и на тот случай, когда решения заведомо не существуют.

После этих предварительных замечаний обратимся к самой работе.

1°. Прежде всего система нелинейных интегро-дифференциальных «уравнений», выведенная в § 4 работы, на самом деле таковой не является. Дело в том, что автор, выделяя особенность тензора Грина шаром s фиксированного радиуса ρ, тем самым ограничил себя рассмотрением лишь внутренней подобласти тела T, удаленной от поверхности тела на расстояние ρ. В пограничной же полоске ширины ρ «нелинейные интегро-дифференциальные уравнения» В. М. Панферова теряют смысл. Отметим, что эти «интегро-дифференциальные уравнения» являются основой для дальнейшего.

2°. Автор широко пользуется понятием «регулярная правильная функция», но нигде его не определяет. Неясно, какие свойства функций класса «регулярных правильных» нужны автору для его построения. Неясно также, какие функции к нему принадлежат. На стр. 45 автор относит к этому классу так называемую правильную часть тензора Грина, которая, как известно, не ограничена. Отсюда следует заключить, что «регулярными правильными» могут быть и неограниченные функции.

3°. Обратимся к стр. 54. Формулы (3.3) можно считать системой уравнений типа Вольтерра относительно $e_{xx}, e_{xy}, \ldots,$ если X_{jk}^i заданы как функции x, y, z. Если X_{jk}^i задать по произволу, то, решая (3.3), мы определим e_{xx}, e_{xy} как операторы от функций X_{jk}^i, но не как функции от параметров X_{jk}^i. Утверждение (стр. 55), что «. . . e_{xx} есть непрерывные однозначные функции параметров X_{jk}^i, имеющие частные производные по X_{kj}^i», не имеет смысла.

4°. На стр. 57 упоминается «обратная теорема Лагранжа». Неясно, какова формулировка этой теоремы.

5°. Утверждение, что система интегральных уравнений (38) является системой уравнений «типа Вольтерра», неверно: строго говоря, равенства (38) не являются интегральными уравнениями, так как у неизвестных функций аргументы сдвинуты, причем даже величина этого сдвига неизвестна.

6°. В случае, если вся область тела перешла в пластическое состояние, тогда В. М. Панферов, применяя «нелокальную теорему существования», получает решение и в этом случае.

Следует отметить, что система (41) не имеет вида интегрального уравнения (40) и применять теорему, сформулированную на стр. 60, нельзя, так как функции $f_{11}^{(1)}, \ldots$ зависят от x, y, z не только через посредство $\omega(e_i)$, где $e_i = e_i(x, y, z)$.

К рассмотренной работе близка по стилю работа «О сходимости метода упругих решений для задачи упруго-пластического изгиба пластин»[2].

Разбирать подробно эту работу мы не будем. Заметим по поводу доказательства теоремы 5, что из оценки (4.18)

$$|f(\omega(e_i))| \leqslant \frac{N}{e_1^a} \qquad (a > 0)$$

следует, что

$$\lim f(\omega(e_i)) = 0 \qquad \text{при } e_i \to +\infty$$

Пусть $\alpha = \lim \omega(e_i)$ при $e_i \to +\infty$. Существование предела $\omega(e_i)$ следует из того, что $d\omega / de_i > 0$ и $\omega < 1$. Из непрерывности функции f получаем $f(\alpha) = 0$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, а это условие не фигурирует в условии теоремы. Тем более неясно выполнение этого условия в случаях, когда теорема 5 применяется. Теорема 5 даже в обобщенной формулировке (4.19) не применима к системе (2.35), так как функции $f_i(M, N, 0)$ зависят от x, y, z не через посредство ω, а непосредственно и через Ω. Мы не говорим уже о выполнении условия $f(\alpha) = 0$, где

$$\alpha = \lim_{e_i \to \infty} \omega(e_i) \qquad \text{при } e_i \to \infty$$

В конце статьи (стр. 212) приводится такое рассуждение: по методу упругих решений от k-го приближения мы переходим к $k+1$-му, решая систему эллиптического типа. Метод упругих решений сходится, поэтому система уравнений Генки-Шмидта есть система эллиптического типа.

Как известно [5], система уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_l} + \cdots = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

называется эллиптической, если определитель

$$|\omega'_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega'_{11}, \ldots \omega'_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega'_{m1}, \ldots \omega'_{mm} \end{vmatrix}$$

где

$$\omega'_{ij} = \sum_{k,\, l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}, \qquad \omega_1 = \omega_1(x_1, \ldots, x_n)$$

обращается в нуль только при $\operatorname{grad} \omega = 0$.

Из рассуждений В. М. Панферова эллиптичности системы уравнений Генки-Шмидта не следует.

Обратимся к работе В. М. Панферова «О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек»[1]. Это первая по времени работа В. М. Панферова, посвященная сходимости метода упругих решений для одной частной задачи.

На стр. 86 доказывается, что система уравнений

$$A_3 = \lambda \int_0^{\xi} [4\eta\Omega(\eta, \eta'')\sin t - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')\cos t]\, e^{-t}\, dt$$

$$A_4 = \lambda \int_0^{\xi} [4\eta\Omega(\eta, \eta'')(\sin t + \cos t) - 2\eta''\varphi(\eta, \eta'')(\cos t - \sin t)]\, e^{-t}\, dt \qquad (3.11)$$

$$\eta''^2(\xi) + \frac{4}{3}\eta^2(\xi) = \frac{4}{3} \qquad (\eta = \eta(\xi, A_3, A_4),\ \eta'' = \eta''(\xi, A_3, A_4))$$

с тремя неизвестными ξ, A_3 и A_4 имеет решение. Первые два уравнения системы (3.11) В. М. Панферов рассматривает как систему уравнений типа Вольтерра и решает эту систему методом последовательных приближений.

Этого делать нельзя по той причине, что при интегрировании в правой части формул (3.11) A_3 и A_4 следует считать постоянными параметрами.

Таким образом, вопрос о сходимости метода упругих решений даже в этом наиболее простом случае остается открытым.

Приступим к рассмотрению работы «О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций» [3].

Работа посвящена доказательству сходимости методов Галеркина и Ритца для упруго-пластических задач. Доказательство В. М. Панферов ведет, считая сходимость метода упругих решений установленной. Даже если принять это как постулат, то из рассуждений, приведенных в работе, сходимости методов Галеркина и Ритца не следует.

1°. На стр. 320 читаем: «Метод Ритца заключается в следующем. Пусть, например, на границе заданы перемещения

$$u_1 = \bar{u}(x, y, z), \qquad u_2 = \bar{v}(x, y, z), \qquad u_3 = \bar{w}(x, y, z) \qquad (7)$$

Тогда выбирается следующее поле смещений, сравнимых с истинным:

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= u_{10} + \sum a_m^{(k+1)} \chi_m(x, y, z) \\ u_2^{(k+1)} &= u_{20} + \sum b_m^{(k+1)} \varphi_m(x, y, z) \\ u_3^{(k+1)} &= u_{30} + \sum c_m^{(k+1)} \psi_m(x, y, z) \end{aligned} \qquad (8)$$

где $a_\nu^{(k+1)}$, $b_\nu^{(k+1)}$, $c_\nu^{(k+1)}$ — произвольные постоянные.

Функции χ_m, φ_m, ψ_m выбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям (7) и всем геометрическим связям, наложенным на тело. Конечно, при этом существенна полнота системы функций χ_m, φ_m, ψ_m. Подставляя (8) в уравнение (2)[1], получим систему линейных уравнений для определения постоянных:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial a_m} + \iiint \rho f_m \chi_1^{(k)}\, d\tau + \iint f_m \chi_{1\nu}^{(k)}\, dS = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial b_m} + \iiint \rho\varphi_m \chi_2^{(k)}\, d\tau + \iint \varphi_m \chi_{2\nu}^{(k)}\, dS = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial c_m} + \iiint \rho\psi_m \chi_3^{(k)}\, d\tau + \iint \psi_m \chi_{3\nu}^{(k)}\, dS = 0» \end{aligned} \qquad (9)$$

По поводу этой довольно длинной цитаты заметим следующее: здесь остается неясным, конечна или бесконечна сумма в правой части формул (8) и что означает верхний индекс $k+1$. Естественно бы считать, что сумма (8) конечна, а $u_i^{(k+1)}$ $(i = 1, 2, 3)$ обозначает $k+1$-е приближение по методу Ритца.

[1] Уравнение равновесия в вариациях.

На следующей же странице через $u_i^{(k+1)}$ обозначается $k+1$-е приближение по методу упругих решений.

Пишется точное решение упруго-пластической задачи в виде

$$u_1 = \sum (u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)}), \qquad u_2 = \sum (u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)}), \qquad u_3 = \sum (u_3^{(k+1)} - u_3^{(k)})$$

(формулы (12) стр. 321), после чего вместо $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ подставляется правая часть формул (8). Таким образом выходит, что в формулах (8) сумма справа бесконечна и

$$u_1^{(k+1)} = u_{10} + \sum a_m^{(k+1)} \chi_m(x, y, z), \qquad u_2^{(k+1)} = \cdots, \quad u_3^{(k+1)} = \cdots$$

есть точное решение $k+1$-й упругой задачи по методу упругих решений.

Это же следует из фразы в конце стр. 321: «... ряды (упругая задача)

$$\sum_m a_m^{(k+1)} \chi_m(x, y, z), \qquad \sum_m b_m^{(k+1)} \varphi_m(x, y, z), \qquad \sum_m c_m^{(k+1)} \psi_m(x, y, z) \qquad (14)$$

также равномерно сходящиеся и необходимое число раз дифференцируемые».

В статье, следовательно, содержится новое определение метода Ритца, расходящееся с общепринятым в советской и зарубежной литературе [6, 5, 7]. По обычному определению, если (8) — точное решение упругой задачи, то справа в формулах (8) должно быть конечное число членов, а равенство (8) следует считать приближенным.

2°. Утверждение о возможности однозначной разрешимости бесконечной системы (9), равномерной сходимости рядов (8) и возможности их почленного дифференцирования (конец стр. 321) высказано без ссылки на соответствующую литературу. Хотелось бы получить такую ссылку, потому что доказательство сформулированных утверждений нигде в литературе мы не встречали.

3°. Утверждение автора (начало стр. 322), что в ряду (13) можно группировать и переставлять члены, не доказана. Ссылка на равномерную сходимость рядов (14) и (12) не имеет отношения к делу, так как из равномерной сходимости ряда еще не следует возможности произвольной группировки и перестановки его членов.

4°. На стр. 322 (10 строка сверху) читаем «... следовательно, решение представляется в виде (8)». Если все рассуждения работы имеют целью показать представимость решений упруго-пластических задач в форме рядов (8), то это недоразумение. Дело в том, что если решение упруго-пластической задачи существует, то представление его в среднем рядами типа (8) следует из полноты систем $\{\varphi_m\}$, $\{\psi_m\}$, $\{\chi_m\}$. Такая полнота обычно предполагается.

Отметим, что представление решения в форме рядов типа (8) сходимости методов Ритца и Галеркина (понимаемых в общепринятом смысле) не доказывает.

Поступила 2 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Панферов В. М. О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек. ПММ, т. XIII, вып. 1, 1949.
2. Панферов В. М. О сходимости метода упругих решений для задачи упруго-пластического изгиба пластин. ПММ, т. XVI, вып. 2 1952.
3. Панферов В. М. О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
4. Панферов В. М. Общий метод решения краевых задач в теории упруго-пластических деформаций при простом нагружении А. А. Ильюшина. Вестник МГУ, № 8, 1952.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, стр. 304—310, 487—488, 1951.
6. Walter Ritz. Journ. für die reine und angew. Mathem., Bd. 135, 1909.
7. Михлин С. Г. Прямые методы вариационного исчисления. Гостехтеоретиздат, 1950.