О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Т. Х. Седельников

(Москва)

При нахождении температуры цилиндрического стержня с заданным распределением источников тепла, охлаждаемого снаружи жидкостью, коэффициент теплопередачи может зависеть от степени турбулентности потока жидкости.

Решается задача о нахождении распределения температуры при источниках, зависящих только от расстояния от оси, и коэффициенте теплопередачи вида $a + 2b\cos m\varphi$.

Исходное уравнение и краевые условия:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -Q(\rho), \qquad \frac{\partial T}{\partial \rho}\Big|_{\rho=R} + T\Big|_{\rho=R}(a + 2b\cos m\varphi) = 0 \tag{1}$$

Заменой $\rho = tR$, $Q^*(t) = R^2 Q(\rho)$, $a^* = aR$, $b^* = bR$ сводим их к уравнениям для единичного радиуса.

Решение ищем в виде

$$T(t, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos mn\varphi$$

Для $c_n(t)$ получаем уравнения

$$c_n'' + \frac{1}{t}c_n' - \frac{m^2 n^2}{t^2}c_n = 0 \quad (n \neq 0), \qquad c_0'' + \frac{1}{t}c_0' = -Q^*(t) \tag{2}$$

Учитывая конечность T при $t = 0$ находим

$$c_n(t) = \alpha_n t^{mn} \quad (n \neq 0), \qquad c_0(t) = c_0(1) + \int_t^1 \frac{dt'}{t'}\int_0^{t'} t'' Q(t'')\, dt'' \tag{3}$$

Подставляем в краевое условие, получаем систему:

$$\begin{aligned} &c_0'(1) + ac_0(1) + b\alpha_1 = 0 \\ &\alpha_1(m + a) + b\alpha_2 + 2bc_0(1) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_n(mn + a) + b\alpha_{n+1} + b\alpha_{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Легко проверить, что n-му уравнению системы (4) удовлетворяет выражение:

$$\alpha_n = (-1)^n\left\{AJ_{n+a/m}\left(\frac{2b}{m}\right) + BN_{n+a/m}\left(\frac{2b}{m}\right)\right\}$$

Из условия, что при $b = 0$ $\alpha_n = 0$, находим $B = 0$, а из первого и второго уравнения системы находим A:

$$A = \frac{b_0'(1)}{\frac{a}{2}J_{a/m}\left(\frac{2b}{m}\right) - bJ_{1+a/m}\left(\frac{2b}{m}\right)}, \qquad b_0(1) = \frac{A}{2}J_{a/m}\left(\frac{2b}{m}\right)$$

Решение задачи имеет вид:

$$T(t, \varphi) = \int_t^1 \frac{dt'}{t'}\int_0^{t'} t'' Q^*(t'')\, dt'' +$$

$$+ A\left\{\frac{1}{2}J_{a/m}\left(\frac{2b}{m}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{n+a/m}\left(\frac{2b}{m}\right) t^{mn}\cos mn\varphi\right\}$$

Подобным методом можно решить также задачу с Q (ρ, φ), имеющим ту же или более высокую степень симметрии, чем коэффициент теплопередачи.

Система (4), как и любая трехчленная система, может быть решена и методом цепных дробей. Обозначая $t_n = -\alpha_{n-1} / \alpha_n$

$$t_n = \frac{mn + a}{b} - \frac{1}{t_{n+1}} = \frac{mn + a}{b} \left\{ 1 - \frac{\eta_n |}{| 1} - \frac{\eta_{n+1} |}{|} - \ldots \right\}$$

где

$$\eta_n = \frac{b^2}{(mn + a) [m(n + 1) + a]}$$

и быстро убывает.

Обрывая дробь для t_1 на достаточно далеком члене, находим уравнение $t_1 = -2c_0(1) / \alpha_1$, которое вместе с первым уравнением системы (4) дает $c_0(1)$ и α_1. Остальные члены находим при помощи $\alpha_n = -\alpha_{n-1} / t_n$.

Например, при $Q^* = \text{const} = 300$, $a^* = 2c^* = 1.2$, $m = 6$

$$T(t, \varphi) \approx 300^\circ \{0.455 + 0.25(1 - t^2) - 0.076\, t^6 \cos 6\varphi\}$$

следующий член дает меньше 1%. Таким образом имеем

$$T(0) = 211^\circ, \qquad T(R)_{\max} = 159^\circ, \qquad T(R)_{\min} = 114^\circ$$

В случае постоянного коэффициента теплопередачи, равного среднему значению, т. е. a^*, температура в центре $T(0)$ составляет 200°, а на границе 125°. Такое малое изменение температуры в центре при максимальном изменении коэффициента теплопередачи (обращение в отдельных точках в нуль) вызвано высокой симметрией системы.

Поступила 28 III 1956