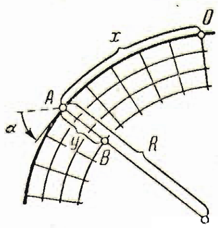
ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ СВОБОДНОГО КОНТУРА

В. В. Соколовский
(Москва)

Предельное состояние сыпучей среды в непосредственной близости от контура, свободного от напряжений, может быть исследовано в криволинейных координатах, соответствующих форме этого контура.



Фиг. 1

Выберем за такие ортогональные криволинейные координаты соответственно длину x дуги OA заданного контура и длину y нормали AB, отсчитанной от того же самого контура (фиг. 1).

Нетрудно видеть, что если через $R = R(x) = dx \,/\, d\alpha$ обозначить радиус кривизны контура в точке A, то квадрат бесконечно малого элемента длины dl напишется так:

$$dl^2 = \left[1 - \frac{y}{R(x)}\right]^2 dx^2 + dy^2$$

а потому коэффициент Ламе

$$g = 1 - \frac{y}{R(x)}$$

Дифференциальные уравнения равновесия в принятых криволинейных координатах имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{2\tau_{xy}}{R} = \gamma g \sin\alpha, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + g\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{R} = \gamma g \cos\alpha \tag{1}$$

а условие предельного состояния будет

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{\sin^2\rho}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 \tag{2}$$

причем для компонент напряжения принято правило знаков, обычное в статике сыпучей среды[1]. Эту систему уравнений можно преобразовать путем перехода от компонент напряжения к новым переменным σ и φ по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma(1 \pm \sin\rho\cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = \sigma\sin\rho\sin 2\varphi \tag{3}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения равновесия (1), после простых преобразований найдем

$$\begin{gathered}(1 + \sin\rho\cos 2\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \sin\rho\sin 2\varphi g\frac{\partial\sigma}{\partial y} - 2\sigma\sin\rho\left[\sin 2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R}\right) - \cos 2\varphi g\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = \gamma g\sin\alpha\\ \sin\rho\sin 2\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial x} + (1 - \sin\rho\cos 2\varphi) g\frac{\partial\sigma}{\partial y} + 2\sigma\sin\rho\left[\cos 2\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R}\right) + \sin 2\varphi g\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = \gamma g\cos\alpha\end{gathered} \tag{4}$$

Займемся определением приближенных выражений компонент напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} или σ и φ в слое вдоль контура. С этой целью представим σ и φ в виде рядов по степеням от y, а именно

$$\sigma = \gamma\sigma_0(x)\, y\,[1 + \sigma_1(x)\, y + \ldots], \qquad \varphi = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) y + \ldots$$

Внесем ряды для σ и φ в уравнения (4) и соберем члены с одинаковыми степенями y. Сравнивая свободные члены, получим

$$\sigma_0(1 - \sin\rho\cos 2\varphi_0) = \cos\alpha, \qquad \sigma_0\sin\rho\sin 2\varphi_0 = \sin\alpha \tag{5}$$

а сравнивая коэффициенты при y будем иметь

$$\begin{gathered}\sigma_1(\cos 2\varphi_0 - \sin\rho) - \frac{\sin 2\varphi_0}{2\sigma_0}\frac{d\sigma_0}{dx} + \sin\rho\left(\frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{1}{R}\right) = 0\\ 2\varphi_1(\cos 2\varphi_0 - \sin\rho) + \frac{\cos^2\rho}{2\sigma_0\sin\rho}\frac{d\sigma_0}{dx} - \sin 2\varphi_0\left(\frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{1}{R}\right) = 0\end{gathered} \tag{6}$$

Из уравнений (5) после некоторых преобразований можно получить

$$\sin(2\varphi_0 + \alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin\rho}$$

а также

$$\sigma_0 \cos^2\rho = \cos\alpha + \sin\rho\cos(2\varphi_0 + \alpha) = \cos\alpha\,(1 - \sin\lambda)$$

Здесь и далее для удобства введена величина λ следующим образом

$$\cos\lambda = \frac{\cos\rho}{\cos\alpha} \tag{7}$$

Из уравнений (6) нетрудно найти величины σ_1 и φ_1 в виде

$$\sigma_1 = \frac{1}{2R} - \frac{\operatorname{tg}^2\rho\,(1 - \sin\lambda)}{R\sin^2\lambda}, \qquad 2\varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(1 - \sin\lambda)}{R\sin^2\lambda} \tag{8}$$

Определим теперь компоненты напряжения по формулам (3), подставляя ряды для σ и φ и ограничиваясь вычисленными членами. Приближенно имеем

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \gamma\sigma_0 y\,[(1 + \sigma_1 y)(1 \pm \sin\rho\cos 2\varphi_0) \mp 2\varphi_1 y\sin\rho\sin 2\varphi_0]$$

$$\tau_{xy} = \gamma\sigma_0 y\sin\rho\,[(1 + \sigma_1 y)\sin 2\varphi_0 + 2\varphi_1 y\cos 2\varphi_0]$$

Подставляя сюда σ_0, φ_0 и σ_1, φ_1, выведем для компонент напряжения σ_y и τ_{xy} приближенные формулы

$$\sigma_y = \gamma y\left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \sin\lambda}{\cos^2\rho}\right)\frac{y}{R}\right]\cos\alpha, \qquad \tau_{xy} = \gamma y\left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \sin\lambda}{\cos^2\rho\sin\lambda}\right)\frac{y}{R}\right]\sin\alpha \tag{9}$$

а для компоненты σ_x приближенную формулу

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{2\,(1 - \sin\lambda)}{\cos^2\rho} - 1 - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha\,(1 - \sin\lambda)^2}{\cos^2\rho\sin^2\lambda}\,\frac{y}{R} \tag{10}$$

Легко также найти отношение

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} = \operatorname{tg}\alpha\left[1 - \frac{(1 - \sin\lambda)^2}{\cos^2\rho\sin\lambda}\,\frac{y}{R}\right]$$

Отсюда видно, что если $R\sin\lambda < 0$, то неравенство

$$|\tau_{xy}| \leqslant \sigma_y \operatorname{tg}\rho$$

после простых преобразований дает

$$y \leqslant |R\sin\lambda|\,\frac{\cos^2\rho}{(1 - \sin\lambda)^2}\left(\frac{\operatorname{tg}\rho}{\operatorname{tg}|\alpha|} - 1\right)$$

так, что непрерывное предельное состояние возможно лишь в некотором ограниченном слое.

В частном случае, когда контур прямолинейный, т. е. когда $R = \infty$, предыдущие формулы (9) и (10) переходят в известные формулы Ренкина

$$\sigma_y = \gamma y\cos\alpha, \qquad \tau_{xy} = \gamma y\sin\alpha, \qquad \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{2\,(1 - \sin\lambda)}{\cos^2\rho} - 1$$

которые определяют предельное состояние во всей полуплоскости $y \geqslant 0$, заполненной сыпучей средой.

Поступила 26 VI 1956

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Издание первое — Академиздат, 1942; издание второе — Гостехиздат, 1954.