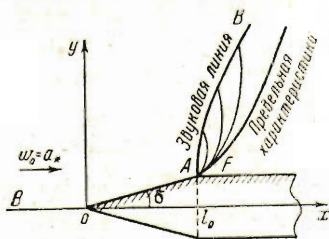


СОПРОТИВЛЕНИЕ КЛИНОВИДНОГО ПРОФИЛЯ, ОБТЕКАЕМОГО ПОТОКОМ ЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ

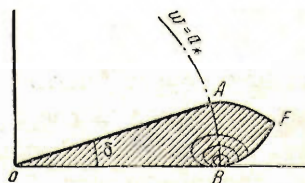
С. К. Асланов

(Саратов)

Рассмотрим поток газа звуковой скорости, набегающий под нулевым углом атаки на симметричный клиновидный профиль длины l_0 и углом раствора $2\delta = 2\pi/\xi$ (фиг. 1). Эту аэродинамическую задачу можно свести к краевой задаче Ф. Трикоми [4] на плоскости годографа (фиг. 2). Набегающий поток тормозится перед клином, начиная от скорости звука на бесконечности до нуля в точке O (фиг. 1). Затем он опять разгоняется и достигает звуковой скорости на параболической линии AB , которая простирается неограниченно в поперечном к потоку направлении. Следующая дальше сверхзвуковая область течения влияет на дозвуковую лишь своей частью, непосредственно прилегающей к линии перехода и ограниченной «предельной» характеристикой FB [6]. Поток ниже по течению может быть рассчитан методом характеристик. Из сказанного следует, что дозвуковая область течения $BOAB$ отображается на круговой сектор AOB плоскости годографа (фиг. 2), а интересующая нас часть сверхзвуковой зоны $BAFB$ — на характеристический треугольник AFB .



Фиг. 1



Фиг. 2

Функция тока Ψ должна быть решением уравнения Чаплыгина

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{1 + (\beta - 1)\tau}{\tau(1 - \tau)} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{4\tau^2(1 - \tau)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

и в заштрихованной области плоскости годографа удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\Psi(\tau, 0) = 0 \quad (0 \leq \tau < \tau_s) \quad (\text{условие симметрии течения}) \quad (2)$$

$$\Psi(\tau, \pi/\xi) = 0 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_s) \quad (\text{условие обтекания стенки клина}) \quad (3)$$

$$x = l_0 \text{ при } \tau = \tau_s, \theta = \pi/\xi \quad (\text{условие достижения скорости звука в точке } A) \quad (4)$$

$$\Psi = 0 \text{ на характеристике } AF \quad (\text{условие поворота потока около точки } A) \quad (5)$$

Здесь $\tau = w^2/w_{\max}^2$, w — модуль скорости, w_{\max} — модуль максимальной скорости, θ — угол наклона вектора скорости к оси x , $\beta = (\kappa - 1)^{-1}$, κ — показатель адиабаты и τ_s соответствует звуковой скорости.

Заметим, что из однородности краевых условий можно сделать вывод, что нетривиальное решение будет существовать лишь при наличии особенности. Таковой как раз обладает набегающий однородный поток, так как все линии тока на плоскости годографа исходят из одной точки B .

Сформулированная задача рассматривалась Г. Гудерлеем и Х. Йосихарой [8] и Л. Овсянниковым [13]. Но упомянутые авторы для исследования потока применяли приближенные уравнения околосвукового движения газа в форме С. В. Фальковича [7]:

$$\eta \Psi_{\theta\theta} + \Psi_{\eta\eta} = 0, \quad \eta = \frac{1}{2} (\kappa + 1)^{1/2} (1 - \tau/\tau_s)$$

При обтекании клина на его острье возникает критическая точка, в окрестности которой скорости малы, и следовательно, это уравнение непригодно. Поэтому в настоящей работе указанная задача будет исследоваться при помощи точных уравнений С. А. Чаплыгина [5] (1) в следующей приближенной постановке.

Рассмотрим особенность, соответствующую невозмущенному потоку и выясненную Ф. И. Франклем [6], совместно с граничными условиями (2), (3) и (4). Вполне понятно, такое решение не будет единственным, так как остаются невыполненными условия в гиперболической области. Но расчеты Л. Овсянникова [13] показывают, что выполнение краевого условия (5), требуя весьма трудоемких вычислений, приводит к совершенно незначительному изменению кривой распределения давлений на профиле. При этом коэффициент сопротивления клина (фиг. 1) уменьшается всего на 0.3%. Таким образом, выбранный выше приближенный подход к задаче оправдывает себя [1].

Будем искать интересующее нас решение в виде ряда типа С. А. Чаплыгина [5] по частным решениям $z_\nu(\tau) \sin \nu \theta$ уравнения (1):

$$\Psi(\tau, \theta) = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/\beta} \frac{Z_{1/2n\xi}(\tau)}{Z_{1/2n\xi}(\tau_s)} \sin n \xi \theta \quad (\tau < \tau_s) \quad (6)$$

где $Z_\nu(\tau)$ — функция Чаплыгина, а c^2 — неопределенная постоянная.

Следуя Ф. И. Франклю [6], нетрудно выяснить, что выбранная нами функция тока (6) имеет требуемую особенность в точке $\tau = \tau_s$, $\theta = 0$, удовлетворяя при этом условиям (2) и (3). Постоянная же c^2 находится из условия (4). Для этого необходимо вычислить распределение скоростей по поверхности клина. Использование одного из уравнений Чаплыгина [5]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = - \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{2\beta+1}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

(φ — потенциал скорости) и интегрирование формулы перехода [5]

$$dx = \frac{\cos \theta}{w} d\varphi - \frac{1}{(1-\tau)^\beta} \frac{\sin \theta}{w} d\Psi$$

дает

$$x_k = - \frac{1}{2w_{\max}} \int_0^{\tau} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau V \tau (1-\tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi/\xi} d\tau$$

Внося сюда (6) и вычисляя появляющиеся интегралы тем же самым путем, который описан Чаплыгиным в работе [5], будем иметь распределение скоростей на клине

$$x_k(\tau) = \frac{c^2}{w_{\max}} \frac{1}{V \tau (1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{5/\beta} \xi}{n^2 \xi^2 - 1} \frac{Z_{1/2n\xi}(\tau) + 2\tau Z'_{1/2n\xi}(\tau)}{Z_{1/2n\xi}(\tau_s)}$$

Тогда, устремляя τ к τ_s , можно удовлетворить условию (4). Причем, значение $\tau = \tau_s$ следует понимать в предельном смысле, так как последний ряд в этом случае расходится. Таким образом,

$$l_0 = \frac{c^2}{w_{\max}} \frac{1}{V \tau_s (1-\tau_s)^\beta} \lim_{\tau \rightarrow \tau_s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{5/\beta} \xi}{n^2 \xi^2 - 1} \frac{Z_{1/2n\xi}(\tau) + 2\tau Z'_{1/2n\xi}(\tau)}{Z_{1/2n\xi}(\tau_s)} \quad (7)$$

и определение c^2 свелось к нахождению предела. Если считать клин тонким (ξ велико) и $\tau \rightarrow \tau_s$, естественно воспользоваться асимптотическими формулами для $Z_\nu(\tau)$ и $Z'_\nu(\tau)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Последние, как показано [9], в околозвуковом случае имеют вид:

$$\frac{Z_{1/2\nu}(\tau)}{Z_{1/2\nu}(\tau_s)} = \lambda(\nu^{2/\beta} \eta), \quad 2\tau \frac{Z'_{1/2\nu}(\tau)}{Z_{1/2\nu}(\tau_s)} = -(\alpha + 1)^{2/\beta} \lambda'(\nu^{2/\beta} \eta) \nu^{2/\beta}$$

где

$$\eta = \left[\frac{3}{4} \int_{\tau}^{\tau_s} \sqrt{\frac{1-\tau/\tau_s}{1-\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \right]^{2/\beta}$$

и $\lambda(s)$ — функция Эйри [10], удовлетворяющая уравнению Эйри [10] $\lambda''(s) - s\lambda(s) = 0$ и условиям $\lambda(0) = 1$, $\lambda(+\infty) = 0$. Подстановка указанной асимптотики в (7) дает

¹ Заметим, что в работе Л. В. Овсянникова [13] обойден вопрос о суммировании расходящегося ряда [типа (8)], который возникает из удовлетворения условия (4).

$$\left\{ \frac{c^2 (\kappa + 1)^{1/2}}{w_{\max} l_0 \xi^{1/2} \sqrt{\tau_s} (1 - \tau_s)^\beta} \right\}^{-1} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} n^{1/2} \lambda' (n^{2/3} \xi^{2/3} \eta) \quad (8)$$

Суммирование полученного ряда можно произвести преобразованием Меллина [3]

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds \quad (\sigma_1 < \sigma < \sigma_2) \quad (9)$$

Здесь $\sigma = \text{Re } s$, а пределы σ_1 и σ_2 определяют вертикальную полосу комплексной плоскости s , в которой интеграл для $F(s)$ сходится. Указанные преобразования дают

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \zeta(s) ds$$

Здесь использовано определение дзета-функции Римана [1]. Что же касается $F(s)$, то последняя находится из трансформации (9).

Для применения указанного метода суммирования для ряда

$$Q_0(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{1/2} \lambda' (n^{2/3} \xi^{2/3} \eta)$$

удобно представить его в иной форме. Переходя от функции Эйри к бesselевым функциям [10]

$$\lambda'(s) = \frac{s \Gamma(2/3)}{3^{-1/2} \pi} K_{2/3} \left(\frac{2}{3} s^{3/2} \right)$$

и совершая над этим рядом тождественное преобразование, получим

$$Q_0(a) = - \frac{3^{5/2} \Gamma(2/3)}{2^{2/3} \pi} \{Q_1(a) - 2^{4/3} Q_1(2a)\}$$

где

$$Q_1(a) = a^{-1/3} \sum_{n=1}^{\infty} a n K_{2/3}(an), \quad a = \frac{2}{3} \xi \eta^{3/2}$$

В частности, когда $a = 0$ ($\eta = 0$):

$$Q_0(0) = \frac{3^{5/2} \Gamma(2/3)}{2^{2/3} \pi} (2^{4/3} - 1) Q_1(0)$$

Если воспользоваться правилами применяемой трансформации [3]

$$x^\mu f(x), \quad F(s + \mu) \quad (\sigma_1 - \mu < \sigma < \sigma_2 - \mu); \quad f(ax), \quad a^{-s} F(s) \quad (\sigma_1 < \sigma < \sigma_2)$$

и таблицей формул обращения Меллина [12], то $Q_1(a)$ выразится в следующем виде:

$$Q_1(a) = \frac{a^{-1/3}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{-s} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{5}{6}\right) \zeta(s) ds \quad \left(\sigma > -\frac{1}{3}\right)$$

Причем, подынтегральное выражение обладает простыми полюсами в точках $s = -2m - 1/3$ и $s = -2m - 5/3$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) соответственно с вычетами [1]

$$(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+1/3} \Gamma\left(-m + \frac{2}{3}\right) \frac{\zeta(-2m - 1/3)}{m!}$$

$$(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+5/3} \Gamma\left(-m - \frac{2}{3}\right) \frac{\zeta(-2m - 5/3)}{m!}$$

Полюс в точке $s = 1$ нас не интересует, так как лежит вне рассматриваемой области (фиг. 3) при соответствующем выборе σ ($\sigma < 0$).

Для перехода к пределу в случае $a \rightarrow 0$ разложим исследуемый интеграл при помощи теории вычетов. Для этого построим замкнутый контур интегрирования $BCB'A$, дополнив прямую VAB' дугой окружности бесконечно большого радиуса BCB' . Сам радиус выберем в виде $R = 2N$ (N — целое число), так что контур интегрирования

не будет содержать особых точек. Тогда можно показать, что при некоторых условиях рассматриваемый интеграл, взятый по дуге окружности BCB' , стремится к нулю, если $N \rightarrow \infty$. В самом деле, оценивая подинтегральное выражение

$$J(a, s) = a^{-s} 2^{s-1} \Gamma(1/2s + 1/6) \Gamma(1/2s + 5/6) \zeta(s)$$

на указанной дуге при помощи функционального уравнения Римана [1]

$$2^{1-s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos(1/2\pi s) = \pi^s \zeta(1-s)$$

и асимптотической формулы для гамма-функции [1]

$$\Gamma(z) = \exp\left[\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + \frac{1}{2} \ln 2\pi\right] \{1 + O(|z|^{-1})\} \quad (|z| \rightarrow \infty, |\arg z| \leq \pi - \varepsilon)$$

(ε — сколь угодно малая положительная величина), после простых преобразований будем иметь

$$|J(a, s)| = \sqrt{2\pi} e^{-2R^{1/2}} |\zeta(1-s)| (4\pi/a)^q \exp\left(\frac{1}{2} \pi |t|\right) \frac{1}{2} \exp \frac{1}{2} t \{2 \arg(1-s) - \arg(1/2s + 1/6) - \arg(1/2s + 5/6)\} \quad (s = q + it)$$

Или, если учесть

$$\arg(1-s) = \arg(s-1) + \begin{cases} \pi & (t < 0) \\ -\pi & (t > 0) \end{cases}$$

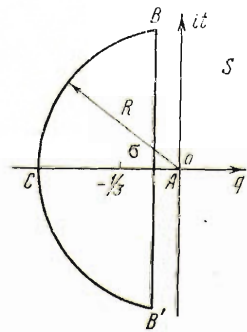
то

$$|J(a, s)| = \sqrt{1/2 \pi} e^{-2R^{1/2}} |\zeta(1-s)| (4\pi/a)^q \exp(-1/2 \pi |t|)$$

Что касается точки C ($s = -R$), выпавшей из рассмотрения, то в ней [1] $J(a, s) = 0$ в силу $\zeta(-2N) = 0$.

Таким образом $|J(a, s)| \rightarrow 0$ при $a < 4\pi$ на дуге BCB' быстрее, чем любая отрицательная степень, т. е. [2]

$$\int_{BCB'} J(a, s) ds \rightarrow 0$$



Фиг. 3

Поэтому теорема о вычетах, примененная к области $BCB'A$ (фиг. 3), дает

$$Q_1(a) = 2^{-1/3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2m} \Gamma\left(-m + \frac{2}{3}\right) \zeta\left(-2m - \frac{1}{3}\right) + 2^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2m+3/2} \Gamma\left(-m - \frac{2}{3}\right) \zeta\left(-2m - \frac{5}{3}\right)$$

Причем, сходимость возникших рядов при $a < 2\pi$ легко установить при помощи использованных выше соотношений. Отсюда сразу же следует

$$Q_1(0) = 2^{-1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \zeta\left(-\frac{1}{3}\right), \quad Q_0(0) = \frac{3^{5/6} \Gamma^2(2/3)}{2\pi} (2^{4/3} - 1) \zeta\left(-\frac{1}{3}\right)$$

а значит, (8) принимает вид:

$$\left\{ \frac{c^2 (\alpha + 1)^{1/3}}{w_{\max} l_0^2 \xi^{1/3} \sqrt{\tau_s} (1 - \tau_s)^\beta} \right\}^{-1} = -\frac{3^{5/6} \Gamma^2(2/3)}{2\pi} (2^{4/3} - 1) \zeta\left(-\frac{1}{3}\right) \quad (10)$$

Перейдем теперь к определению коэффициента сопротивления клиновидного профиля фиг. 1. Как известно, коэффициент местного давления представляется в виде

$$C_p = \frac{2}{\alpha} \left\{ \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_s} \right)^{\beta+1} - 1 \right\} = \frac{p - p_*}{1/2 \rho_* a_*^2}$$

где a_* — критическая скорость звука, p_* и ρ_* — давление и плотность при звуковой скорости.

Просуммировав местное давление вдоль всей щели клина, находим

$$C_x = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} C_p \left(\frac{dy}{dx} dx \right)_{\theta=\pi/\xi} = \frac{\pi}{\xi l_0} \int_0^{l_0} C_p \frac{dx_k}{d\tau} d\tau$$

Интеграция последнего по частям и подстановка $x_k(\tau)$ дают

$$C_x = \left\{ \frac{c^2 (\alpha + 1)^{1/2}}{w_{\max} l_0 \xi^{1/2} \sqrt{\tau_s} (1 - \tau_s)^{1/2}} \right\} \left[\frac{\delta^{5/2}}{(\alpha + 1)^{1/2}} \right] \frac{2}{\pi^{2/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/2}}$$

Находя c^2 из (10), будем окончательно иметь формулу для коэффициента сопротивления при скорости звука:

$$C_x = \frac{4\pi^{1/2}}{3^{1/2} \Gamma^2(2/3)} \frac{2^{2/3} - 1}{2^{1/2} - 1} \frac{\zeta(1/3)}{\zeta(-1/3)} \left[\frac{\delta^{5/2}}{(\alpha + 1)^{1/2}} \right]$$

или после подсчета [11]

$$C_x = 1.75 \left[\frac{\delta^{5/2}}{(\alpha + 1)^{1/2}} \right]$$

Последний результат совпадает с результатом Г. Гудерлея и Х. Йосихары [8], которыми задача звукового обтекания клина решалась в точной постановке, но на основе уравнений околосредового потока в форме С. В. Фальковича [7]. Мы же не решали полной краевой задачи Трикоми, к которой сводится на плоскости годографа проблема обтекания клина потоком газа со скоростью звука на бесконечности. В рассмотренной нами постановке условие $\psi = 0$ на характеристике AF (фиг. 2) осталось неудовлетворенным. Но потребовав, чтобы функция тока исследуемого течения (6) обладала особенностью Франкля [6], мы тем самым потребовали, чтобы, во-первых, $\varphi(\tau, \theta)$ и $\Psi(\tau, \theta)$ были регулярны на предельной характеристике BF и, во-вторых, чтобы все линии тока пересекали звуковую линию. Повидимому, этим и объясняется совпадение с результатами Г. Гудерлея и Х. Йосихары [8], а (6) дает главный член решения задачи в точной постановке. Автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за указания.

Поступила 29 IV 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Е. и Ватсон Г. Курс современного анализа, ч. 1 и 2, ГТТИ, 1934.
2. Эфрос А. и Данилевский А. Операционное исчисление и контурные интегралы. ОНТИ, 1937.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ГИИЛ, 1948.
4. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. ГИИЛ, 1947.
5. Чаплыгин С. А. О газовых струях, ГИТТЛ, 1949.
6. Франкль Ф. И. Об одном классе решений газодинамических уравнений С. А. Чаплыгина. Ученые записки МГУ, т. IV, вып. 154. Механика, 1951.
7. Фалькович С. В. К теории сопел Лаваля. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
8. Гудерлей Г. и Йосихара Х. Обтекание клинообразного профиля при числе M , равном единице. Механика, ИИЛ, вып. 3, 1951.
9. Асланов С. К. Кандидатская диссертация. СГУ, 1956.
10. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. НИИ-108, 1946.
11. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГИТТЛ, 1949.
12. Macfarlane G. The Application of Mellin Transforms to the Summation of Slowly Convergent Series. The Philosophical Magazine, vol. 40, № 301, 1949.
13. Овсяников Л. В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука. Труды ЛКВВИА, вып. 33, 1950.