Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Д. А. Добротин

(Ленинград)

В предлагаемой статье рассматриваются уравнения вида $L(x) = f(x, t)$, где $L(x)$ означает линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. При этом предполагается, что все корни соответственного характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть.

В статье устанавливается некоторая окрестность начала координат в фазовом пространстве, в которой имеется асимптотическая устойчивость и дается оценка решений, выходящих из этой области для любого момента времени.

Основным методом, используемым в работе, является метод последовательных приближений, развитый для решения аналогичных задач Э. Коттоном, О. Перроном, И. Г. Петровским и рядом других исследователей.

§ 1. Предварительные замечания. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(x, t) \tag{1.1}$$

Функцию $f(x, t)$ будем при этом предполагать такой, что

$$|f(x, t)| \leqslant A|x|^k \quad (k > 1), \qquad \left|\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right| \leqslant B|x|^\gamma \quad (\gamma > 0) \text{ при } |x| \leqslant L \tag{1.2}$$

Коэффициенты a_n предполагаем постоянными и вещественными. Предположим, кроме того, что все корни соответственного характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1.3}$$

имеют отрицательную вещественную часть, и обозначим через α расстояние от мнимой оси до ближайшего к ней корня. Тогда для каждого решения соответственного однородного дифференциального уравнения

$$Z^{(n)} + a_1 Z^{(n-1)} + \ldots + a_n Z = 0 \tag{1.4}$$

можно дать оценку

$$|Z(t)| \leqslant K e^{-(\alpha-\varepsilon)t} \tag{1.5}$$

где ε — любое положительное число, а K — некоторая постоянная, зависящая от начальных условий рассматриваемого решения и от выбора ε.

Очевидно, что для всех решений уравнения (1.1) нельзя гарантировать существования оценки вида (1.5). Однако можно утверждать, что если какое-либо решение $x(t)$ уравнения (1.1) стремится к нулю при $t \to \infty$, то характеристичное число [1] этого решения не меньше α.

---

[1] Напомним, что согласно Ляпунову [1] характеристичным числом функции $x(t)$ называется такое число λ_0, что для всякого $\varepsilon > 0$ функция $x(t)\,e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}$ есть неограниченная, а $x(t)\,e^{(\lambda_0-\varepsilon)t}$ исчезающая функция.

Действительно, так как $x(t)$ стремится к нулю, то, начиная с некоторого $t=t_0$, рассматриваемое решение оказывается в сколь угодно малой окрестности начала координат. Но из работ Ляпунова, продолженных для неаналитических правых частей О. Перроном [2] и И. Г. Петровским [3], непосредственно следует, что для решений, выходящих из некоторой достаточно малой окрестности начала координат, наименьшее характеристичное число решений уравнения (1.1) совпадает с наименьшим характеристичным числом решений уравнения (1.4). Поэтому, если какое-либо решение уравнения (1.1) при $t \to \infty$ стремится к нулю, то для него также верна для всех $t \geqslant 0$ оценка

$$|x(t)| \leqslant K e^{-(\alpha-\varepsilon)t}$$

где ε — любое положительное число. Число K, как и в формуле (1.5), зависит от выбора $\varepsilon > 0$ и от начальных условий. Установить аналитический вид этой зависимости представляется, однако, весьма сложной задачей. В настоящей работе мы установим численное значение константы K лишь для решений, выходящих из некоторой определенной окрестности начала координат в соответственном фазовом пространстве. При этом определенным образом выбирается и число ε. Тем самым устанавливается также и некоторая область асимптотической устойчивости.

§ 2. Оценка решения в общем случае. Среди решений однородного уравнения (1.4) выберем решение $z_0(t)$, удовлетворяющее условиям

$$z_0(0) = z_0'(0) = \ldots = z_0^{(n-2)}(0) = 0, \quad z_0^{(n-1)}(0) = 1 \tag{2.1}$$

Обозначим через $z(t)$ общее решение уравнения (1.4). Тогда функция

$$y(t) = z(t) + \int_0^t z_0(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

есть общее решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \varphi(t) \tag{2.3}$$

а функция

$$y_0(t) = \int_0^t z_0(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{2.4}$$

есть частное решение того же уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Сравнивая (1.1) и (2.3), замечаем, что функция $x(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = z(t) + \int_0^t z_0(t-\tau)\,f(x,\tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

При этом начальные условия для функций $x(t)$ и $z(t)$ совпадают.

Будем решать уравнение (2.5) по методу последовательных приближений, взяв за исходное (нулевое) приближение функцию $z(t)$.

$$x_0(t) \equiv z(t), \qquad x_{m+1}(t) \equiv z(t) + \int_0^t z_0(t-\tau)\,f(x_m,\tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

Выберем какое-либо число α_0:

$$0 < \alpha_0 < \alpha \frac{k-1}{k}, \qquad \alpha_0 < \alpha \frac{\gamma}{\gamma + 1} \tag{2.7}$$

и положим $\beta = \alpha - \alpha_0$. Решение $z(t)$ можно написать в виде

$$z(t) = Ne^{-\beta t}\zeta(t), \qquad \zeta(t) = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{m} P_s(t)\, e^{(\lambda_s+\beta)t} \tag{2.8}$$

где λ_s — корни характеристического уравнения (1.3),

$$P_s(t) = C_{s0} + C_{s1}t + \ldots + C_{se}t^l$$

C_{si} — произвольные постоянные и N — произвольное положительное число. Так как $\operatorname{Re}(\lambda_s + \beta) < 0$, то $\zeta(t)$ в (2.8) стремится к нулю при $t \to \infty$; поэтому для любого $\alpha_0 > 0$ и любого $N > 0$ можно выбрать такие начальные условия для $z(t)$ (а следовательно, и $x(t)$), т. е. такие значения C_{si}, что для всех $t \geqslant 0$

$$|z(t)| \leqslant Ne^{-\beta t} \tag{2.9}$$

Поэтому $|x_0(t)| \leqslant Ne^{-\beta t}$. Выбрав $N \leqslant L$, дадим оценку

$$|x_1(t)| \leqslant Ne^{-\beta t} + \left| \int_0^t z_0(t-\tau)\, f(x_0, \tau)\, d\tau \right|$$

Для решения $z_0(t)$ известна следующая оценка [4]:

$$|z_0(t)| \leqslant \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.10}$$

Поэтому получаем

$$|x_1(t)| \leqslant Ne^{-\beta t} + \frac{AN^k}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-(\beta k - \alpha)\tau} (t-\tau)^{n-1}\, d\tau$$

Легко показать [1], что

$$\int_0^t e^{-a\tau}(t-\tau)^{n-1} d\tau \leqslant \frac{t^{n-1}}{a} \qquad (a > 0,\ t \geqslant 0) \tag{2.11}$$

Так как $\beta k - \alpha > 0$ вследствие (2.7), то

$$x_1(t)| \leqslant Ne^{-\beta t}\left[1 + \frac{AN^{k-1}}{(\beta k - \alpha)(n-1)!} e^{-\alpha_0 t}\, t^{n-1}\right]$$

---

[1] Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-a\tau}(t-\tau)^m\, dt - \frac{t^m}{a}$$

Очевидно,

$$\Phi^{(m)}(t) = m! \int_0^t e^{-a\tau}\, d\tau - \frac{m!}{a} = -\frac{m!}{a} e^{-at} < 0$$

Отсюда следует, что $\Phi^{(m-1)}(t)$ убывает с возрастанием t. Но $\Phi^{(m-1)}(0) = 0$, поэтому $\Phi^{(m-1)}(t) < 0$ при $t > 0$. Значит, убывает $\Phi^{(m-2)}(t)$.

Продолжая те же рассуждения получим, что $\Phi(t) < 0$ при $t > 0$. Отсюда и следует (2.11).

Возьмем какое-либо $\mu > 1$. Для любого такого μ и всех $t > 0$ найдется такое N_0, что при всех $t \geqslant 0$ и $N \leqslant N_0$

$$1 + \frac{AN^{k-1}}{(\beta k - \alpha)(n-1)!} e^{-\alpha_0 t} t^{n-1} \leqslant \mu \tag{2.12}$$

и $\mu N \leqslant L$. Тогда $|x_1(t)| \leqslant \mu N e^{-\beta t}$. Точно так же имеем

$$|x_2(t)| \leqslant N e^{-\beta t}\left[1 + \frac{AN^{k-1}\mu^k}{(\beta k - \alpha)(n-1)!} e^{-\alpha_0 t} t^{n-1}\right]$$

Каково бы ни было $\mu > 1$, можно выбрать настолько малое N_0, что для всех $t \geqslant 0$ и $N \leqslant N_0$

$$1 + \frac{AN^{k-1}\mu^k}{(\beta k - \alpha)(n-1)!} e^{-\alpha_0 t} t^{n-1} \leqslant \mu \tag{2.13}$$

Отметим, что так как $\mu > 1$, то при выполнении неравенства (2.13) неравенство (2.12) также будет выполняться.

Таким образом, получаем $|x_2(t)| \leqslant \mu N e^{-\beta t}$. Отсюда следует, что

$$|x_m(t)| \leqslant \mu N e^{-\beta t} \tag{2.14}$$

Поэтому, если существует предельная функция $x(t) = \lim x_m(t)$ при $m \to \infty$, то для нее выполняется та же оценка.

Докажем теперь сходимость метода. Для этого рассмотрим последовательные разности. Вследствие второго условия (1.2) и (2.14)

$$|f(x_{m+1}, t) - f(x_m, t)| \leqslant BN^\gamma \mu^\gamma e^{-\beta\gamma t} |x_{m+1}(t) - x_m(t)|$$

Далее имеем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leqslant \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{(n-1)!} (t-\tau)^{n-1} |f(x_m, \tau) - f(x_{m-1}, \tau)| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{BN^\gamma \mu^\gamma}{(n-1)!} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} (t-\tau)^{n-1} e^{-\beta\gamma\tau} |x_m(\tau) - x_{m-1}(\tau)| \, d\tau$$

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-\tau)}}{(n-1)!} (t-\tau)^{n-1} |f(x_0, \tau)| \, d\tau \leqslant \frac{AN^k}{(n-1)!} \frac{t^{n-1}}{\beta k - \alpha} e^{-\alpha t}$$

Обозначим через C максимум функции $t^{n-1} e^{-\alpha_0 t}$ как функции t. Нетрудно проверить, что

$$C = \left(\frac{n-1}{\alpha_0 e}\right)^{n-1} \tag{2.15}$$

Тогда

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant \frac{AN^k}{(n-1)!} \frac{C}{\beta k - \alpha} e^{-\beta t}$$

Далее имеем

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leqslant \frac{BN^\gamma \mu^\gamma}{(n-1)!} \frac{AN^k C e^{-\alpha t}}{(n-1)!(\beta k - \alpha)} \int_0^t e^{\alpha\tau} e^{-\beta\gamma\tau} e^{-\beta\tau} (t-\tau)^{n-1} \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ABN^{k+\gamma} \mu^\gamma C t^{n-1}}{[(n-1)!]^2 (\beta k - \alpha)(\beta\gamma + \beta - \alpha)} e^{-\alpha t} \leqslant \frac{ABN^{k+\gamma} \mu^\gamma C^2 e^{-\beta t}}{[(n-1)!]^2 (\beta k - \alpha)(\beta\gamma + \beta - \alpha)}$$

Отметим, что $\beta\gamma+\beta-\alpha>0$ вследствие второго условия (2.7). Таким же образом получаем

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)|\leqslant\frac{AB^mN^{k+m\gamma}\mu^{m\gamma}C^{m+1}}{[(n-1)!]^{m+1}(\beta k-\alpha)(\beta\gamma+\beta-\alpha)^m}e^{-\beta t}\tag{2.16}$$

Поэтому последовательность сходится, если

$$\frac{BN^\gamma\mu^\gamma C}{(n-1)!(\beta\gamma+\beta-\alpha)}<1\quad\text{или}\quad(\mu N)^\gamma<\frac{(\beta\gamma+\beta-\alpha)(n-1)!}{B(n-1)^{n-1}}\alpha_0^{n-1}e^{n-1}\tag{2.17}$$

Обычными приемами метода последовательных приближений легко установить, что в случае сходимости метода, предельная функция $x(t)$ есть решение интегрального уравнения (2.5).

В наших оценках имеются пока еще произвольные величины α_0 и $\mu>1$. Постараемся их выбрать так, чтобы допустимая область начальных значений, определяемая числом N_0, было возможно большей.

Запишем неравенство (2.13) в форме

$$\frac{AN^{k-1}}{(n-1)}\leqslant\frac{\mu-1}{\mu^k}\frac{e^{\alpha_0 t}}{t^{n-1}}\quad(t\geqslant0)$$

Так как

$$\min\frac{e^{\alpha_0 t}}{t^{n-1}}=\frac{e^{n-1}\alpha_0^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}\quad\text{при }t=\frac{n-1}{\alpha_0}$$

$$\max\frac{\mu-1}{\mu^k}=\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}\quad\text{при }\mu=\frac{k}{k-1}$$

то

$$N^{k-1}\leqslant\frac{(n-1)!(k-1)^{k-1}e^{n-1}}{Ak^k(n-1)^{n-1}}\alpha_0^{n-1}\tag{2.18}$$

Значения N должны удовлетворять также и условию (2.17). Конечно, можно выбрать произвольно $\alpha_0>0$ [лишь бы выполнялись условия (2.7)] и тогда выбрать за N меньшее из чисел, определяемых неравенствами (2.17) и (2.18). Но можно за счет выбора α_0 по возможности увеличить N и тем самым расширить допустимую область начальных значений.

Значение N, определяемое из (2.18), монотонно возрастает вместе с α_0 и при $\alpha_0=0$ равно нулю. Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi(\alpha_0)=[\beta(\gamma+1)-\alpha]\alpha_0^{n-1}=[\alpha\gamma-\alpha_0(\gamma+1)]\alpha_0^{n-1}$$

$$\Phi(\alpha_0)=0\quad\text{при }\alpha_0=0,\qquad\Phi(\alpha_0)<0\quad\text{при }\alpha_0>\frac{\gamma}{\gamma+1}\alpha$$

Максимальное значение $\Phi(\alpha_0)$ принимает при

$$\alpha_0=\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\frac{n-1}{n}\alpha\tag{2.19}$$

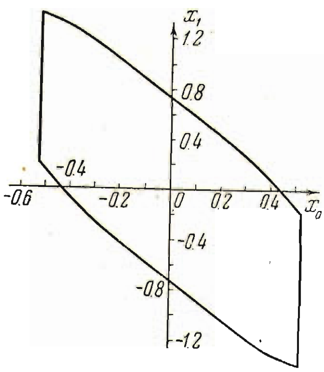
Очевидно, графики функций

$$\sqrt[k-1]{\frac{(n-1)!(k-1)^{k-1}e^{n-1}}{Ak^k(n-1)^{n-1}}\alpha_0^{n-1}},\qquad\frac{k-1}{k}\sqrt[\gamma]{\frac{[\alpha\gamma-\alpha_0(\gamma+1)](n-1)!}{B(n-1)^{n-1}}e^{n-1}\alpha_0^{n-1}}$$

имеют, кроме точки $\alpha_0=0$, еще только одну точку пересечения. Обозначим через $\alpha_{0.1}$ отличный от нуля вещественный корень уравнения

$$\sqrt[k-1]{\frac{(n-1)!\,e^{n-1}}{Ak\,(n-1)^{n-1}}\,\alpha_0^{n-1}} = \sqrt[\gamma]{\frac{[\alpha\gamma-\alpha_0(\gamma+1)]\,(n-1)!}{B\,(n-1)^{n-1}}\,e^{n-1}\alpha_0^{n-1}} \qquad (2.20)$$

Если $\alpha_{0.1}$ больше α_0, определяемого по формуле (2.19), то его и надо выбирать для определения N. Если же $\alpha_{0.1}$ меньше, чем дает формула (2.19), то надо воспользоваться этой последней формулой. При этом, конечно, надо иметь в виду условия (2.7).



Фиг. 1

В большинстве практически важных случаев $\gamma+1=k$. Тогда уравнение (2.20) принимает вид: $\alpha\gamma-\alpha_0(\gamma+1)=B/Ak$ и потому

$$\alpha_{01} = \frac{1}{\gamma+1}\left(\alpha\gamma-\frac{B}{Ak}\right) \qquad (2.21)$$

Выбрав α_0 и вместе с тем $\beta=\alpha-\alpha_0$ и найдя N, получаем

$$|x(t)| \leqslant N\frac{k}{k-1}e^{-\beta t} \qquad (2.22)$$

Граница допустимой области начальных значений, как уже указано выше, определяется из условия $|z(t)|\,e^{\beta t}\leqslant N$, где $z(t)$ — решение соответственного однородного уравнения (1.4), удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и исследуемое решение.

Для определения области в фазовом пространстве можно определить максимум функции $|z(t)|\,e^{\beta t}$ как функции от t, выразить этот максимум через значения $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1,\ldots,$ $x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}$ и потребовать, чтобы этот максимум не превышал N. Можно также (что сводится по существу к тому же) строить огибающую семейства $|z(t)|\,e^{\beta t}=N$, рассматривая неотрицательные значения t.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+2\dot{x}+x=x^4$$

В этом случае

$$n=2,\quad k=4,\quad A=1,\quad B=4,\quad \gamma=3=k-1,\quad \alpha=1,\quad \mu={}^4/_3$$

Так как $\alpha_0={}^3/_8$ из (2.19) и $\alpha_{01}={}^1/_2$, из (2.21) то надо выбрать $\alpha_0={}^1/_2$, $\beta={}^1/_2$. Для определения N можно пользоваться любой из формул (2.17) или (2.18):

$$N^3=\frac{3^3}{4^4}e\frac{1}{2}, \qquad N=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{e}{8}}\approx 0.52$$

Таким образом, $z(t)=(C_0+C_1t)\,e^{-t}$, причем $z(0)=x_0$, $z'(0)=x_1$ и

$$z(t)=[x_0+(x_0+x_1)\,t]\,e^{-t}$$

Рассмотрим функцию $\Phi(t)=[x_0+(x_0+x_1)\,t]\,e^{-{}^1/_2 t}$

$$\max\Phi(t)=2\,(x_0+x_1)\exp\left(-\frac{x_0+2x_1}{2\,(x_0+x_1)}\right) \qquad \text{при} \qquad t=\frac{x_0+2x_1}{x_0+x_1}$$

Допустимая область начальных значений определяется неравенством

$$\left|(x_0+x_1)\exp\left(-\frac{x_0+2x_1}{2\,(x_0+x_1)}\right)\right|\leqslant 0.26$$

При этом должно выполняться и условие $|x_0|\leqslant 0.52$, так как неравенство $|z(t)|\,e^{\beta t}\leqslant N$ выполняется и при $t=0$.

Для построения искомой области строим две симметричные относительно начала координат кривые (фиг. 1):

$$(x_0 + x_1) \exp\left(-\frac{x_0 + 2x_1}{2(x_0 + x_1)}\right) = \pm 0.26$$

Отметим, что оценку встречающихся в наших рассуждениях интегралов можно проводить иначе. При этом получатся другие формулы для оценки N и выбора α_0. В ряде случаев полученные нами формулы оказываются удобнее, но возможно наличие и таких примеров, для которых интегралам выгоднее давать другую оценку.

Отметим, кроме того, что определение области асимптотической устойчивости можно провести при помощи построения функции Ляпунова, которая в рассматриваемой задаче находится весьма просто. В зависимости от выбора функции получаемая область асимптотической устойчивости может быть как шире, так и уже построенной нами. Однако в данной работе дается не только построение области асимптотической устойчивости, но и оценка решения.

§ 3. Оценка решений в случае вещественных и различных корней характеристического уравнения. Для оценки решения дифференциального уравнения (1.1) и определения допустимой области начальных значений мы использовали формулу (2.10). Эта формула в случае равных корней характеристического уравнения при условиях (2.1) дает точное выражение решения. В других же случаях можно дать более точную оценку функции $Z_0(t)$.

Ниже в § 4 показано, что если все корни уравнения (1.4) вещественны, отрицательны и различны (мы будем обозначать их через $-\alpha_i$, $\alpha_i > 0$), то

$$0 < z_0(t) < K_0 e^{-\alpha_1 t}, \qquad K_0 = \left[\prod_{i=2}^{n} (\alpha_i - \alpha_1)\right]^{-1} \qquad (0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n) \tag{3.1}$$

Естественно, что изменение оценки $z_0(t)$ изменит и оценку искомого решения и границы допустимой области начальных значений. Однако метод решения задачи не меняется. Приведем вкратце соответственные выкладки. Как и прежде, исходя из формул (2.6), решаем уравнение (2.5) по методу последовательных приближений.

В данном случае $z(t)$ можно написать в виде

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\alpha_i t} = e^{-\alpha_1 t}\left[C_1 + C_2 e^{-(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \ldots + C_n e^{-(\alpha_n - \alpha_1)t}\right]$$

и потому для любого $N > 0$ можно указать такие начальные условия, что для всех $t \geqslant 0$

$$|z(t)| \leqslant N e^{-\alpha_1 t} \tag{3.2}$$

Далее получаем

$$|x_1(t)| \leqslant N e^{-\alpha_1 t} + A N^k K_0 \int_0^t e^{-\alpha_1 (t-\tau)} e^{-k\alpha_1 \tau}\, d\tau =$$

$$= N e^{-\alpha_1 t}\left[1 + \frac{A N^{k-1} K_0}{\alpha_1 (k-1)}\left(1 - e^{-\alpha_1 (k-1) t}\right)\right]$$

Каково бы ни было положительное число μ, всегда можно указать такое число $N_0 > 0$, что при $N \leqslant N_0$

$$\frac{A N^{k-1}}{\alpha_1 (k-1)} K_0 \leqslant \mu \tag{3.3}$$

Тогда имеем

$$|x_1(t)| \leqslant Ne^{-\alpha_1 t}(1+\mu)\left[1-\frac{\mu}{1+\mu}e^{-\alpha_1(k-1)t}\right]$$

Таким же образом получаем

$$|x_2(t)| \leqslant Ne^{-\alpha_1 t} + AN^k(1+\mu)^k K_0 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)}\left[1-\frac{\mu}{1+\mu}e^{-\alpha_1(k-1)\tau}\right]^k e^{-\alpha_1 k\tau}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ne^{-\alpha_1 t}\left[1 + AN^{k-1}(1+\mu)^k K_0 \int_0^t e^{-\alpha_1(k-1)\tau}\left(1-\frac{\mu}{1+\mu}e^{-\alpha_1(k-1)\tau}\right)d\tau\right] \leqslant$$

$$\leqslant Ne^{-\alpha_1 t}\left[1 + \frac{AK_0N^{k-1}(1+\mu)^k}{\alpha_1(k-1)}\left(1-\frac{\mu}{2(1+\mu)}\right)(1-e^{\alpha_1(k-1)t})\right]$$

Каково бы ни было $\mu > 0$, всегда можно указать такое N_0, что

$$\frac{AN^{k-1}K_0}{\alpha_1(k-1)}(1+\mu)^k\left[1-\frac{\mu}{2(1+\mu)}\right] \leqslant \mu \quad \text{при } N \leqslant N_0 \tag{3.4}$$

Заметим, что если выполнено неравенство (3.4), то заведомо выполняется и неравенство (3.3). Теперь имеем оценку

$$|x_2(t)| \leqslant Ne^{-\alpha_1 t}(1+\mu)\left[1-\frac{\mu}{1+\mu}e^{-\alpha_1(k-1)t}\right]$$

Точно так же

$$|x_m(t)| \leqslant N(1+\mu)e^{-\alpha_1 t}\left[1-\frac{\mu}{1+\mu}e^{-\alpha_1(k-1)t}\right]$$

и потому для решения уравнения (2.5) имеет место оценка

$$|X(t)| \leqslant Ne^{-\alpha_1 t}[1+\mu(1-e^{-\alpha_1(k-1)t})] < N(1+\mu)e^{-\alpha_1 t} \tag{3.5}$$

Как и в § 2, устанавливаем сходимость метода. Имеем

$$|f(x_{m+1}, t) - f(x_m, t)| < BN^\gamma(1+\mu)^\gamma e^{-\alpha_1\gamma t}\,|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \tag{3.6}$$

Поэтому

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant \frac{AN^kK_0}{\alpha_1(k-1)}(1-e^{-\alpha_1(k-1)t})e^{-\alpha_1 t}$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leqslant BN^\gamma(1+\mu)^\gamma K_0\frac{AN^kK_0}{\alpha_1(k-1)}e^{-\alpha_1 t}\int_0^t e^{-\alpha_1\gamma\tau}(1-e^{-\alpha_1(k-1)\tau})\,d\tau <$$

$$< \frac{ABN^{k+\gamma}(1+\mu)^\gamma K_0^2}{\alpha_1^2\gamma(\gamma+k-1)}e^{-\alpha_1 t}(1-e^{-\alpha_1\gamma t})$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leqslant \frac{AB^2N^{k+2\gamma}(1+\mu)^{2\gamma}K_0^3}{\alpha_1^2\gamma(\gamma+k-1)}e^{-\alpha_1 t}\int_0^t e^{-\alpha_1\gamma\tau}(1-e^{-\alpha_1\gamma\tau})\,d\tau <$$

$$< \frac{AB^2N^{k+2\gamma}(1+\mu)^{2\gamma}K_0^3}{\alpha_1^3\gamma^2(\gamma+k-1)2}e^{-\alpha_1 t}(1-e^{-\alpha_1\gamma t})$$

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leqslant \frac{AB^mN^{k+m\gamma}(1+\mu)^{m\gamma}K_0^{m+1}e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1^{m+1}\gamma^m(\gamma+k-1)2^{m-1}}(1-e^{-\alpha_1\gamma t}) \tag{3.7}$$

Таким образом, последовательность $x_m(t)$ сходится для всех t, если

$$[N(1+\mu)]^\gamma < \frac{2\alpha_1\gamma}{BK_0} \tag{3.8}$$

Запишем неравенство (3.4) в виде

$$N^{k-1} \leqslant \frac{\mu\alpha_1 (k-1)}{AK_0 (1+\mu)^{k-1} (1 + {}^1/_2\,\mu)} \tag{3.9}$$

Выберем теперь величину μ так, чтобы N, определяемое из (3.8) и (3.9), было возможно большим. N, определяемое из (3.8), монотонно убывает с возрастанием μ. Имеем

$$\max \frac{\mu}{(1+\mu)^{k-1} (1 + {}^1/_2\,\mu)} \quad \text{при} \quad \mu = \mu_0 = \frac{\sqrt{(k-1)^2+1} - (k-2)}{k-1} \tag{3.10}$$

Обозначим через μ_1 корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2\alpha_1\gamma}{BK_0}} = \sqrt[k-1]{\frac{\mu\alpha_1 (k-1)}{AK_0 (1 + {}^1/_2\,\mu)}}$$

Находим

$$\mu_1 = \frac{a}{b - {}^1/_2\,a} \qquad \left(a = \left[\frac{2\alpha_1\gamma}{BK_0}\right]^{(k-1)/\gamma}, \quad b = \frac{\alpha_1 (k-1)}{AK_0}\right) \tag{3.11}$$

Если $\mu_1 > \mu_0$, или μ_1 отрицательно, то надо выбирать $\mu = \mu_0$; если же $\mu_0 > \mu_1 > 0$, то надо выбирать $\mu = \mu_1$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = x^4$$

В этом случае

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad A = 1, \quad k = 4, \quad \gamma = 3, \quad B = 4 \quad K_0 = 1$$
$$\mu_0 = 0.38, \quad a = 1.5, \ b = 3, \quad \mu_1 = {}^2/_3$$

Надо выбрать $\mu = 0.38$. Из (3.9) находим $N \approx 0.68$ и получаем оценку решения

$$|\, x(t)\,| \leqslant 0.94\, e^{-t}$$

Допустимая область начальных значений находится из условия

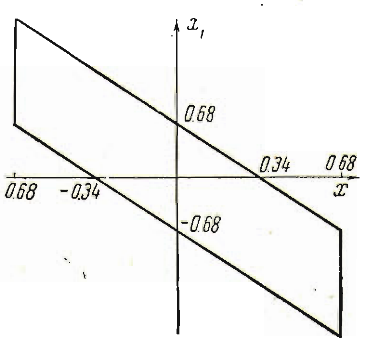
$$|\, C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}\,|\; e^t \leqslant 0.68$$

или

$$|\, 2x_0 + x_1 - (x_0 + x_1)\, e^{-t}\,| \leqslant 0.68.$$

Линии $2x_0 + x_1 - (x_0 + x_1)\, e^{-t} = \pm 0.68$ представляют собой семейство прямых на фазовой плоскости $x_0 x_1$. Запишем их уравнения в виде

$$\frac{x_0}{\pm \dfrac{0.68}{2 - e^{-t}}} + \frac{x_1}{\pm \dfrac{0.68}{1 - e^{-t}}} = 1$$



Фиг. 2

Непосредственно видно, что искомая область начальных значений ограничена прямыми

$$\frac{x_0}{\pm 0.34} + \frac{x_1}{\pm 0.68} = 1$$

получающимися из рассматриваемого семейства при $t = \infty$, так как они ограничивают область (фиг. 2) плоскости x_0, x_1, в которой при $t > 0$ нет точек других прямых семейства, и прямыми $x_0 = \pm\, 0{,}68$, которые соответствуют значению $t = 0$.

Отметим в заключение, что, выбрав для $z(t)$ оценку $Ne^{-\beta t}$, где $\beta < \alpha$, можно несколько расширить допустимую область начальных значений.

§ 4. Доказательство оценки (3.1). В случае, когда все корни λ_e характеристического уравнения (1.4) вещественны, отрицательны и различны:

$$\lambda_e = -\alpha_e \qquad (0 < \alpha_1, \ldots, < \alpha_n)$$

решение $z_0(t)$ принимает вид:

$$z_0(t) = \sum_{e=1}^{n} e^{-\alpha_e t} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq e}}^{n} (\alpha_i - \alpha_e)^{-1}$$

Рассмотрим систему функций

$$\Phi_0(t) = z_0(t) - e^{-\alpha_1 t} \prod_{i=2}^{n} (\alpha_i - \alpha_1)^{-1} \equiv \sum_{e=2}^{n} e^{-\alpha_e t} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq e}}^{n} (\alpha_i - \alpha_e)^{-1}$$

$$\Phi_{k+1}(t) = (D + \alpha_{n-k}) \Phi_k(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

Здесь D означает знак дифференцирования. Так как

$$\Phi_{n-1}(t) = (D + \alpha_n) \ldots (D + \alpha_2) \Phi_0(t), \text{ то } \Phi_{n-1}(t) \equiv 0.$$

Вследствие условий (2.1)

$$\Phi_{k+1}(0) = -(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_{n-k} - \alpha_1) \prod_{i=2}^{n} (\alpha_i - \alpha_1)^{-1} = A_{k+1} < 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-3)$$

Далее имеем

$$(D + \alpha_2) \Phi_{n-2}(t) = \Phi_{n-1}(t) = 0, \qquad \Phi_{n-2}(0) = A_{n-2} < 0$$

$$\Phi_{n-2}(t) = A_{n-2} e^{-\alpha_2 t} < 0 \quad \text{при } t > 0 \qquad (D + \alpha_3) \Phi_{n-3}(t) = \Phi_{n-2}(t) < 0$$

Положим $\Phi_{n-3}(t) = e^{-\alpha_3 t} \varphi_{n-3}(t)$. Тогда $D\varphi_{n-3}(t) = e^{\alpha_3 t} \Phi_{n-2}(t) < 0$ при $t > 0$.

Поэтому $\varphi_{n-3}(t)$ убывает, и так как $\Phi_{n-3}(0) = \varphi_{n-3}(0) = A_{n-3} < 0$, то $\varphi_{n-3}(t) < 0$ и, следовательно, $\Phi_{n-3}(t) < 0$.

Повторяя те же рассуждения, находим, что $\Phi_0(t) < 0$ при $t > 0$ и поэтому

$$z_0(t) < e^{-\alpha_1 t} \prod_{i=2}^{n} (\alpha_i - \alpha_1)^{-1}$$

Покажем теперь, что $z_0(t) > 0$. Рассмотрим

$$F_{k+1}(t) \equiv (D + \alpha_{n-k}) F_k(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad F_0(t) \equiv z_0(t)$$

Очевидно, что

$$F_n(t) = (D + \alpha_n)(D + \alpha_{n-1}) \ldots (D + \alpha_1) z_0(t) \equiv 0$$

$$(D + \alpha_1) F_{n-1}(t) \equiv 0, \qquad F_{n-1}(t) = A_{n-1} e^{-\alpha_1 t}$$

Но $F_{n-1}(0) = 1$ [вследствие (2.1)]. Поэтому $F_{n-1}(t) = e^{-\alpha_1 t} > 0$. Далее имеем $(D + \alpha_2) F_{n-2}(t) = F_{n-1}(t)$. Положим

$$F_{n-2}(t) = e^{-\alpha_2 t} f_{n-2}(t), \qquad D f_{n-2}(t) = e^{\alpha_2 t} F_{n-1}(t)$$

Поэтому функция $f_{n-2}(t)$ возрастает. Но так как $F_{n-2}(0)$, а потому и $f_{n-2}(0)$ вследствие (2.1) равно нулю, то $f_{n-2}(t)$ положительно. Продолжая те же рассуждения, получим, что $z_0(t)$ положительно при $t > 0$.

Поступила 26 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.
2. Perron O. Über Stabilität und asymptotischen Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Mathem. Zeitschr., Bd. 29, H. 1, 1928.
3. Петровский И. Г. О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки. Математический сборник, т. 41, 1934.
4. Добротин Д. А. Некоторые формулы для чисто вынужденных решений линейных дифференциальных уравнений. Вестник Ленингр. университета, вып. 5, 1955.