Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В. В. Румянцев
(Москва)

1. Пусть возмущенное движение системы автоматического регулирования с несколькими регулирующими органами описывается уравнениями вида

$$\eta_i' = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}\eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k} h_{i\beta} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$\sigma_\beta = \sum_{i=1}^{n} j_{\beta i}\eta_i \qquad (\beta = 1, \ldots, k) \tag{1.2}$$

где $b_{i\alpha}$, $h_{\beta i}$, $j_{\beta i}$ — постоянные коэффициенты, σ_β—координаты регулирующих органов, число которых $1 \leqslant k < n$, $f_\beta(\sigma_\beta)$— непрерывные функции, удовлетворяющие условиям единственности решения уравнений (1.1) при заданных начальных условиях, обращающиеся в нуль при нулевых значениях параметров σ_β $(\beta = 1, \ldots, k)$.

Предположим, что система (1.1) имеет единственное положение равновесия

$$\eta_1 = \cdots = \eta_n = 0 \tag{1.3}$$

устойчивость которого по отношению ко всем переменным η_i $(i = 1, \ldots, n)$ будет интересовать нас в дальнейшем.

Преобразуем уравнения (1.1) к новым переменным. Так как фигурирующие в правых частях уравнений (1.1) функции $f_\beta(\sigma_\beta)$ зависят, по предположению, только от координат регулирующих органов σ_β, то целесообразно за новые переменные принять эти величины, заменив ими часть переменных η_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Допустим, что систему алгебраических уравнений (1.2) можно разрешить относительно некоторых из переменных η_i, например относительно $\eta_{m+1}, \ldots, \eta_n$, где $m = n - k$, т. е., иными словами, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} j_{1m+1} & \cdots & j_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ j_{km+1} & \cdots & j_{kn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.4}$$

Обозначая через $\Delta_{\beta, m+r}$ минор со знаком определителя (1.4), соответствующий элементу $\gamma_{\beta, m+r}$, получим в результате разрешения системы уравнений (1.2):

$$\eta_{m+r} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\beta=1}^{k} \Delta_{\beta, m+r}\left(\sigma_\beta - \sum_{i=1}^{m} j_{\beta i}\eta_i\right) \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{1.5}$$

Продифференцируем по времени уравнения (1.2) и заменим η_i' $(i=1,\ldots,n)$ при помощи уравнений (1.1)

$$\sigma_\beta' = \sum_{i=1}^{n} j_{\beta i}\left[\sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}\eta_\alpha + \sum_{r=1}^{k} h_{ir} f_r(\sigma_r)\right] \quad (\beta = 1,\ldots,k)$$

Исключим теперь переменные η_{m+r} $(r=1,\ldots,k)$ из правых частей последних уравнений при помощи уравнений (1.5):

$$\sigma_\beta' = \sum_{\alpha=1}^{m}\eta_\alpha \sum_{i=1}^{n} j_{\beta i}\left(b_{i\alpha} - \sum_{r=m+1}^{n}\sum_{s=1}^{k} b_{ir}\frac{\Delta_{sr}}{\Delta} j_{s\alpha}\right) +$$
$$+\sum_{s=1}^{k}\sigma_s \sum_{r=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{n} j_{\beta i} b_{ir}\frac{\Delta_{sr}}{\Delta} + \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} j_{\beta i} h_{ir} f_r(\sigma_r) \qquad (\beta=1,\ldots,k) \tag{1.6}$$

Исключим переменные η_{m+s} $(s=1,\ldots,k)$ также из первых m уравнений (1.1):

$$\eta_i' = \sum_{\alpha=1}^{m}\eta_\alpha\left(b_{i\alpha} - \sum_{r=m+1}^{n} b_{ir}\sum_{\beta=1}^{k}\frac{\Delta_{\beta r}}{\Delta} j_{\beta\alpha}\right) +$$
$$+\sum_{\beta=1}^{k}\sigma_\beta\sum_{r=m+1}^{n} b_{ir}\frac{\Delta_{\beta r}}{\Delta} + \sum_{\beta=1}^{k} h_{i\beta} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{1.7}$$

Введем новые обозначения для переменных

$$x_\alpha = \eta_\alpha \quad (\alpha=1,\ldots,m), \qquad x_s = \sigma_{s-m} \quad (s=m+1,\ldots,n) \tag{1.8}$$
$$f_s(x_s) = f_{s-m}(\sigma_{s-m})$$

и постоянных коэффициентов

$$a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - \sum_{r=m+1}^{n} b_{\alpha r}\frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{k}\Delta_{sr} j_{s\beta}, \qquad a_{\alpha s} = \sum_{r=m+1}^{n} b_{\alpha r}\frac{\Delta_{s-m,\,r}}{\Delta} \tag{1.9}$$

$$a_{s\alpha} = \sum_{r=1}^{n} j_{s-m,\,r}\left(b_{r\alpha} - \sum_{i=m+1}^{n} b_{ri}\frac{1}{\Delta}\sum_{\beta=1}^{k}\Delta_{\beta i} j_{\beta\alpha}\right), \qquad a_{sr} = \sum_{\alpha=m+1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} j_{s\beta} b_{\beta\alpha}\frac{\Delta_{r-m,\alpha}}{\Delta}$$

$$g_{\alpha s} = h_{\alpha,\,s-m}, \qquad g_{sr} = \sum_{i=1}^{n} j_{s-m,\,i}\, h_{i,r-m} \quad (\alpha,\beta = 1,\ldots,m;\ s, r = m+1,\ldots,n)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) примут при этом следующий вид:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{s=m+1}^{n} g_{is} f_s(x_s) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.10}$$

В случае системы регулирования с одним регулирующим органом $k=1$) вместо системы уравнений (1.2) имеем одно уравнение:

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \eta_\alpha \tag{1.11}$$

В этом случае будем предполагать выполненным условие

$$j_n \neq 0 \tag{1.12}$$

и вместо обозначений (1.9) введем для постоянных обозначения

$$a_{i\alpha} = b_{i\alpha} - b_{in}\frac{j_\alpha}{j_n}, \qquad a_{in} = \frac{b_{in}}{j_n}, \qquad a_{nn} = \sum_{s=1}^{n} j_s \frac{b_{sn}}{j_n} \tag{1.13}$$

$$a_{n\alpha} = \sum_{s=1}^{n} j_s\left(b_{s\alpha} - b_{sn}\frac{j_\alpha}{j_n}\right), \qquad g_i = h_i, \qquad g_n = \sum_{s=1}^{n} j_s h_s \qquad (i, \alpha = 1, \ldots, n-1)$$

Уравнения возмущенного движения в этих обозначениях запишутся в виде

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + g_i f(x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.14}$$

Таким образом, уравнения возмущенного движения (1.1) преобразованы к виду уравнений (1.10) Очевидно, из устойчивости тривиального решения $x_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$ системы уравнений (1.10) по отношению к переменным x_i $(i = 1, \ldots, n)$ будет следовать, в силу уравнений (1.5) и принимая во внимание обозначения (1.8), устойчивость невозмущенного движения (1.3) по отношению к переменным $\eta_1, \ldots, \eta_n$.

2. Положим [1]

$$f_s(x_s) = [c_s + \varepsilon\varphi_s(x_s)]\, x_s \qquad (s = m+1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где ε — некоторый параметр, $\varphi_s(x_s)$ — ограниченные функции переменных x_s при изменении последних в заданной области, постоянные c_s не зависят от ε. Соотношения (2.1) ставят в соответствие системе нелинейных уравнений (1.10) систему линейных уравнений

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j, \qquad \begin{matrix}\alpha_{i\beta} = a_{i\beta} \\ \alpha_{is} = a_{is} + c_s g_{is}\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ \beta = 1, \ldots, m \\ s = m+1, \ldots, n\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Предположим, что корни характеристического уравнения $|\alpha_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ системы (2.2) таковы, что для них невозможны никакие соотношения вида $m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n = 0$, в которых все m_s были бы целыми неотрицательными числами, дающими в сумме 2.

Построим квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}x_i x_j \tag{2.3}$$

удовлетворяющую уравнению в частных производных

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s}(\alpha_{s1}x_1 + \cdots + \alpha_{sn}x_n) = U \qquad \left(2U = \sum_{ij=1}^{n} B_{ij}x_i x_j\right) \tag{2.4}$$

где U — определенно-положительная квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$. Согласно теореме Ляпунова функция V существует и определяется единственным образом.

Рассмотрим производную по времени от функции V, взятую в силу уравнений возмущенного движения (1.10) при учете (2.1):

$$V' = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} B_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=m+1}^{n} x_j x_s \varepsilon \sum_{i=1}^{n} A_{ij} g_{is}\varphi_s(x_s)$$

Введем обозначения для коэффициентов:

$$C_{ij} = B_{ij}, \qquad C_{is} = B_{is} + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} A_{ji} g_{js} \varphi_s(x_s)$$
$$C_{sr} = B_{sr} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(A_{ir} g_{is} \varphi_s(x_s) + A_{is} g_{ir} \varphi_r(x_r)\right) \qquad \binom{i, j=1, \ldots, m}{s, r=m+1, \ldots, n} \tag{2.5}$$

Тогда

$$V' = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} C_{ij} x_i x_j \tag{2.6}$$

Очевидно, V' будет определенно-положительной функцией переменных c_i $(i = 1, \ldots, n)$, если будут положительными все главные диагональные миноры ее дискриминанта:

$$D_n = \begin{vmatrix} C_{11} & \ldots C_{1m} & C_{1, m+1} & \ldots C_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m1} & \ldots C_{mm} & C_{m, m+1} & \ldots C_{mn} \\ C_{1, m+1} & \ldots C_{m, m+1} & C_{m+1, m+1} & \ldots C_{m+1, n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{1n} & \ldots C_{mn} & C_{n, m+1} & \ldots C_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Первые m главных диагональных миноров определителя (2.7) положительны в силу выбора определенно-положительной функции U; остается потребовать положительности k последних главных диагональных миноров:

$$D_{m+\alpha} > 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, k) \tag{2.8}$$

При выполнении k условий (2.8) асимптотическая устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ для системы уравнений (2.2) отвечает таковым [1] для системы (1.10) при наличии равенств (2.1). В самом деле, если невозмущенное движение для системы (2.2) асимптотически устойчиво (неустойчиво), то квадратичная форма V определенно отрицательна (может быть сделана положительной), а так как производная (2.6) по времени от функции V в силу уравнений возмущенного движения (1.10) при замене (2.1) является определенно-положительной функцией, то в силу теорем Ляпунова невозмущенное движение асимптотически устойчиво (неустойчиво).

В случае системы автоматического регулирования с одним регулирующим органом вместо условий (2.8) будем иметь единственное условие

$$D_n > 0 \tag{2.9}$$

при этом вместо равенств (2.5) имеем

$$C_{ij} = B_{ij}, \qquad C_{in} = B_{in} + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} A_{ji} g_j \varphi(x_n)$$
$$C_{nn} = B_{nn} + 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} A_{in} g_i \varphi(x_n) \qquad (i, j = 1, \ldots, n-1) \tag{2.10}$$

Таким образом, при выполнении равенств (2.1) и условий (2.8) безусловно существует соответствие между устойчивостью тривиального решения линейных уравнений (2.2) и нелинейных уравнений (1.10). Если относительно функций $\varphi_s(x_s)$ известно лишь, что они ограничены заданными пределами, то из неравенств (2.8) возможно определить величину параметра ε, для которой такое соответствие существует. Можно положить $\varepsilon = 1$, в таком случае неравенства (2.8) дадут нам или пределы изменения функций $\varphi_s(x_s)$, каковы бы ни были значения x_s $(s = m+1,\ldots,n)$ в заданной области, если функции $\varphi_s(x_s)$ нам неизвестны, или область изменения переменных x_s:

$$|x_s| < A \qquad (s = m+1, \ldots, n)$$

для которой указанное соответствие существует, если функции $\varphi_s(x_s)$ нам известны.

Заметим, наконец, что, задаваясь различными определенно положительными квадратичными формами U, можно установить ряд неравенств, равносильных критерию Гурвица, выражающих определенную отрицательность квадратичной формы V [1].

3. При помощи линейного неособого преобразования с постоянными коэффициентами вида

$$z_i = \sum_{\alpha=1}^{n} P_{i\alpha}\eta_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

систему уравнений (1.1), (1.2) возможно преобразовать к канонической форме. Если принять для простоты, что корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения $|b_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ разомкнутой системы (1.1) (при всех $h_{i\beta} = 0$) отвечают лишь простые элементарные делители λ-матрицы, то канонические уравнения будут иметь следующий вид [2, 3]:

$$z_i' = \lambda_i z_i + \sum_{s=1}^{k} H_{is} f_s(\sigma_s) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

$$\sigma_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_{\beta\alpha} z_\alpha \qquad (\beta = 1, \ldots, k) \tag{3.2}$$

где H_{is}, $\gamma_{\beta\alpha}$ — постоянные, выражаемые известным образом через постоянные коэффициенты уравнений (1.1), (1.2) и коэффициенты $P_{i\alpha}$ преобразования.

Кроме ранее сделанных предположений относительно функций $f_s(\sigma_s)$, предположим также, что они удовлетворяют условиям

$$\sigma_s f_s(\sigma_s) > 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{3.3}$$

Для простоты будем предполагать, что все корни λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — вещественные, и пусть среди них найдутся по крайней мере $m = n - k$ отрицательных $\lambda_\alpha < 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$.

Произведем замену переменных. Предположим, что уравнения (3.2) возможно разрешить относительно переменных $z_{m+\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$, т. е. выполняется условие вида (1.4), в котором $j_{\alpha s}$ заменены на $\gamma_{\alpha s}$ $(\alpha = 1, \ldots, k;$ $s = m+1, \ldots, n)$. Решая систему уравнений (3.2) относительно переменных $z_{m+\alpha}$, получаем

$$z_s = \frac{1}{\Delta} \sum_{\beta=1}^{k} \Delta_{\beta s}\left(\sigma_\beta - \sum_{\alpha=1}^{m} \gamma_{\beta\alpha} z_\alpha\right) \qquad (s = m+1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Продифференцируем уравнения (3.2) по времени, заменим z_i' $(i=1,\ldots,n)$ правыми частями уравнений (3.1) и исключим переменные z_s $(s=m+1,\ldots,n)$

при помощи уравнений (3.4); в результате получим

$$\sigma_s' = \sum_{\alpha=1}^{m} \beta_{s\alpha} z_\alpha + \sum_{r=1}^{k} \alpha_{sr}\sigma_r + \sum_{i=1}^{k} r_{si} f_i(\sigma_i) \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

где для сокращения введены следующие обозначения для постоянных коэффициентов:

$$\begin{gathered} \beta_{s\alpha} = \lambda_\alpha \gamma_{s\alpha} - \sum_{r=m+1}^{n} \gamma_{sr}\lambda_r \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{ir}}{\Delta}\gamma_{i\alpha} \\ \alpha_{si} = \sum_{r=m+1}^{n} \gamma_{sr}\lambda_r \frac{\Delta_{ir}}{\Delta}, \qquad r_{si} = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_{s\alpha} H_{\alpha i} \end{gathered} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, m \\ i, s = 1, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

В случае системы автоматического регулирования с одним регулирующим органом ($k = 1$) можно положить в уравнениях (3.1), (3.2) все $H_{i1} = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, а также $\gamma_{1\alpha} = \gamma_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Вместо (1.12) предположим

$$\gamma_n \neq 0 \tag{3.7}$$

и заменим переменную z_n новой переменной σ, уравнение для которой примет вид:

$$\sigma' = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\lambda_\alpha - \lambda_n)\gamma_\alpha z_\alpha + \lambda_n\sigma - rf(\sigma) \qquad \left(-r = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha\right) \tag{3.8}$$

Исследуем устойчивость невозмущенного движения $z_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, $\sigma_s = 0$ $(s = 1, \ldots, k)$ для уравнений возмущенного движения: первых m уравнений системы (3.1) и уравнений (3.5), по отношению к переменным z_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ и σ_s $(s = 1, \ldots, k)$.

Из устойчивости этого движения будет следовать на основании уравнений (3.4) устойчивость невозмущенного движения системы (3.1) по отношению ко всем переменным z_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Зададим произвольную определенно отрицательную квадратичную форму переменных z_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$

$$2\Phi(z_1, \ldots, z_m) = -\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta \tag{3.9}$$

вещественные коэффициенты $A_{\alpha\beta}$ которой удовлетворяют условиям Сильвестра.

Найдем определенно положительную квадратичную форму

$$2F(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{m} B_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta \qquad \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\lambda_\alpha z_\alpha = \Phi\right)$$

Очевидно, будем иметь

$$B_{\alpha\beta} = -\frac{A_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

Рассмотрим определенно положительную функцию переменных z_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$, σ_s $(s = 1, \ldots, k)$:

$$V(z_1, \ldots, z_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = F(z_1, \ldots, z_m) + \sum_{s=1}^{k} a_s \int_0^{\sigma_s} f_s(\sigma_s)\, d\sigma_s \tag{3.10}$$

где $a_s > 0$ $(s = 1, \ldots, k)$.

Производная по времени от функции V в силу первых m уравнений (3.1) и уравнений (3.5) равна:

$$V' = -\frac{1}{2}\Big[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta + 2\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} C_{\beta s}z_\beta f_s(\sigma_s) + \sum_{s,\,r=1}^{k} D_{sr}f_s(\sigma_s)f_r(\sigma_r) - 2\sum_{s,\,r=1}^{k}\alpha_{sr}a_s f_s(\sigma_s)\sigma_r\Big] \qquad (3.11)$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} -C_{rs} &= a_r\beta_{sr} + \sum_{\alpha=1}^{m} B_{\alpha r}H_{\alpha s} \\ -D_{s\rho} &= a_s r_{s\rho} + a_\rho r_{\rho s} \end{aligned} \qquad (r = 1, \ldots, m;\ s, \rho = 1, \ldots, k) \qquad (3.12)$$

В случае, когда корни $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения $|b_{i\alpha} - \delta_{i\alpha}\lambda| = 0$ являются нулевыми с простыми элементарными делителями λ-матрицы, все $\alpha_{sr} = 0$ $(s, r = 1, \ldots, k)$, как это следует из обозначений (3.6). При этом функция V' представляет собой квадратичную форму переменных $z_1, \ldots, z_m$, $f_1(\sigma_1), \ldots, f_k(\sigma_k)$; она будет определенно положительной, если положительны все главные диагональные миноры ее дискриминанта:

$$T_n = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} & C_{11} & \ldots & C_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} & C_{m1} & \ldots & C_{mk} \\ C_{11} & \ldots & C_{m1} & D_{11} & \ldots & D_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{1k} & \ldots & C_{mk} & D_{k1} & \ldots & D_{kk} \end{vmatrix} \qquad (3.13)$$

Первые m главных диагональных миноров этого определителя положительны в силу выбора коэффициентов определенно отрицательной квадратичной формы (3.9); остается потребовать положительности k последних главных диагональных миноров определителя (3.13):

$$T_{m+s} > 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \qquad (3.14)$$

При выполнении условий (3.14) функция V и ее производная удовлетворяют всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, что и устанавливает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $z_1 = \cdots = z_m = 0$, $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = 0$, следовательно, и движения $z_1 = \cdots = z_n = 0$ по отношению ко всем z_s $(s = 1, \ldots, n)$.

Следует отметить, что указанный случай иным методом рассматривался в работе [4]; в работе [5] получены аналогичные неравенствам (3.14) условия устойчивости для случая $k = 2$.

В случае $k = 1$ [6] производная по времени от функции (3.10) равна

$$V' = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n-1} A_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta - f(\sigma)\sum_{\beta=1}^{n-1} C_\beta z_\beta - arf^2(\sigma) + a\lambda_n\sigma f(\sigma) \qquad (3.15)$$

где

$$-C_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n-1} B_{\alpha\beta} + a(\lambda_\beta - \lambda_n)\gamma_\beta \qquad (3.16)$$

Функция V' будет определенно отрицательной по отношению к $z_1, \ldots, z_{n-1}, \sigma$ формой при выполнении условия $T_n > 0$, если $\lambda_n = 0$, или условия $T_n \geqslant 0$, если $\lambda_n < 0$.

В случае, когда среди корней λ_s $(s = m+1, \ldots, n)$ имеются отличные от нуля, суждение о знаке функции V' затрудняется наличием в правой части уравнения (3.11) последнего слагаемого в виде билинейной формы.

Чтобы обойти это затруднение, сделаем замену:

$$f_s(\sigma_s) = [c_s + \varepsilon\varphi_s(\sigma_s)]\,\sigma_s$$

предполагая выполненным условие (3.3). При этом (3.11) примет вид:

$$V' = -\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta + 2\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} K_{\beta s}z_\beta\sigma_s + \sum_{i,\,s=1}^{k} L_{is}\sigma_i\sigma_s\right\} \tag{3.17}$$

где введены обозначения

$$-K_{rs} = (c_s + \varepsilon\varphi_s)\left(\sum_{\alpha=1}^{m} B_{\alpha r}H_{\alpha s} + a_s\beta_{sr}\right) \tag{3.18}$$

$$-L_{is} = (c_i + \varepsilon\varphi_i)(c_s + \varepsilon\varphi_s)(a_s r_{si} + a_i r_{is}) + (c_i + \varepsilon\varphi_i)a_i\alpha_{is} + (c_s + \varepsilon\varphi_s)\,a_s\alpha_{si}$$

$$(r = 1, \ldots, m;\ i, s = 1, \ldots, k)$$

Функция V' будет определенно отрицательной относительно $z_1, \ldots, z_m$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, если будут положительными все главные диагональные миноры дискриминанта:

$$N = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} & K_{11} & \ldots & K_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} & K_{m1} & \ldots & K_{mk} \\ K_{11} & \ldots & K_{m1} & L_{11} & \ldots & L_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{1k} & \ldots & K_{mk} & L_{k1} & \ldots & L_{kk} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Первые m главных диагональных миноров определителя положительны в силу выбора коэффициентов определенно отрицательной функции Φ; остается потребовать положительности k последних главных диагональных миноров:

$$N_{m+s} > 0 \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{3.20}$$

Постоянные c_s в равенствах (2.1) следует выбрать так, чтобы выполнялись неравенства (3.20) при $\varepsilon = 0$. Функции $\varphi_s(\sigma_s)$ могут быть при этом любыми непрерывными ограниченными функциями при произвольных значениях переменных σ_s в заданной области их изменения; очевидно, при этом всегда можно подобрать такие значения параметра ε, чтобы неравенства (3.20) выполнялись [1]. Если положить $\varepsilon = 1$, то неравенства (3.20) позволят нам определить или пределы, которыми должны быть ограничены функции $\varphi_s(\sigma_s)$, если они неизвестны, или пределы изменения переменных σ_s, если функции $\varphi_s(\sigma_s)$ известны. Отметим, что все рассуждения возможно провести и в случае наличия у характеристического уравнения $|b_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ кратных и комплексных корней [6].

4. При исследовании устойчивости регулируемых систем обычно ограничиваются рассмотрением линейных относительно переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$ уравнений вида (1.1). В общем случае эти уравнения следует рассматривать лишь как уравнения «первого» приближения [5], полученные отбрасыванием нелинейных относительно переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$ слагаемых

$X_i(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ в точных уравнениях возмущенного движения системы регулирования

$$\eta_i' = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}\eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k} h_{i\beta} f_\beta(\sigma_\beta) + X_i(\eta_1, \ldots, \eta_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (4.1)$$

В связи с этим возникает вопрос, обеспечивают ли асимптотическую устойчивость тривиального решения $\eta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ уравнений (4.1) условия устойчивости, полученные из рассмотрения уравнений (1.1)?

В случае, когда возможно провести корректную линеаризацию нелинейных функций $f_s(\sigma_s)$ и указать их линейные приближения $c_s\sigma_s$, возможно рассмотреть знаки корней характеристического уравнения для системы уравнений первого приближения уравнений (4.1):

$$\eta_i' = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}\eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k} h_{i\beta} c_\beta \sum_{s=1}^{k} j_{\beta s}\eta_s \qquad (i=1,\ldots,n) \quad (4.2)$$

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения для системы (4.2) отрицательны, то согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению тривиальное решение системы уравнений (4.1) будет асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости, и, следовательно, условия устойчивости, полученные рассмотрением уравнений (1.1), достаточны и для устойчивости тривиального решения уравнения (4.1).

В случае, когда помимо корней с отрицательными вещественными частями имеются также корни с нулевыми вещественными частями у характеристического уравнения для системы (4.2) или же когда знаки корней характеристического уравнения для системы (4.2) нам неизвестны, надлежит исследовать, будут ли достаточными для устойчивости тривиального решения уравнений (4.1) условия, полученные рассмотрением уравнений вида (1.1).

Это исследование возможно провести по методу Н. Г. Четаева [1] (стр. 122—125). При этом невозмущенное движение будет устойчивым независимо от численных значений нелинейных слагаемых $X_i(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, если для заданного положительного числа A, удовлетворяющего условию $1 - \Sigma|\partial V / \partial \eta_s| > 0$ при $\Sigma\eta_s^2 \leqslant A$, функции X_s можно стеснить неравенствами $|X_s| < \lambda$, где λ обозначает положительное число, построенное с помощью функции V, причем $\Sigma\eta_{s0}^2 \leqslant \lambda$.

Поступила 20 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехтеориздат, 1955.
2. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехтеориздат. 1951.
3. Троицкий В. А. О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953, стр. 49—60.
4. Спасский Р. А. Об одном классе регулируемых систем. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954, стр. 329—344.
5. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Гостехтеориздат, 1955.
6. Малкин И. Г. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 1, 1951, стр. 59—66.