Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ САМОСОПРЯЖЕННОГО ТИПА

И. Н. Слезингер

(Одесса)

В работах М. С. Зарембы [1,2], повидимому, впервые было установлено, что разность функций влияния пластины, соответствующих жесткому и некоторому искусственному способу закрепления ее контура, допускает разложение в билинейный ряд, имеющий простую структуру и вычисляемый независимо от этих функций влияния. Однако рассуждения Зарембы носят частный характер, и при небольшом видоизменении вопроса (например, введении упругого основания) его рассуждения теряют силу. В 1948 г. результат М. С. Зарембы в основном повторил З. Х. Рафальсон [3]. Совсем недавно Г. А. Гринберг [4], а затем Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев и Я. С. Уфлянд [5] изложили метод нахождения функции прогиба пластины, жестко защемленной по контуру, очень близкий к методу Зарембы и Рафальсона.

В более общей постановке способ построения разрешающего ядра для краевой задачи с одними граничными условиями по известному разрешающему ядру для аналогичной задачи, но с измененными граничными условиями был впервые предложен М. Г. Крейном [6], указавшим еще в 1945 г. [7], что из его исследований по спектральной теории эрмитовых операторов вытекают правила определения разности функций Грина данного дифференциального уравнения эллиптического типа с двумя различными системами граничных условий. Позднее к близкому результату пришел и Н. Аронсзейн [8], отметивший, в частности, также решение М. С. Зарембы.

В настоящей заметке излагается общий способ получения решения многомерной самосопряженной линейной краевой дифференциальной задачи с граничными условиями достаточно общего вида по известному решению так называемой «более жесткой» задачи, соответствующей решаемой.

1. Пусть $A^{(k)}[u, v]$ — вещественная симметричная однородная билинейная относительно функций u и v дифференциальная форма k-го порядка, определенная внутри области Ω с достаточно гладкой границей S (фиг. 1), а $B_i^{(l_i)}[u, v]$ — аналогичные формы порядков $l_i \leqslant k-1$, определенные на участках S_i^Γ $(i=1, \ldots, k)$ границы S. Составим выражение

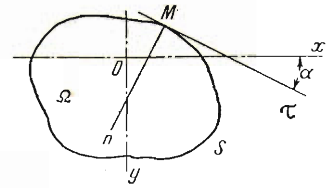
$$F[u, v] = \int\limits_{(\Omega)} A^{(k)}[u, v]\, d\omega + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^\Gamma)} B_i^{(l_i)}[u, v]\, ds \qquad (1.1)$$

и проинтегрируем первое слагаемое его k раз по частям сначала по v, а затем по u. Предположим, что $B_i^{(l_i)}$ таковы, что в результате этого получается симметричное соотношение вида

$$\int\limits_{(\Omega)} vL^{(2k)}[u]\, d\omega + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^R)} R_i[v]\, T_i[u]\, ds + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^\Gamma)} R_i[v]\, \Gamma_i[u]\, ds =$$

$$= \int\limits_{(\Omega)} uL^{(2k)}[v]\, d\omega + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^R)} R_i[u]\, T_i[v]\, ds + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^\Gamma)} R_i[u]\, \Gamma_i[v]\, ds \qquad (1.2)$$

где S_i^R $(i=1,\ldots,k)$ — участки S, удовлетворяющие условию $S_i^R + S_i^\Gamma = S$. Здесь $L^{(2k)}$ — самосопряженный линейный дифференциальный оператор порядка $2k$, определенный внутри Ω, через R_i обозначена система k линейно независимых самосопряженных линейных дифференциальных выражений порядка $k-i$, а через T_i и Γ_i — две системы аналогичных выражений порядка $k+i-1$, определенных на S. Соотношение (1.2) удовлетворяется, очевидно, тождественно при любых двух функциях u и v, которые $2k$ раз непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{\Omega}$.



Фиг. 1

Легко установить справедливость следующего предложения: Если для любого элемента $w \neq 0$, принадлежащего линейному множеству M функций, непрерывных и $2k$ раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющих на границе S области Ω системе однородных краевых условий

$$R_i[w]\big|_{S_i^R} = 0 \qquad (i=1,\ldots,k) \qquad (0 \leqslant s \leqslant p) \tag{1.3}$$

$$\Gamma_i[w]\big|_{S_i^\Gamma} = 0 \qquad (i=1,\ldots,s)$$

квадратичный интеграл $F[w,w] > 0$ и существует функция w_0, реализующая на M минимум функционала

$$F[w^2, f, \varphi] = F[w,w] - 2F[w,f,\varphi] \tag{1.4}$$

где

$$F[w,f,\varphi] = \int\limits_{(\Omega)} wf\,d\omega + \sum_{i=p+1}^{k} \int\limits_{(S_i^\Gamma)} R_i[w]\,\varphi_i\,ds \tag{1.5}$$

то w_0 удовлетворяет в области Ω уравнению

$$L^{(2k)}[w]\big|_\Omega = f \tag{1.6}$$

а на границе S краевым условиям

$$\Gamma_i[w]_{S_i^\Gamma} = 0 \qquad (i=s+1,\ldots,p) \quad (0 \leqslant p \leqslant k)$$

$$\Gamma_i[w]\big|_{S_i^\Gamma} = \varphi_i \quad (i=p+1,\ldots,k) \tag{1.7}$$

И наоборот, если краевая задача (1.3), (1.6), (1.7) имеет решение, то оно обращает функционал (1.4) в минимум. Допустим далее, что

1) существует такая постоянная $\gamma^2 > 0$, что для всякого элемента $w \in M$ справедливо неравенство

$$F[w,w] \geqslant \gamma^2 \Big[\int\limits_{(\Omega)} w^2 d\omega + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^\Gamma)} (R_i[w])^2\,ds\Big]$$

2) оператор L и граничные выражения Γ_i $(i=1,\ldots,k)$ таковы, что для любого $w \in M$ удовлетворяется условие

$$\int\limits_{(\Omega)} (L^{(2k)}[w])^2\,d\omega + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{(S_i^\Gamma)} (\Gamma_i[w])^2\,ds < \infty$$

3) совокупность функций f и φ_i $(i=p+1,\ldots,k)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{(\Omega)} f^2 d\omega + \sum_{i=p+1}^{k} \int\limits_{(S_i\Gamma)} \varphi_i^2 ds < \infty$$

Тогда обычными методами функционального анализа [9,10] доказывается, что задача о минимуме функционала (1.4), расширенного на замкнутое функциональное гильбертово пространство H с нормой $F[w,w]$, имеет решение.

Обычно удается доказать, что пространство H сепарабельно. Тогда можно указать также простую формулу, дающую явное выражение для решения w^* задачи о минимуме расширенного функционала (1.4). Именно

$$w^*(P) = \sum_{j=1}^{\infty} F[\chi_j, f, \varphi]\,\chi_j(P) \tag{1.8}$$

где $\{\chi_j(P)\}$ $(j=1,2,\ldots)$ — любая полная ортонормированная в H система элементов.

Формулой (1.8) можно пользоваться для фактического вычисления решения w^* вариационной задачи (1.4), а тем самым и эквивалентной ей самосопряженной краевой дифференциальной задачи (1.3), (1.6), (1.7). Для этого нужно лишь построить систему функций $\{\chi_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$. Обычно такая система координатных функций набирается из элементов линеала M, составляющего область первоначального определения функционала задачи (1.4), причем при проведении вычислений чаще всего приходится исходить сначала из произвольной (неортонормированной) полной в H системы линейно независимых функций $\{\psi_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$, принадлежащих этому множеству, подвергая ее затем специальному F-ортонормированию в метрике пространства H.

2. Предположим, что необходимо найти решение самосопряженной линейной краевой дифференциальной задачи:

$$\begin{gathered} L^{(2k)}[u]\,\big|_\Omega = f \\ R_i[u]\,\big|_{S_iR} = \rho_i, \qquad \Gamma_i[u]\,\big|_{S_i\Gamma} = \varphi_i \qquad (i=1,\ldots,k) \end{gathered} \tag{2.1}$$

причем известно решение соответствующей «более жесткой» краевой задачи[1]:

$$\begin{gathered} L^{(2k)}[v]\,\big|_\Omega = f \\ R_i[v]\,\big|_{S_iR} = \rho_i \qquad (i=1,\ldots,p) \\ R_i[v]\,\big|_{S} = \rho_i \qquad (i=p+1,\ldots,k), \quad (0\leqslant p\leqslant k) \\ \Gamma_i[v]\,\big|_{S_i\Gamma} = \varphi_i \qquad (i=1,\ldots,p) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Решение поставленной задачи (2.1) u будем искать в виде суммы $u=v+w$, где v — решение задачи (2.2); тогда для определения функ-

[1] Это название объясняется тем, что в статических задачах теории упругости такие задачи при $\rho_i\equiv 0$ определяют деформированное состояние упругой системы при более жестком защемлении ее края, нежели задачи типа (2.1).

ции-разности w легко получается следующая новая задача:

$$L^{(2k)}[w]\big|_{\Omega}=0$$

$$R_i[w]\big|_{S_iR}=0 \quad (i=1,\ldots,k), \qquad \Gamma_i[w]\big|_{S_i\Gamma}=0 \quad (i=1,\ldots,p)$$

$$\Gamma_i[w]\big|_{S_i\Gamma}=\varphi_i-\Gamma_i[v]\big|_{S_i\Gamma} \quad (i=p+1,\ldots,k) \tag{2.3}$$

Для нахождения решения последней воспользуемся ее связью с соответствующей вариационной задачей. В самом деле, если краевая задача (2.3) имеет решение, то согласно сказанному выше это решение обращает в минимум функционал (1.4) с грузовым членом

$$F[w,f,\varphi]=\sum_{i=p+1}^{k}\int\limits_{(S_i\Gamma)}R_i[w]\{\varphi_i-\Gamma_i[v]\}\,ds \tag{2.4}$$

на классе M функций w, достаточно гладких внутри области интегрирования задачи Ω и обязательно удовлетворяющих на границе S этой области лишь k однородным граничным условиям R_i задачи (2.3). Сейчас, однако, возможно и целесообразно заранее сузить класс допустимых функций w, ограничив их лишь подклассом M° функций w°, удовлетворяющих в Ω также однородному дифференциальному уравнению L и всем p однородным граничным условиям Γ_i краевой задачи (2.3). Очевидно, что такой выбор допустимых функций должен значительно облегчить проведение решения задачи и улучшить процесс его сходимости.

Для дальнейших приложений представим (2.4) еще в другом виде Для этого воспользуемся соотношением (1.2) применительно к функции v, являющейся решением задачи (2.2), и произвольной функции w° подкласса M°. Тогда легко получается, что

$$F[w^\circ,f,\varphi]=\int\limits_{(\Omega)}w^\circ f\,d\omega-\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{(S_iR)}T_i[w^\circ]\rho_i\,ds-$$

$$-\sum_{i=p+1}^{k}\int\limits_{(S_i\Gamma)}\Gamma_i[w^\circ]\rho_i\,ds+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{(S_i\Gamma)}R_i[w^\circ]\varphi_i\,ds \tag{2.5}$$

Отсюда видно, что функция-разность w может быть найдена совершенно независимо от решения задачи (2.2). Это обстоятельство позволяет переходить от решения задачи (2.2) к решению задачи (2.1) или, наоборот, от решения задачи (2.1) к решению задачи (2.2) в зависимости от того, какое из этих решений поддается более простому определению.

Само решение вспомогательной вариационной задачи, определяющей w, составим в форме (1.8), для чего в качестве координатных элементов задачи примем систему функций $\{\chi_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$ из линейного множества M°, полную и ортонормированную в метрике пространства H. При этом искомое решение задачи (2.1) представляется в виде

$$u(P)=v(P)+\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{\int\limits_{(\Omega)}\chi_j f\,d\omega-\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{(S_iR)}T_i[\chi_j]\rho_i\,ds-$$

$$-\sum_{i=p+1}^{k}\int\limits_{(S_i\Gamma)}\Gamma_i[\chi_j]\rho_i\,ds+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{(S_i\Gamma)}R_i[\chi_j]\varphi_i\,ds\Big\}\chi_j(P) \tag{2.6}$$

где $v(P)$ — известное решение задачи (2.2).

Отметим, в частности, следующее: если известно разрешающее ядро $K(P, Q)$ «более жесткой» задачи (2.2), то искомое разрешающее ядро $G(P, Q)$ исходной задачи (2.1)

$$G(P,Q) = K(P,Q) + \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{\chi_j(Q) - \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i^R)} T_i[\chi_j]\rho_i\,ds -$$

$$- \sum_{i=p+1}^{k} \int_{(S_i^\Gamma)} \Gamma_i[\chi_j]\rho_i\,ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i^\Gamma)} R_i[\chi_j]\varphi_i\,ds\Big\}\chi_j(P) \qquad (2.7)$$

в частности, при всех $\rho_i \equiv 0$ и $\varphi_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ получаем следующую симметричную формулу:

$$G(P,Q) = K(P,Q) + \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(P)\chi_j(Q) \qquad (2.8)$$

полученную впервые иным способом М. Г. Крейном [6].

Ряды в формулах (2.6), (2.7) и (2.8) сходятся равномерно вместе со своими производными, во всяком случае в любой области Ω', лежащей целиком внутри заданной области интегрирования задачи Ω.

Особо интересно отметить случай самосопряженной краевой задачи, состоящей из дифференциального уравнения с оператором $L^{(2k)}$, представляющим собой «квадрат» некоторого другого самосопряженного дифференциального оператора $l^{(k)}$, т. е. $L^{(2k)} = l^{(k)}[l^{(k)}]$, и граничных условий, составленных при помощи одних лишь простейших граничных выражений R_i и T_i, сопутствующих оператору $L^{(2k)}$. В этом случае нахождение системы F-ортонормированных координатных элементов $\{\chi_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ сводится к решению системы краевых задач k-го порядка. Если положить для этого частного случая еще $p = 0$, т. е. осуществлять переход от известного решения «абсолютно жесткой» задачи, соответствующей решаемой, то легко прийти к форме решения, являющейся обобщением способа решения, изложенного в [3] и [4,5], на самосопряженные краевые задачи указанного частного типа, но произвольного четного порядка.

3. Рассмотрим задачу о поперечном изгибе пластинки (тонкой упругой плиты) постоянной жесткости D, лежащей на сплошном упругом основании с коэффициентом постели k, которая сводится к решению краевой задачи бигармонического типа.

Предположим, что известно решение «абсолютно жесткой» задачи:

$$L^{(4)}[v]\,|_\Omega \equiv \triangle^2 v + kv\,|_\Omega = q\,/\,D$$

$$R_1[v]\Big|_S \equiv \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad R_2[v]\,|_S \equiv v\,|_S = 0 \qquad (3.1)$$

Тогда для нахождения решения задачи произвольного вида

$$L^{(4)}[u]\,|_\Omega \equiv \triangle^2 u + ku\,|_\Omega = \frac{q}{D}$$

$$\Gamma_1[u]\Big|_{S_1^\Gamma} \equiv -\mu_n(u) + b_1\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_1^\Gamma} = \frac{m_n}{D}, \qquad R_1[u]\Big|_{S_1^R} \equiv \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_1^R} = 0$$

$$\Gamma_2[u]\,|_{S_2^\Gamma} \equiv \rho_n(u) + b_2 u|_{S_2^\Gamma} = \frac{r_n}{D}, \qquad R_2[u]\,|_{S_2^R} \equiv u\,|_{S_2^R} = 0 \qquad (3.2)$$

где

$$\mu_n(u) = -\nu\Delta u - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin 2\alpha\right)$$

$$\rho_n(u) = -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\sin 2\alpha - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos 2\alpha\right]$$

согласно сказанному выше следует найти полную систему $\{\psi_j\}$ $(j=1, 2, \ldots$ решений вспомогательной однородной краевой задачи:

$$L^{(4)}[w]\,|_\Omega \equiv \Delta^2 w + kw\,|_\Omega = 0$$

$$R_1[w]\Big|_{S_1^R} \equiv \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{S_1^R} = 0, \quad R_2[w]\,|_{S_2^R} \equiv w\,|_{S_2^R} = 0 \tag{3.3}$$

и, проортонормировав ее согласно выражению

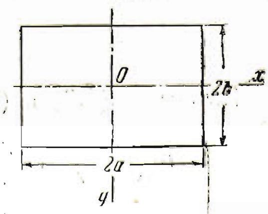
$$F[u,v] = \iint\limits_{(\Omega)}\left\{\nu\Delta u\Delta v + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + kuv\right\}d\omega +$$

$$+ \int\limits_{(S)}\left(b_1\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial v}{\partial n} + b_2 uv\right)ds \tag{3.4}$$

пропорциональному потенциальной энергии деформации изгиба пластинки и смятия упругого основания, перейти к системе функций $\{\chi_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ искомое решение задачи (3.2):

$$u(P) = v(P) + \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\iint\limits_{(\Omega)}\chi_j q\,d\omega + \int\limits_{(S_1^\Gamma)}\frac{\partial\chi_j}{\partial n}m_n ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(S_2^\Gamma)}\chi_j r_n ds\right\}\chi_j(P) \tag{3.5}$$



Фиг. 2

Этой зависимостью можно воспользоваться как для перехода от известного решения задачи (3.1) v к решению задачи (3.2) u, так и для обратного перехода, если это удобнее, от известного решения задачи (3.2) u к искомому решению задачи (3.1) v.

Конечно, в случаях, когда $k=0$, $b_1=b_2=0$ и можно положить $\nu=1$ [1], решение задачи может быть произведено также в варианте, изложенном в [3—5].

4. В качестве простейшего примера приведем решение задачи об изгибе прямоугольной пластинки (фиг. 2), жестко защемленной по всем четырем сторонам в несмещающийся опорный контур, используя известное решение для такой же пластинки, но с шарнирно опертым по всему периметру на жесткий опорный контур краем.

Полной системой частных решений вспомогательной бигармонической задачи (3.3), которая сейчас записывается так:

$$\Delta^2 w\,|_{|x|\leqslant a, |y|\leqslant b} = 0, \qquad w\,|_{x=\pm a} = u\,|_{y=\pm b} = 0 \tag{4.1}$$

симметричных относительно обеих осей x и y, является система

[1] Это имеет место для некоторых специальных случаев опорного закрепления края пластинки.

функций

$$
\psi_j(x, y) =
$$

$$
= \begin{cases} \left(\frac{b}{\varphi} \operatorname{th} \frac{j\pi}{2\varphi} \operatorname{ch} \frac{j\pi x}{2b} - x \operatorname{sh} \frac{j\pi x}{2b}\right) \cos \frac{j\pi y}{2b} & (j = 1, 3, 5, \ldots) \\ \cos \frac{(j-1)\pi x}{2a} \left[a\varphi \operatorname{th} \frac{(j-1)\pi\varphi}{2} \operatorname{ch} \frac{(j-1)\pi y}{2a} - y \operatorname{sh} \frac{(j-1)\pi y}{2a} \right] & (j = 2, 4, 6, \ldots) \end{cases} \tag{4.2}
$$

а системой решений, кососимметричных относительно оси x и симметричных относительно оси y, — система

$$
\psi_j(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{b}{\varphi} \operatorname{cth} \frac{j\pi}{2\varphi} \operatorname{sh} \frac{j\pi x}{2b} - x \operatorname{ch} \frac{j\pi x}{2b}\right) \cos \frac{j\pi y}{2b} & (j = 1, 3, 5, \ldots) \\ \sin \frac{j\pi x}{2a} \left(a\varphi \operatorname{th} \frac{j\pi\varphi}{2} \operatorname{ch} \frac{j\pi y}{2a} - y \operatorname{sh} \frac{j\pi y}{2a} \right) & (j = 2, 4, 6, \ldots) \end{cases} \tag{4.3}
$$

Аналогичным образом записываются и две остальные системы решений задачи (4.1) (симметричные относительно оси x и кососимметричные относительно оси y и кососимметричные относительно обеих осей x и y)[1].

Очевидно, что в случае действия нагрузок, симметричных относительно обеих осей x и y, весь расчет может быть произведен только при помощи функций (4.2). Эта система исходных координатных элементов задачи подлежит сейчас F-ортонормированию по формуле

$$
\beta_{jl} = F[\psi_j, \psi_l] = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \triangle\psi_j \triangle\psi_l \, dx \, dy \tag{4.4}
$$

Вставляя (4.2) в (4.4), легко находим, что

$$
\beta_{jl} = \begin{cases} j\pi\left(\operatorname{sh}\frac{j\pi}{\varphi} + \frac{j\pi}{\varphi}\right) & (l = j = 1, 3, 5, \ldots) \\ (j-1)\pi\left[\operatorname{sh}(j-1)\pi\varphi + (j-1)\pi\varphi\right] & (l = j = 2, 4, 6, \ldots) \\ \frac{16 j^2 (l-1)^2 \varphi}{[j^2 + (l-1)^2\varphi^2]^2} \sin\frac{j\pi}{2} \sin\frac{(l-1)\pi}{2} \operatorname{ch}\frac{j\pi}{2\varphi} \operatorname{ch}\frac{(l-1)\pi\varphi}{2} & \begin{matrix}(j = 1, 3, 5, \ldots) \\ (l = 2, 4, 6, \ldots)\end{matrix} \\ \frac{16 (j-1)^2 l^2 \varphi}{[(j-1)^2\varphi^2 + l^2]^2} \sin\frac{(j-1)\pi}{2} \sin\frac{l\pi}{2} \operatorname{ch}\frac{(j-1)\pi\varphi}{2} \operatorname{ch}\frac{l\pi}{2\varphi} & \begin{matrix}(j = 2, 4, 6, \ldots) \\ (l = 1, 3, 5, \ldots)\end{matrix} \\ 0 \quad \text{при всех остальных } j \text{ и } l & \end{cases} \tag{4.5}
$$

Полученные выражения (4.5) для β_{jl} позволяют произвести полный расчет прямоугольной, жестко защемленной пластинки с любым соотношением сторон $\varphi = b/a$ под действием любой симметричной относительно осей x и y поперечной нагрузки. Этот расчет сводится в основном к последовательному вычислению F-ортонормированных координатных элементов χ_j по следующей общей формуле:

$$
\chi_j(x, y) = \sum_{k=j}^{1} b_{jk} \psi_k(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}
$$

где

$$
b_{jk} = c_j \quad \text{при } k = j, \qquad b_{jk} = -c_j \sum_{l=j-1}^{k} \alpha_{jl} b_{lk} \quad \text{при } k = j-1, \ldots, 2, 1 \tag{4.7}
$$

[1] Эта полная система функций совпадает с системой, указанной для прямоугольной области в иной форме С. Зарембой [2].

а

$$\alpha_{jl} = c_l \left\{ \beta_{jl} - \sum_{m=l-1}^{1} \alpha_{jm}\,\alpha_{lm} \right\}, \qquad c_j = \left(\beta_{jj} - \sum_{l=j-1}^{1} \alpha_{jl}^2 \right)^{-1/2} \tag{4.8}$$

При помощи этих функций сразу же составляется искомое решение задачи:

$$v(x, y) = u(x, y) - \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{X}_j \chi_j(x, y) \tag{4.9}$$

где $u(x, y)$ — известная функция прогибов пластинки с шарнирно опертым краем, а грузовые коэффициенты

$$\mathrm{X}_j = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q(x, y)\, \chi_j(x, y)\, dx\, dy \tag{4.10}$$

Имея же функцию прогиба $v(x, y)$, можно, конечно, сразу определить все основные характеристики изгиба жестко защемленной пластинки.

Таблица 1

Сосредоточенная сила P в центре				Равномерно распределенная нагрузка q				
j	α	λ_x $x = \pm a$ $y = 0$	λ_y $x = 0$ $y = \pm a$	β	μ_x $x = \pm a$ $y = 0$	μ_y $x = 0$ $y = \pm a$	μ_x $x = 0$ $y = 0$	μ_y $x = 0$ $y = 0$
1	767	—1567	0	209	—738	0	36	539
2	621	—1014	—1014	140	—478	—478	231	231
3	615	—1325	—1044	138	—538	—484	231	229
4	611	—1292	—1292	138	—531	—531	229	229
5	611	—1243	—1288	138	—504	—529	230	229
6	611	—1246	—1246	138	—506	—506	229	229
7	611	—1256	—1246	138	—516	—506	229	229
8	611	—1256	—1256	138	—515	—515	229	229
	611	— 1257	— 1257	138	—513	—513	229	229

В табл. 1 приведены результаты вычислений при помощи восьми F-ортонормированных координатных функций χ_j коэффициентов прогиба центра v_0 и составляющих погонного изгибающего момента M_x и M_y в центре и середине опорных кромок квадратной пластинки (при $\nu = 0.3$). При этом:

а) в случае действия сосредоточенной силы P в центре

$$v_0 = \alpha\, 10^{-4} \frac{P\,(2\,a)^2}{Eh^3}, \qquad M_x = \lambda_x 10^{-4} P, \qquad M_y = \lambda_y 10^{-4} P \tag{4.11}$$

б) в случае действия равномерно распределенной нагрузки q

$$v_0 = \beta\, 10^{-4} \frac{q\,(2\,a)^4}{Eh^3}, \qquad M_x = \mu_x 10^{-4} q\,(2\,a)^2, \qquad M_y = \mu_y 10^{-4} q\,(2\,a)^2 \tag{4.12}$$

Внизу таблицы для сравнения указаны значения соответствующих коэффициентов, приведенные в работах [11—13].

Для решения задачи об изгибе жестко защемленной по всему периметру прямоугольной пластинки под действием гидростатической (вдоль оси x) нагрузки необходимо построить систему F-ортонормированных координатных элементов $\{\chi_j\}$, кососимметричных относительно оси x и симметричных относительно оси y. Для этого используем систему (4.5), которая подлежит снова F-ортонормированию по формуле (4.4). Произведя соответствующие выкладки, находим, что сейчас вспомогательные коэффициенты

$$\beta_{jl} = \begin{cases} j\pi\left(\operatorname{sh}\frac{j\pi}{\varphi} - \frac{j\pi}{\varphi}\right) & (l = j = 1, 3, 5, \ldots) \\ j\pi\,(\operatorname{sh} j\pi\varphi + j\pi\varphi) & (l = j = 2, 4, 6, \ldots) \\ -\frac{16\, j^2 l^2 \varphi}{(j^2 + l^2\varphi^2)^2} \sin\frac{j\pi}{2} \cos\frac{l\pi}{2} \operatorname{sh}\frac{j\pi}{2\varphi} \operatorname{ch}\frac{l\pi\varphi}{2} & \begin{matrix}(j = 1, 3, 5, \ldots) \\ (l = 2, 4, 6, \ldots)\end{matrix} \\ -\frac{16\, j^2 l^2 \varphi}{(j^2\varphi^2 + l^2)^2} \cos\frac{j\pi}{2} \sin\frac{l\pi}{2} \operatorname{ch}\frac{j\pi\varphi}{2} \operatorname{sh}\frac{l\pi}{2\varphi} & \begin{matrix}(j = 2, 4, 6, \ldots) \\ (l = 1, 3, 5, \ldots)\end{matrix} \\ 0 \quad \text{при всех остальных } j \text{ и } l. & \end{cases}$$

Весь остальной расчет для этого случая производится снова по общим формулам (4.6) — (4.10).

Беря же полусумму получающегося таким образом решения для случая $q(x, y) = qx/a$ с ранее полученным решением для случая $q(x, y) = q$, получаем решение задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластинки под действием гидростатической нагрузки с интенсивностью $q(x, y) = {}^1/_2\, q\,(x + a)$.

Применение для этого случая всего лишь четырех дополнительных F-ортонормированных координатных функций χ_j дает следующие значения коэффициентов в формулах (4.12) для прогиба и составляющих погонного изгибающего момента в центре

$$\beta = 69, \qquad \mu_x = \mu_y = 114$$

и для составляющих момента по середине опорных кромок пластинки

$$\mu_x|_{x=a,\, y=0} = -336, \quad \mu_x|_{x=-a,\, y=0} = -178, \quad \mu_y|_{x=0,\, y=\pm a} = -256$$

Приближенные значения соответствующих коэффициентов, приведенные в [14], равны:

$$\beta = 70, \qquad \mu_x = \mu_y = 101$$

$$\mu_x|_{x=a,\, y=0} = -330, \quad \mu_x|_{x=-a,\, y=0} = -176, \quad \mu_y|_{x=0,\, y=\pm a} = -253$$

Аналогичным образом нами была также рассмотрена задача о поперечном изгибе свободно опертой эллиптической пластинки [15].

Поступила 4 VI 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaremba S. L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques, Bulletin International de l'Akadémie des Sciences de Cracovie, pp. 147—196, 1907.
2. Zaremba S. Sur l'intégration de l'équation biharmonique, Bulletin International de l'Akadémie des Sciences de Cracovie, pp. 1—29, 1908.

3. Рафальсон З. Х. К вопросу о решении бигармонического уравнения. ДАН СССР, т. LXIV, № 6, 1949.
4. Гринберг Г. А. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. ДАН СССР, т. LXXVI, № 5, 1951.
5. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
6. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. Ч. I, Матем. сб., т. 20 (62) № 3, 1947; ч. II, Матем. сб., т. 21 (63) № 3, 1947.
7. Успехи математических наук, т. 1, вып. 1 (11), стр. 240, 1946.
8. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc., vol 68, pp. 337—404, 1950.
9. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, 1950.
10. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
11. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, т. II, Изд. АН СССР, 1953.
12. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
13. Шиманский Ю. А. Изгиб пластин. Судпромгиз, 1936.
14. Калманок А. С. Строительная механика пластинок. Машстройиздат, М., 1950.
15. Слезингер И. Н. О поперечном изгибе свободно опертой эллиптической пластинки, Инженерный сборник, т. XXIII, 1956.