

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФРАКЦИИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН

А. Ф. Филиппов

(Москва)

Задача о диффракции волн, процесс распространения которых описывается одним волновым уравнением, рассматривалась многими авторами. С. Л. Соболев^[1] дал решение этой задачи для случая, когда граница области, в которой распространяются волны, состоит из прямолинейных участков.

Рассматривалась также задача о диффракции упругих волн, распространение которых описывается системой уравнений. Кроме диффракции периодических (установившихся) колебаний^[2-5], были решены задачи о диффракции плоской упругой волны относительно круга^[6] и относительно полупрямой^[7,8].

В работах^[7,8] решена такая задача. В плоскости, заполненной упругим веществом, сделан разрез вдоль полупрямой. Края разреза или закреплены, или свободны. При $t < 0$ идет плоская упругая волна, которая в момент $t = 0$ наталкивается на этот разрез. Исследуется диффракционная картина, возникающая при $t > 0$. Для упругих смещений в каждой точке плоскости при $t > 0$ даны явные формулы, содержащие интегралы от функций комплексного переменного. Такой вид формул сильно затрудняет числовые расчеты или качественное исследование полученной диффракционной картины.

В этой статье дано другое решение той же задачи. Искомые смещения выражаются через значения некоторой функции $F_1(\theta)$, которая легко табулируется (см. табл. 1 этой статьи). Смещения вычислены в 41 внутренних точках области, заполненной диффрагированной волной. Выведены асимптотические формулы для смещений вблизи фронтов диффрагированных волн и проведено качественное исследование этих формул. В статье разобрано также несколько случаев диффракции, не рассматривавшихся ранее.

§ 1. Постановка задачи. Плоскость xy заполнена упругим однородным изотропным веществом, причем вдоль полупрямой $y = 0, x \geq 0$ сделан разрез, края которого закреплены (или свободны). Изучить распространение упругих волн в этом веществе при отсутствии внешних сил в тех случаях, когда при $t < 0$ имеются только плоские волны.

Как известно, составляющие вектора смещения u, v и продольный и поперечный потенциалы φ, ψ связаны соотношениями

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

При отсутствии внешних сил имеют место уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $1/a$ и $1/b$ — скорости продольной и поперечной волн. Граничные условия на обоих краях разреза $y = 0$, $x \geq 0$ в случае закрепленной границы таковы:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

В случае свободной границы — см. [9], формулы (4) и (5).

Рассматриваемая задача формулируется так: найти решение уравнений (1.2) или (1.3) с граничными условиями (1.4) на полупрямой $y = 0$, $x \geq 0$ и начальными условиями вида

$$\begin{aligned} \varphi &= f_1(mx + ny), & \psi &= f_2(mx + ny) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= f_3(mx + ny), & \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f_4(mx + ny) \end{aligned} \quad (1.5)$$

при $t = 0$, где f_1, f_2, f_3, f_4 таковы, что функции (1.5) равны нулю при $y = 0$, $x \geq 0$ (это значит, что при $t = 0$ имеются только плоские волны, которые еще не дошли до разреза $y = 0$, $x \geq 0$; последнее ограничение в § 5 заменяется более слабым).

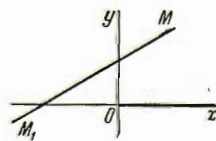
В § 1 — 5 мы рассмотрим диффракцию волны простейшего вида. Путем наложения построенных простейших решений можно получить решение задачи при любых начальных условиях вида (1.5).

§ 2. Приведение задачи диффракции к граничной задаче теории функций комплексного переменного. 1. Рассмотрим случай закрепленной границы [граничные условия (1.4)]. Пусть при $t < 0$ дана плоская продольная волна

$$\varphi(t, x, y) = f(t - ax \sin \alpha + ay \cos \alpha), \quad \psi(t, x, y) = 0 \quad (2.1)$$

$$f(s) = 0 \quad \text{при } s \leq 0, \quad f(s) = 1 \quad \text{при } s > 0 \quad (2.2)$$

где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Тогда при $t < 0$ фронт волны расположен так, как на фиг. 1. В силу принципа Гюйгенса, как только какая-нибудь волна дойдет до границы, возникнут продольная и поперечная волны, распространяющиеся во всех направлениях со скоростями $1/a$ и $1/b$; огибающие фронтов этих волн дают фронты отраженных и диффрагированных волн.



Фиг. 1

Поэтому при $t > 0$ расположение фронтов волн будет такое, как на фиг. 2 (аналогично фиг. 1 статьи [8]).

Волны, получающиеся при отражении волны (2.1) от границы Ox , имеют вид:

$$\begin{aligned} (CK) \quad \varphi &= \gamma_1 f(t - ax \sin \alpha - ay \cos \alpha), & \psi &= 0 \\ (DK) \quad \varphi &= 0, & \psi &= \gamma_2 f(t - bx \sin \beta - by \cos \beta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Чтобы найти γ_1 и γ_2 , подставим в граничные условия (1.4) сумму падающей волны (2.1) и отраженных волн (2.3). Положив затем $y = 0$ и приравняв коэффициенты, получим систему двух уравнений для определения γ_1 и γ_2 .

Решая эту систему, найдем

$$\gamma_1 = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{a^2 - k^2} \sqrt{b^2 - k^2} - k^2}{F(k)} \quad (2.4)$$

$$\gamma_2 = -\frac{a \sin 2\alpha}{b \cos(\alpha - \beta)} = -\frac{2k \sqrt{a^2 - k^2}}{F(k)}$$

$$k = a \sin \alpha = b \sin \beta, \quad F(k) = k^2 + \sqrt{a^2 - k^2} \sqrt{b^2 - k^2} \quad (2.5)$$

Предельным переходом можно доказать, что эти формулы справедливы для разрывных решений (обобщенных в смысле С. Л. Соболева [1]).

Тогда $\varphi = 1 + \gamma_1$ в области ACK и $\psi = \gamma_2$ в области $AEDK$, так как они равны сумме потенциалов падающей волны (2.1), (2.2) и отраженных волн (2.3). Требуется найти φ в круге ACA_1C_1A и ψ в области $AEDB_1E_1A$.

2. Чтобы решить эту задачу, представим каждую из функций φ , ψ в виде полусуммы двух функций: четной по y и нечетной по y .

$$\varphi(t, x, y) = \frac{1}{2} (\varphi_0(t, x, y) + \varphi_1(t, x, y)),$$

$$\psi(t, x, y) = \frac{1}{2} (\psi_0(t, x, y) + \psi_1(t, x, y)) \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, x, y) &= \varphi(t, x, y) + \varphi(t, x, -y), & \psi_0(t, x, y) &= \psi(t, x, y) - \psi(t, x, -y) \\ \varphi_1(t, x, y) &= \varphi(t, x, y) - \varphi(t, x, -y), & \psi_1(t, x, y) &= \psi(t, x, y) + \psi(t, x, -y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко проверить, что каждая пара функций φ_0 , ψ_0 и φ_1 , ψ_1 удовлетворяет уравнениям (1.2) и граничным условиям (1.4), если φ и ψ удовлетворяют уравнению и граничным условиям. Обратное тоже верно.

Задачу отыскания функций φ_0 , ψ_0 в дальнейшем называем симметричной задачей, а функций φ_1 , ψ_1 — антисимметричной задачей. Любое решение можно представить в виде полусуммы решений этих задач.

3. Сказанное в п. 3 и в начале п. 4 применимо не только к функциям φ , ψ , но и к функциям φ_0 , ψ_0 , а также к функциям φ_1 , ψ_1 .

В силу формул (2.1), (2.2) при $t < 0$ функции φ , ψ зависят только от отношений $x/t = \xi$, $y/t = \eta$. Предположим, что то же самое будет иметь место при $t > 0$. Перейдя к переменным ξ , η , получим, что $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ удовлетворяют уравнениям (7) работы [9]. После замены переменных

$$\sigma = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \tau_1 = \frac{\eta \sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2} \quad (2.8)$$

в области $a^2(\xi^2 + \eta^2) < 1$ получим, что $\varphi(\sigma, \tau_1)$ удовлетворяет уравнению Лапласа; то же имеем для $\psi(\sigma, \tau_2)$ в области $b^2(\xi^2 + \eta^2) < 1$ после замены

$$\sigma = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \tau_2 = \frac{\eta \sqrt{1 - b^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2} \quad (2.9)$$

Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sigma + i\tau_1, & \varphi(\sigma, \tau_1) &= \operatorname{Re} \Phi(\theta_1), \\ \theta_2 &= \sigma + i\tau_2, & \psi(\sigma, \tau_2) &= \operatorname{Re} \Psi(\theta_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\Phi(\theta_1)$ (также $\Psi(\theta_2)$) — аналитическая функция на плоскости комплексного переменного θ_1 (соответственно θ_2), разрезанной вдоль луча $-a < \theta_1 < +\infty$ (соответственно $-b < \theta_2 < +\infty$).

В области $a^2(\xi^2 + \eta^2) > 1$ уравнение для $\varphi(\xi, \eta)$ — гиперболического типа и приводится к уравнению струны заменой переменных, указанной в формулах (9₂), (10₂) работы [9].

Для ψ при $b^2(\xi^2 + \eta^2) > 1$ аналогично получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad \sigma = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \tau = \frac{\eta \sqrt{b^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}{\xi^2 + \eta^2} \quad (2.11)$$

Следовательно, в этой области $\psi(\xi, \eta) = f_1(\sigma + \tau) + f_2(\sigma - \tau)$. Характеристиками $\sigma - \tau = \text{const}$ и $\sigma + \tau = \text{const}$ уравнения для $\psi(\sigma, \tau)$ являются касательные к окружности $b^2(\xi^2 + \eta^2) = 1$ (окружность $BEDB_1E_1B$ фиг. 2). Так как $\psi = 0$ вне области KDB_1E_1A , то там можно считать, что $f_1(\sigma + \tau) = f_2(\sigma - \tau) = 0$. Докажем, что $f_1 = 0$ в области $\eta > 0$. В самом деле, любая характеристика $\sigma + \tau = \text{const}$, проходящая хотя бы частично в области $\eta > 0$, имеет точки вне области KDB_1E_1A , а в этих точках $f_1(\sigma + \tau) = 0$. Так как $\sigma + \tau = \text{const}$ на этой характеристике, то на ней $f_1 = 0$.

Итак, в области $b^2(\xi^2 + \eta^2) > 1, \eta > 0$ имеем $\psi = f_2(\sigma - \tau)$. Следовательно, если в этой области θ_2 определить формулой $\theta_2 = \sigma - \tau$, где σ и τ — те же, что в (2.11), то в этой области $\psi = f_2(\theta_2)$.

Так как $\psi = \text{Re } \Psi(\theta_2)$ внутри круга $b^2(\xi^2 + \eta^2) \leq 1$, то для непрерывности ψ на окружности необходимо, чтобы и вне круга $\psi = \text{Re } \Psi(\theta_2)$.

4. Граничные условия для Φ и Ψ в случае свободной границы выведены в работе [9]; в случае закрепленной границы таким же путем из (1.4) и (2.8) — (2.11) получим при $a < \theta < +\infty$

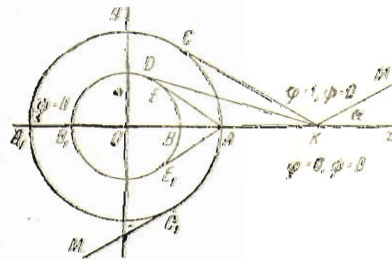
$$\begin{aligned} \text{Re}(\theta \Phi' + \sqrt{b^2 - \theta^2} \Psi') &= 0 \\ \text{Re}(\theta \Psi' - \sqrt{a^2 - \theta^2} \Phi') &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и везде далее корни следует считать непрерывными в верхней полуплоскости и положительными при $-a < \theta < a, \text{Im } \theta = 0$.

При $-\infty < \theta < a$ составим граничные условия для каждой из функций Φ и Ψ отдельно. В силу (2.8) — (2.10) в точке C (фиг. 2) имеем $\theta_1 = k$, а в точке D $\theta_2 = k$, где k — то же, что в (2.5). Значения $\text{Re } \Phi$ при $-a < \theta_1 < a$ и $\text{Re } \Psi$ при $-b < \theta_2 < a$ — это значения φ и ψ соответственно, на дугах A_1CA и B_1DE (фиг. 2), точнее, предельные значения φ и ψ при приближении к этим дугам изнутри. Согласно п. 4 § 2 работы [10] они должны быть равны предельным значениям снаружи, которые известны.

В силу (2.7) получим для симметричной задачи (т. е. взяв вместо (2.10) $\varphi_0 = \text{Re } \Phi_0(\theta_1), \psi_0 = \text{Re } \Psi_0(\theta_2)$)

$$\begin{aligned} \text{Re } \Phi_0 &= 2 && \text{при } -a < \theta < k \\ \text{Re } \Psi_0 &= 0 && \text{при } -b < \theta < k \\ \text{Re } \Phi_0 &= 1 + \gamma_1, \text{Re } \Psi_0 = \gamma_2 && \text{при } -k < \theta < a \end{aligned} \quad (2.13)$$



Фиг. 2.

для антисимметричной задачи (т. е. взяв $\varphi_1 = \operatorname{Re} \Phi_1(\theta_1)$, $\psi_1 = \operatorname{Re} \Psi_1(\theta_2)$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi_1 &= 0 & \text{при } -a < \theta < k \\ \operatorname{Re} \Psi_1 &= 0 & \text{при } -b < \theta < k \\ \operatorname{Re} \Phi_1 &= 1 + \gamma, \operatorname{Re} \Psi_1 = \gamma_2 & \text{при } -k < \theta < a \end{aligned} \quad (2.14)$$

Граничные условия на участках $(-\infty, -a)$ для Φ_0 и $(-\infty, -b)$ для Ψ_0 (это соответствует отрезкам OA_1 и OB_1 на фиг. 2) получаем из соображений симметрии. Так как φ_0 четна по η , то $\partial\varphi_0/\partial\eta = 0$ при $\eta = 0$; отсюда

$$\operatorname{Im} \Phi_0'(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -a \quad (2.15)$$

Далее, так как ψ_0 нечетна по η , то $\psi_0(\xi, 0) = 0$ на OB_1 , т. е.

$$\operatorname{Re} \Psi_0'(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -b \quad (2.16)$$

Для Φ_1 и Ψ_1 точно так же получим

$$\operatorname{Re} \Phi_1(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -a, \quad \operatorname{Im} \Psi_1'(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -b \quad (2.17)$$

5. В случае свободной границы все рассуждения § 2 остаются справедливыми, лишь граничные условия (2.12) заменяются другими [см. ^[9], формулы (15)] и выражения (2.4) и (2.5) меняются:

$$\gamma_1 = \frac{4k^2 \sqrt{a^2 - k^2} - k^2 \sqrt{b^2 - k^2} - (b^2 - 2k^2)^2}{F(k)}, \quad \gamma_2 = \frac{4k(b^2 - 2k^2) \sqrt{a^2 - k^2}}{F(k)}$$

$$k = a \sin \alpha = b \sin \beta, \quad F(k) = (b^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \sqrt{a^2 - k^2} \sqrt{b^2 - k^2}$$

§ 3. Решение граничной задачи. В § 3 мы найдем наиболее простое решение $\Phi(\theta)$, $\Psi(\theta)$ граничной задачи, сформулированной в п. 4 § 2. В ^[11] доказано, что именно оно дает решение задачи о диффракции волны вида (2.1), (2.2). Всякое другое решение $\Phi(\theta)$, $\Psi(\theta)$ дает решение задачи о диффракции при наличии посторонних источников (т. е. при наличии внешних сил, сосредоточенных в какой-либо точке). Мы не рассматриваем такие решения.

1. Решим сначала симметричную задачу. Из (2.13), (2.15), (2.16) следует, что второе из условий (2.12) выполнено при $-\infty < \theta < k$ и $k < \theta < +\infty$. В окрестности точки $\theta = k$ в силу (2.13) главные части функций Φ_0' и Ψ_0' равны $-(1 - \gamma_1)i/\pi(\theta - k)$ и $\gamma_2 i/\pi(\theta - k)$. В силу (2.4) получим, что главная часть выражения $\theta \Psi_0' - \sqrt{a^2 - \theta^2} \Phi_0'$ равна нулю, т. е. это выражение регулярно при $\theta = k$. Итак, второе из условий (2.12) выполнено при $-\infty < \theta < +\infty$. Так как мы ищем простейшее частное решение, то напишем

$$\theta \Psi_0' - \sqrt{a^2 - \theta^2} \Phi_0' \equiv 0 \quad (3.1)$$

Выразим Ψ_0' через Φ_0' и подставим в первую из формул (2.12). Получим

$$\operatorname{Re}(F(\theta) \Phi_0'(\theta)) = 0 \quad (a < \theta < +\infty), \quad F(\theta) = \theta^2 + \sqrt{a^2 - \theta^2} \sqrt{b^2 - \theta^2} \quad (3.2)$$

Знаки корней указаны после формулы (2.12). Легко видеть, что $F(\theta) \neq 0$ при $\operatorname{Im} \theta \geq 0$. Далее из (2.13) следует

$$\operatorname{Re} \Phi_0'(\theta) = 0 \quad (-a < \theta < k, \quad k < \theta < a), \quad \Phi_0'(\theta) \sim \frac{i(1 - \gamma_1)}{\pi(\theta - k)} \quad \text{при } \theta \rightarrow k \quad (3.3)$$

Обозначим $\Phi_0'(\theta) (\theta - k) \sqrt{\theta + a}$ через $\Phi_2(\theta)$. Тогда

$$\operatorname{Re} \Phi_2(\theta) = 0 \quad (-\infty < \theta < a), \quad \operatorname{Re} (F(\theta) \Phi_2(\theta)) = 0 \quad (a < \theta < +\infty) \quad (3.4)$$

Обозначим через $F_1(\theta)$ функцию, обладающую такими свойствами: $F_1(\theta)$ регулярна при $\operatorname{Im} \theta > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Im} \theta = 0$;

$$\arg F_1(\theta) = -\arg F(\theta) = \arctg \frac{\sqrt{\theta^2 - a^2} \sqrt{b^2 - \theta^2}}{\theta^2} \quad \text{при } a < \theta < b,$$

$$\arg F_1(\theta) = 0 \quad \text{при } \theta < a \text{ и } \theta > b; \quad F_1(\infty) = 1$$

Тогда, как известно, $F_1(\theta)$ выражается формулой

$$\ln F_1(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\arg F(t)}{\theta - t} dt \quad (3.5)$$

На основании (3.4), (3.1) и (3.3) имеем

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi_2(\theta)}{F_1(\theta)} = 0 \quad (-\infty < \theta < +\infty)$$

$$\Phi_2(0) = 0, \quad \Phi_2(k) = -\frac{i}{\pi} (1 - \gamma_1) \sqrt{a + k}$$

Эти равенства будут выполнены, если взять

$$\Phi_2(\theta) = iA\theta F_1(\theta), \quad A = -\frac{2k\sqrt{a+k}}{\pi F(k) F_1(k)} \quad (3.6)$$

Зная Φ_2 , найдем Φ_0' , а затем из (3.1) найдем Ψ_0' :

$$\Phi_0'(\theta) = \frac{iA\theta F_1(\theta)}{(\theta - k)\sqrt{\theta + a}}, \quad \Psi_0'(\theta) = \frac{iA\sqrt{a - \theta} F_1(\theta)}{\theta - k} \quad (3.7)$$

2. Антисимметричная задача решается таким же путем. Получим

$$\Phi_1'(\theta) = -\frac{iB\sqrt{b - \theta} F_1(\theta)}{\theta - k}, \quad \Psi_1'(\theta) = \frac{iB\theta F_1(\theta)'}{(\theta - k)\sqrt{\theta + b}} \quad (3.8)$$

$$B = -\frac{2\sqrt{b+k}\sqrt{a^2 - k^2}}{\pi F(k) F_1(k)}$$

где F_1 — та же, что в (3.5).

3. Зная $\Phi'(\theta)$ и $\Psi'(\theta)$, найдем смещения u, v по формулам (1.1), (2.10):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{Re} \left(\Phi'(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \Psi'(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \operatorname{Re} \left(\Phi'(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \Psi'(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Частные производные от θ_1 и θ_2 вычисляются по формулам (2.8) — (2.11). Подставляя в формулы (3.9) Φ_0', Ψ_0' , получим решение u_0, v_0 симметричной задачи, а подставляя Φ_1', Ψ_1' , получим решение u_1, v_1 антисимметричной задачи. В силу (1.1) и (2.6) решение u, v задачи о диффракции выразится так (где $y \geq 0$):

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2}(u_0(t, x, y) + u_1(t, x, y)), \quad v(t, x, y) = \frac{1}{2}(v_0(t, x, y) + v_1(t, x, y))$$

$$u(t, x, -y) = \frac{1}{2}(u_0(t, x, y) - u_1(t, x, y)), \quad v(t, x, -y) = \frac{1}{2}(v_1(t, x, y) - v_0(t, x, y))$$

4. В случае свободной границы задача решается тем же путем. Надо лишь учесть, что функция

$$F(\theta) = (b^2 - 2\theta^2)^2 + 4\theta^2 \sqrt{a^2 - \theta^2} \sqrt{b^2 - \theta^2} \quad (3.10)$$

обращается в нуль при $\theta = \pm c$, где $c > b$, $1/c$ — скорость волны Релея (см. [12], стр. 251—252), поэтому Φ' и Ψ' будут иметь полюсы первого порядка при $\theta = c$. Получим

$$\begin{aligned} \Phi_0'(\theta) &= \frac{iA(b^2 - 2\theta^2)F_2(\theta)}{(\theta - k)(\theta - c)\sqrt{\theta + a}}, & \Psi_0'(\theta) &= -\frac{2iA\theta V\overline{a - \theta}F_2(\theta)}{(\theta - k)(\theta - c)} \\ \Phi_1'(\theta) &= \frac{2iB\theta\sqrt{b - \theta}F_2(\theta)}{(c - k)(\theta - c)}, & \Psi_1(\theta) &= \frac{iB(b^2 - 2\theta^2)F_2(\theta)}{(\theta - k)(\theta - c)\sqrt{b + \theta}} \\ A &= \frac{2(c - k)(b^2 - 2k^2)V\overline{a + k}}{\pi F(k)F_2(k)}, & B &= -\frac{4k(c - k)V\overline{a^2 - k^2}\sqrt{b + k}}{\pi F(k)F_2(k)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где F — та же, что в (3.10), а F_2 получается из (3.5) заменой F_1 на F_2 и функции F вида (3.2) на функцию F вида (3.10).

4. Диффракция поперечной волны. 1. Рассмотрим случай закрепленной границы [граничные условия (1.4)]. Пусть при $t < 0$ под углом β к оси абсцисс (где $0 < \sin \beta < a/b$) идет плоская поперечная волна

$$\varphi(t, x, y) = 0$$

$$\psi(t, x, y) = f(t - bx \sin \beta + by \cos \beta) \quad (4.1)$$

где f дана формулой (2.2). Тогда при $t < 0$ фронт волны расположен как на фиг. 1, а при $t > 0$ как на фиг. 3 (аналогично фиг. 6 статьи [8]). Как в п. 1 § 2, получим $\varphi = \gamma_3$ в ACK и $\psi = 1 + \gamma_1$

в $AEDK$, где $\gamma_1, k, F(k)$ — те же, что в (2.4), (2.5), $\gamma_3 = 2k\sqrt{b^2 - k^2}/F(k)$. Проводя такие же рассуждения, как в § 2 и 3, получим, что функции $\Phi_0', \Psi_0', \Phi_1', \Psi_1'$ будут попрежнему выражаться формулами (3.7), (3.8), лишь коэффициенты A и B будут другими:

$$A = \frac{2V\overline{a + k}V\overline{b^2 - k^2}}{\pi F(k)F_1(k)}, \quad B = -\frac{2kV\overline{b + k}}{\pi F(k)F_1(k)} \quad (4.2)$$

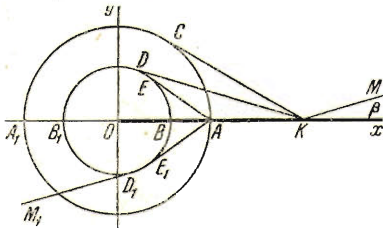
2. Функцию $F_1(\theta)$ [см. формулу (3.5)] определим при $\text{Im } \theta < 0$ так: $F_1(\theta) = \overline{F_1(\bar{\theta})}$, где черта — знак сопряженного комплексного числа. Тогда $F_1(\theta)$ будет регулярна во всей комплексной плоскости, кроме отрезка $a \leq \theta \leq b$. Так как $\arg(F(\theta)F_1(\theta)F_1(-\theta)) = 0$ при $\text{Im } \theta = +0$ и $F_1(\infty) = 1, 2F(\infty) = a^2 + b^2$, то

$$2F(\theta)F_1(\theta)F_1(-\theta) \equiv a^2 + b^2 \quad (4.3)$$

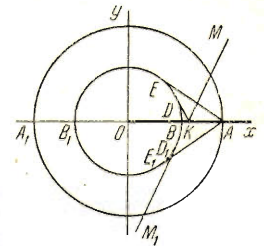
Пользуясь тождеством (4.3), найдем (4.2) в виде

$$A = \frac{4V\overline{a + k}V\overline{b^2 - k^2}F_1(-k)}{\pi(a^2 + b^2)}, \quad B = -\frac{4kV\overline{b + k}F_1(-k)}{\pi(a^2 + b^2)} \quad (4.4)$$

3. Рассмотрим случай, когда поперечная волна падает под таким углом β , что $\sin \beta > a/b$. В этом случае при отражении не возникает плоской продольной волны, и мы получим такую картину (фиг. 4). В этом случае $a < k < b$, так что в силу (4.4) A и B попрежнему вещественны.



Фиг. 3



Фиг. 4

Формулы (3.7), (3.8) сохраняют смысл. В § 16 работы [11] показано, что и в этом случае они дают решение задачи о диффракции.

4. В случае свободной границы задача о диффракции волны (4.1) решается тем же путем. Получим

$$\varphi = \gamma_3 \quad \left(\gamma_3 = - \frac{4k(b^2 - 2k^2)\sqrt{b^2 - k^2}}{F(k)} \right) \quad \text{в обл. } AСК$$

$$\psi = 1 + \gamma_1, \quad \text{в обл. } AEDK$$

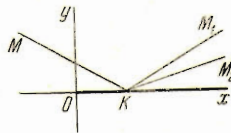
где $\gamma_1, k, F(k)$ — те же, что в п. 5 § 2; функции $\Phi_0', \Psi_0', \Phi_1', \Psi_1'$ будут выражаться формулами (3.11), лишь коэффициенты A и B будут другими:

$$A = \frac{4(c-k)k\sqrt{b^2 - k^2}\sqrt{a+k}}{\pi F(k)F_2(k)}, \quad B = \frac{2(c-k)(b^2 - 2k^2)\sqrt{b+k}}{\pi F(k)F_2(k)}$$

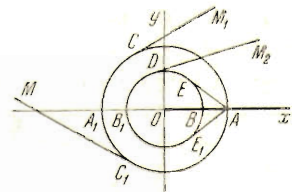
Аналогично (4.3) имеем тождество

$$F(\theta)F_2(\theta)F_2(-\theta) \equiv -2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)$$

§ 5. Случай, когда волна идет со стороны разреза. 1. Рассмотрим случай, когда падающая волна имеет вид (2.1), где $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$. В этом случае ее фронт KM при $t < 0$ пересекает границу $y = 0, x > 0$, значит, и при $t < 0$ имеются отраженные волны KM_1 и KM_2 (фиг. 5). Все фронты волн на фиг. 5 движутся справа налево. При $t = 0$ точка K совпадает с точкой O , а при $t > 0$ возникает диффракционная картина (фиг. 6), которую надо рассчитать.



Фиг. 5



Фиг. 6

Пусть, например, падающая волна дана формулами (2.1), (2.2), где $\alpha < 0, y > 0$, а на границе имеем условия (1.4). Рассуждая так же, как в § 2 и 3, получим, что решение нашей задачи будет по-прежнему выражаться формулами (3.6) — (3.9), только теперь в этих формулах $k < 0$.

2. Таким же путем доказывается, что если падающая волна поперечна и выражается формулами (4.1), (2.2), где $-a/b < \sin \beta < 0$, то формулы (3.7), (3.8), (4.4) по-прежнему дают решение задачи в случае закрепленной границы. Случай $\sin \beta < -a/b$ мы не рассматриваем, так как в этом случае и при $t < 0$ и при $t > 0$ имеются не только плоские волны, но и волны более сложного вида.

Случай свободной границы исследуется аналогично.

§ 6. Вычисление решения. 1. Покажем, как можно вести вычисления по формулам, найденным в § 3, и приведем результаты вычислений для одного частного случая.

Чтобы вычислить функцию F_1 , определяемую формулами (3.5), (3.2), разложим ее в ряд Лорана. Для этого введем обозначения

$$b - a = 2c, \quad b + a = 2d, \quad \theta - d = z, \quad t - d = s$$

$$\text{arc tg } \frac{\sqrt{(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)}}{t^2} = \text{arc tg } \frac{\sqrt{c^2 - s^2}\sqrt{(s + 2d)^2 - c^2}}{(d + s)^2} = f_1(s) \quad (6.1)$$

Пользуясь равенством $(z - s)^{-1} = z^{-1} + sz^{-2} + s^2z^{-3} + \dots$, получим

$$\ln F_1(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{f_1(s)}{s-z} ds = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int_{-c}^c s^{n-1} f_1(s) ds \quad (6.2)$$

Чтобы вычислить эти интегралы, заменим функцию $f_1(s)$ мало отличающейся от нее функцией вида $f_2(s) \sqrt{c^2 - s^2}$, где $f_2(s)$ — многочлен или рациональная функция (множитель $\sqrt{c^2 - s^2}$ нужен потому, что функция (6.1) при $s = \pm c$ обращается в нуль того же порядка, что $\sqrt{c^2 - s^2}$).

Проведем вычисления для случая, когда $b = a\sqrt{3}$. Единицы длины и времени выберем так, чтобы скорость продольных волн была равна единице, тогда получим $a = 1$, $b = \sqrt{3}$; при этом

$$c = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad d = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$f_1(s) \approx \sqrt{c^2 - s^2} \left(\frac{1}{3s + 1.8} + 0.7782 - 0.3072s + 0.11s^2 \right)$$

с ошибкой порядка 10^{-4} . Теперь из (6.2) получим

$$\ln F_1(\theta) = -0.0939z^{-1} + 0.0033z^{-2} - 0.0035z^{-3} + 0.0002z^{-4} - 0.0002z^{-5} + \dots \quad (6.3)$$

По этой формуле вычисляем $\ln F_1(\theta)$ при $|\theta - d| > 1$. Если $|\theta - d| \leq 1$, то $|\theta - d| > 1$, и мы находим $\ln F_1(-\theta)$ по формуле (6.3), а затем $F_1(\theta)$ определяем из (4.3) и (3.2). Полученные значения $\ln F_1(\theta)$ приведены в табл. 1 (при вещественном θ). Значения $\ln F_1(\theta)$ при некоторых комплексных θ приведены в [11]. В табл. 1 θ_1 выражается через r , ν формулами (2.10), (2.8), где $\xi = r \cos \nu$, $\eta = r \sin \nu$. Значения F_1 , приведенные в табл. 1 и в [11], могут быть использованы для вычисления решения задачи о диффракции плоской волны, падающей под любым углом α , так как функция F_1 не зависит от α .

Таблица 1

r	ν	θ_1	$\ln F_1(\theta_1)$	$\ln F_1(-\theta_1)$
0.25	0°	4	-0.0353	0.0176
0.5	0°	2	-0.1540	0.0283
0.75	0°	1.33333	-0.0491+0.5016i	0.0354
1	0°	1	0.6526	0.0406
1	15°	0.96593	0.3858	0.0412
1	30°	0.86603	0.2447	0.0431
1	45°	0.70711	0.1654	0.0465
1	60°	0.5	0.1189	0.0518
1	75°	0.25882	0.0902	0.0599
1	90°	0	0.0719	0.0719

Зная F_1 , вычисляем функции (3.7), (3.8), а затем u , v (см. п. 3 § 3).

Результаты вычислений для того случая, когда $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ и продольная волна вида (2.1), (2.2) падает под углом $\alpha = 45^\circ$ к разрезу, приведены в табл. 2, где r, ν — полярные координаты, $x = r \cos \nu$, $y = r \sin \nu$, значения u, v вычислены при $t = 1$.

Зная значения функций u и v при $t = 1$ (табл. 2), можно вычислить $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ при любом $t > 0$ по формулам

$$u(t, x, y) = \frac{1}{t} u \left(1, \frac{x}{t}, \frac{y}{t} \right), \quad v(t, x, y) = \frac{1}{t} v \left(1, \frac{x}{t}, \frac{y}{t} \right) \quad (6.4)$$

(это следует из (1.1) и из того, что ϕ и ψ зависят только от x/t и y/t).

Асимптотические формулы для u и v вблизи фронтов волн даны в § 7.

Таблица 2

r	ν	$u(1, x, y)$	$v(1, x, y)$	$u(1, x, -y)$	$v(1, x, -y)$
0.5	15°	-0.091	0.154	0.117	0.114
0.75	15°	-0.177	-0.022	-0.063	-0.263
0.25	30°	0.049	-0.009	0.076	-0.021
0.5	30°	-0.115	0.182	0.238	0.078
0.75	30°	-0.201	-0.202	-0.350	-0.510
0.5	45°	-0.134	0.249	0.463	0.101
0.75	45°	-0.217	-0.388	-0.371	-0.588
0.25	60°	0.090	-0.026	0.165	-0.062
0.5	60°	0.095	0.168	0.685	0.079
0.75	60°	-0.168	-0.549	-0.384	-0.602
0.25	90°	0.120	-0.070	0.221	-0.131
0.5	90°	0.589	-0.117	0.844	-0.210
0.75	90°	0.107	-0.651	-0.435	-0.336
0.25	120°	0.128	-0.123	0.227	-0.190
0.5	120°	0.336	-0.229	0.751	-0.505
0.75	120°	0.401	-0.461	-0.327	0.054
0.25	150°	0.133	-0.176	0.197	-0.222
0.5	150°	0.179	-0.435	0.507	-0.648
0.75	150°	0.494	-0.112	-0.019	0.268
0.25	180°	0.156	-0.215	0.156	-0.215
0.5	180°	0.265	-0.613	0.265	-0.613
0.75	180°	0.321	0.192	0.321	0.192

2. Указанным способом мы получили функции u, v для случая, когда падающая волна имеет вид (2.1), (2.2). Рассмотрим теперь случай, когда падающая волна имеет вид:

$$\varphi(t, x, y) = f_p(t - ax \sin \alpha + ay \cos \alpha), \quad \psi(t, x, y) = 0 \quad (6.5)$$

где $f_p(s) = 0$ при $s \leq 0$, $f_p(s)$ произвольна при $s > 0$, $f_p'(s)$ ограничена¹. Решение задачи в этом случае обозначим $\varphi_p, \psi_p, u_p, v_p$. Это решение выражается через ранее найденное решение φ, ψ, u, v с начальными условиями (2.1), (2.2); так,

$$\varphi_p(t, x, y) = \int_0^{\infty} \varphi(t - \lambda, x, y) f_p'(\lambda) d\lambda \quad (6.6)$$

$$\psi_p(t, x, y) = \int_0^{\infty} \psi(t - \lambda, x, y) f_p'(\lambda) d\lambda$$

$$u_p(t, x, y) = \int_0^{\infty} u(t - \lambda, x, y) f_p'(\lambda) d\lambda + \frac{\partial \Sigma \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma \psi_i}{\partial y} \quad (6.7)$$

$$v_p(t, x, y) = \int_0^{\infty} v(t - \lambda, x, y) f_p'(\lambda) d\lambda + \frac{\partial \Sigma \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \Sigma \psi_i}{\partial x}$$

где $\Sigma \varphi_i$ и $\Sigma \psi_i$ — суммы потенциалов только тех из трех волн (6.5) и (2.3) (в (2.3) f следует заменить на f_p ; на фиг. 2 фронты этих волн обозначены KM, C_1M_1, CK, DK), фронты которых прошли через данную точку (x, y) за промежуток времени $(-\infty, t)$. Первые члены в правых частях (6.7) выражают смещения, вызванные диффрагированной волной, а вторые и

¹ Здесь, как и ниже в § 7, можно требовать меньше: достаточно, чтобы $f_p(s)$ была абсолютно непрерывной.

третьи — смещения, вызванные падающей и отраженной волнами (KM , C_1M_1 , CK , DK на фиг. 2).

Для доказательства справедливости формулы (6.6) заметим: 1) интеграл по параметру от решений (или обобщенных решений) есть решение уравнения (1.2); 2) из того, что при $t < 0$ φ и ψ имеют вид (2.1), (2.2), и из тождества

$$j_p(s) \equiv \int_0^{\infty} j(s-\lambda) j_p'(\lambda) d\lambda$$

где j — та же, что в (2.2), следует, что решение (6.6) при $t < 0$ превращается в (6.5).

Формулы (6.7) получаются из (6.6) дифференцированием согласно (1.1); при этом надо учесть разрывы функции φ на фронтах KM , C_1M_1 , CK и ψ на DK (фиг. 2).

§ 7. Асимптотические формулы для решения. Все сказанное в § 7 относится к случаю закрепленной границы. В пп. 1—5 рассмотрено решение задачи о диффракции волны вида (2.1), (2.2), а в п. 6 — волны вида (6.5) и проведено качественное исследование этого решения. Здесь r , ν — полярные координаты, $x = r \cos \nu$, $y = r \sin \nu$.

1. Чтобы вывести асимптотические формулы для u , v при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, разложим в ряды по отрицательным степеням θ правые части формул (3.7), (3.8). Достаточно взять три первых члена ряда. Затем разложим θ_1^{-1} и θ_2^{-1} в ряды по степеням ξ и η , пользуясь формулами (2.8)—(2.10), и перейдем в (3.9) к координатам t , r , ν . Получим

$$u = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{r}{t^3}} \left[-A \left(a_1 \sin \frac{\nu}{2} + a_2 \sin \frac{3\nu}{2} \right) + B a_2 \left(\cos \frac{\nu}{2} - \cos \frac{3\nu}{2} \right) \right] + O\left(\sqrt{\frac{r^3}{t^5}}\right)$$

$$v = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{r}{t^3}} \left[-A a_2 \left(\cos \frac{\nu}{2} - \cos \frac{3\nu}{2} \right) + B \left(a_3 \sin \frac{\nu}{2} - a_2 \sin \frac{3\nu}{2} \right) \right] + O\left(\sqrt{\frac{r^3}{t^5}}\right)$$

где

$$a_1 = 3a^2 + 5b^2, \quad a_2 = b^2 - a^2, \quad a_3 = 5a^2 + 3b^2$$

2. Выведем асимптотические формулы для u , v вблизи фронта продольной диффрагированной волны ACA_1C_1A (фиг. 2).

Учитывая, что в любой точке окружности $r = t/a$ имеем $\theta_1 = a \cos \nu$, а при $-a < \theta_1 < a$ имеем $\operatorname{Re} \Phi'(\theta) = 0$, получим из формул (3.9), что

$$u = \frac{g(\nu) \cos \nu}{\sqrt{t^2 - a^2 r^2}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad v = \frac{g(\nu) \sin \nu}{\sqrt{t^2 - a^2 r^2}} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{при } \frac{r}{t} \rightarrow \frac{1}{a} - 0 \quad (7.1)$$

$$g(\nu) = \frac{1}{2} a^2 (|\sin \nu| \operatorname{Im} \Phi_0'(a \cos \nu) + \sin \nu \operatorname{Im} \Phi_1'(a \cos \nu))$$

где функции Φ_0' и Φ_1' — те же, что в (3.7) и (3.8). Итак, при приближении к окружности $r = t/a$ изнутри направление вектора (u, v) стремится к радиальному, а его длина возрастает и равна $|g(\nu)| (t^2 - a^2 r^2)^{-1/2} + O(t^{-1})$; вектор направлен от центра, если $g(\nu) > 0$. При приближении к этой окружности снаружи (т. е. при $r/t \rightarrow 1/a + 0$), очевидно, $u = v = 0$. Все это справедливо в окрестности любой точки окружности ACA_1C_1A , кроме точек A , A_1 , C , C_1 , N (фиг. 2). В окрестности точки N (N — точка пересечения дуги AC и прямой DK) к смещениям, вычисленным по формулам (7.1), надо добавить смещения, вызванные поперечной волной DK .

В окрестности точки A_1 имеем

$$u = c_1 (t^2 - a^2 r^2)^{-1/2} + O(t^{-1}), \quad v = u \operatorname{tg} \nu + O(t^{-1})$$

где c_1 — постоянная, равная пределу числителя первой дроби (7.1) при $\nu \rightarrow 180^\circ$. Окрестности точек A , C и C_1 не исследуем.

3. При приближении изнутри к окружности $r = t/b$ длина вектора (u, v) неограниченно возрастает, а его направление приближается к направлению касательной к окружности.

Аналогично (7.1) получим, что при $r/t \rightarrow 1/b - 0$, $0^\circ < \nu < 180^\circ$

$$u = \frac{b^2 \sin^2 \nu \operatorname{Im} \Psi'(b \cos \nu)}{\sqrt{t^2 - b^2 r^2}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad v = -\frac{b^2 \sin \nu \cos \nu \operatorname{Im} \Psi'(b \cos \nu)}{\sqrt{t^2 - b^2 r^2}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

При приближении снаружи к дугам ED и DB_1E_1 (фиг. 2) u и v стремятся к конечным пределам и не имеют особенностей, кроме точек D , E , E_1 . При приближении снаружи к дуге BE , т. е. при $r/t \rightarrow 1/b + 0$, $0 < \nu < \arccos(a/b)$, имеем

$$u = -\frac{b^2 \sin^2 \nu \operatorname{Re} \Psi'(b \cos \nu)}{\sqrt{b^2 r^2 - t^2}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad v = \frac{b^2 \sin \nu \cos \nu \operatorname{Re} \Psi'(b \cos \nu)}{\sqrt{b^2 r^2 - t^2}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

На дуге BE_1 функции u, v имеют особенности такого же рода.

4. Исследуем поведение функций u, v в окрестности фронта AE (фиг. 2). Фронт AE_1 исследуется аналогично. Имеем

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \operatorname{Re} \left(\Psi'(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{Re} \left(\Psi''(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)$$

и т. д., где θ_1 и θ_2 выражаются через t, x, y формулами (2.8)–(2.10). Значит, «продольная составляющая» $\partial \varphi / \partial x$ — аналитическая функция от t, x, y , не имеющая особенностей в окрестности отрезка AE , кроме точки A . Исследуем «поперечную составляющую» $\partial \psi / \partial y$. В области BEA согласно п. 3 § 2 $\psi = \operatorname{Re} \Psi(\theta_2)$, $\theta_2 = \sigma - \tau$, где σ и τ — те же, что в (2.11), причем на EA $\theta_2 = a$. В силу (2.13), (2.14) $\operatorname{Re} \Psi''(\theta_2) = 0$ при $k < \theta_2 < a$, а при $\theta_2 \rightarrow a + 0$ при помощи (4.3) получим

$$\operatorname{Re} \Psi''(\theta_2) = c_0 \sqrt{\theta_2 - a} + O(\theta_2 - a)^{3/2}, \quad c_0 = \frac{(a^2 + b^2)(Aa - B\sqrt{2a(b-a)})}{4a^3(a-k)F_1(-a)}$$

Для любой точки (x, y) области BEA обозначим через q расстояние этой точки от прямой EA , а через p — расстояние от точки E до проекции точки (x, y) на прямую EA . Тогда, переходя от (x, y) к (p, q) , получим при $q \rightarrow +0$ и $p^2 > 4qt/b$ (последнее неравенство означает, грубо говоря, что точка (x, y) должна быть ближе к отрезку AE , чем к дуге BE)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{c_0 (b^2 - a^2)^{3/4}}{b p^{3/2}} \sqrt{q} + O\left(t \sqrt{\frac{q^3}{p^7}}\right), \quad p = \frac{x \sqrt{b^2 - a^2} - ay}{b}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{c_0 a (b^2 - a^2)^{3/4}}{b p^{3/2}} \sqrt{q} + O\left(t \sqrt{\frac{q^3}{p^7}}\right), \quad q = \frac{t - ax - y \sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

а при $q \rightarrow -0$ (т. е. вне области BEA) $\partial \psi / \partial x = \partial \psi / \partial y = 0$.

Итак, продольная волна не имеет никаких особенностей на EA , а для поперечной волны смещения непрерывны, а первые производные от смещений терпят разрыв: в области BEA при $q \rightarrow +0$ они растут как $q^{-1/2}$, а с другой стороны фронта EA (т. е. перед фронтом) они равны нулю.

«Интенсивность разрыва» убывает при удалении от точки E как $p^{-3/2}$ и не зависит от времени t (при $p = \text{const}$).

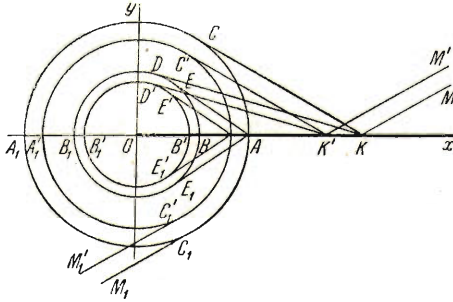
Таким образом, волны AE и AE_1 в некоторых отношениях сходны с «головной волной», исследованной в [13].

5. Вне круга $r = t/a$ имеем всюду $u = v = 0$, кроме фронтов плоских волн KM , C_1M_1 , CK , DK (фиг. 2). На фронтах KM , C_1M_1 , CK функции φ , а на DK — ψ имеют разрыв того же характера, как разрыв на фронте падающей волны.

Величины разрывов определяются из формулы (2.3)—(2.5).

6. Пусть падающая волна имеет вид (6.5), где f_p имеет ограниченную производную¹, равную нулю вне конечного интервала $(0, T)$. Выведем асимптотические формулы для смещений u, v при $t \rightarrow +\infty$. Это позволит

написать приближенные значения u, v в любой момент времени в любой точке, расстояние которой от $(0, 0)$ велико по сравнению с T/a .



Фиг. 7

а) Рассмотрим фронты падающей и отраженных волн KM , C_1M_1 , CK , DK (фиг. 7). Линии, обозначенные штрихами на фиг. 7, отстоят от линий без штрихов на расстояние, пройденное волной за время T . Для падающей волны

u и v могут быть отличны от нуля лишь в областях $MKK'M'$ и $M_1C_1C_1'M_1'$ и выражаются там формулами (6.5), (1.1). Для отраженных волн u, v отличны от нуля лишь в областях $KCC'K'$ и $KDD'K'$ и выражаются там формулами (2.3), (1.1), где f надо заменить на f_p . Итак, амплитуды отраженных волн не зависят от времени и отличаются от амплитуды падающей волны лишь постоянными множителями, которые можно найти из (2.3)—(2.5).

б) Рассмотрим диффрагированную волну ACA_1C_1A . В (7.1) заменим $\sqrt{t^2 - a^2r^2}$ на $\sqrt{2ar}\sqrt{t - ar}$ и полученные выражения подставим в (6.7), отбросив последние два члена в (6.7). Обозначим

$$f_{p1}(\tau) = \int_0^\tau f_p'(\lambda)(\tau - \lambda)^{-1/2} d\lambda \quad \text{при } \tau > 0, \quad f_{p1}(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0 \quad (7.2)$$

Получим, что смещения, вызванные диффрагированной волной ACA_1C_1A , вблизи ее фронта выражаются так (кроме окрестностей точек A, C, C_1, N):

$$\begin{aligned} u_p(t, x, y) &= g(\nu) \cos \nu (2ar)^{-1/2} f_{p1}(t - ar) + \dots \\ v_p(t, x, y) &= g(\nu) \sin \nu (2ar)^{-1/2} f_{p1}(t - ar) + \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

При $t \rightarrow \infty$, $t - ar = \text{const}$, $\nu = \text{const}$ отброшенные члены в (7.3) бесконечно малы по сравнению с написанным, если он не равен нулю.

Итак, амплитуда диффрагированной волны убывает как $r^{-1/2}$; в различных точках фронта эта амплитуда различна (она пропорциональна $g(\nu)$, кроме окрестностей точек C и C_1 , где формула (7.3) неприменима).

¹ См. сноску на стр. 697.

Формы падающей и диффрагированной волн (т. е. функции f_p' и f_{p1}) отличаются следующим: резкость вступления диффрагированной волны на $1/2$ порядка меньше, чем для падающей волны, т. е. если при $s > 0$

$$f_p'(s) = s^n + o(s^n), \quad \text{то} \quad f_{p1}(s) = \text{const} (s^{n+1/2} + o(s^{n+1/2}))$$

для падающей синусоидальной волны амплитуда диффрагированной волны пропорциональна квадратному корню из периода волны, а фаза диффрагированной волны запаздывает на $1/8$ периода; в случае падающей несинусоидальной волны преобладающий период у диффрагированной волны больше, чем у падающей.

в) Исследуем асимптотическое поведение u_p и v_p вдали от фронтов волн. Пусть падающая волна имеет вид (6.5), где $f_p(s) = 0$ при $s \leq 0$, $f_p(s) = m$ при $s \geq T$ и $f_p'(s)$ ограничена. Пусть t , x , y стремится к бесконечности так, что $x/t = \xi$ и $y/t = \eta$ постоянны и точка (t, x, y) не попадает ни на один из фронтов волн, изображенных на фиг. 2. Тогда

$$tu_p(t, x, y) \rightarrow mu(1, \xi, \eta), \quad tv_p(t, x, y) \rightarrow mv(1, \xi, \eta) \quad (7.4)$$

где u, v — те же, что в п. 3 § 6.

Доказательство. Если точка $(1, \xi, \eta)$ не лежит ни на одном из фронтов, то при $t \rightarrow \infty$ расстояние точки $(t, t\xi, t\eta)$ от фронтов неограниченно возрастает, следовательно, при достаточно больших t в (6.7) последние два члена равны нулю. Из (6.7) и (6.4) получим

$$u_p(t, x, y) = \int_0^T \frac{1}{t-\lambda} u\left(1, \frac{x}{t-\lambda}, \frac{y}{t-\lambda}\right) f_p'(\lambda) d\lambda \quad (7.5)$$

Так как

$$\int_0^T f_p'(\lambda) d\lambda = m, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t-\lambda} = 1$$

а функция u непрерывна в точке $(1, \xi, \eta)$, то из (7.5) получается первая из формул (7.4). Вторая доказывается аналогично. Можно показать, что предельный переход — равномерный в любой замкнутой области плоскости (ξ, η) , где $u(1, \xi, \eta)$ и $v(1, \xi, \eta)$ непрерывны.

г) Если $m = 0$, то из (7.5) получим, интегрируя по частям:

$$u_p(t, x, y) = - \int_0^T \frac{f_p(\lambda)}{(t-\lambda)^2} \left(u + \frac{x}{t-\lambda} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y}{t-\lambda} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\lambda$$

где в u , $\partial u / \partial \xi$, $\partial u / \partial \eta$ следует подставить аргументы: $t = 1$, $\xi = x/(t-\lambda)$, $\eta = y/(t-\lambda)$. Если $\partial u / \partial \xi$ и $\partial u / \partial \eta$ непрерывны в точке $(1, \xi, \eta)$, то при $t \rightarrow \infty$ и постоянных $x/t = \xi$, $y/t = \eta$ получим

$$t^2 u_p(t, x, y) \rightarrow - \left(u + \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \int_0^T f_p(\lambda) d\lambda. \quad (7.6)$$

где $u = u(1, \xi, \eta)$. Такое же соотношение имеет место для функции v_p .

Фронты AE и AE_1 , где $\partial u / \partial \xi$ и $\partial u / \partial \eta$ разрывны, надо исследовать отдельно. Имеем $u_p = \partial \varphi_p / \partial x + \partial \psi_p / \partial y = u_p^1 + u_p^2$. «Продольная составляющая» $u_p^1 = \partial \varphi_p / \partial x$ непрерывна на AE вместе со всеми своими производными (кроме точек A и E). Поэтому для нее справедлива формула, аналогичная (7.6), т. е. в случае падающей волны вида (6.5), где $f_p(t) = 0$,

вне интервала $(0, T)$ «продольная составляющая» убывает как $O(t^{-2})$. Для «поперечной составляющей» $u_p^2 = \partial^2 u_p / \partial y^2$ получили в силу (6.7) и п. 4 § 7

$$u_p^2(t, x, y) = -c_0(b^2 - a^2)^{-1/4}(bp)^{-1/2}f_{p2}(\tau) + \dots \quad (7.7)$$

где

$$\tau = t - ax - y\sqrt{b^2 - a^2} = bq$$

$$f_{p2}(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0; \quad f_{p2}(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{\tau - \lambda} f_p(\tau) d\lambda \quad \text{при } \tau > 0 \quad (7.8)$$

Формулой (7.7) можно пользоваться при $b^2 p^2 > 4t\tau$; отношение отброшенных членов к написанному будет порядка $O(tq/bp^2)$ при $t \rightarrow \infty$, $\tau = \text{const}$, $f_{p2}(\tau) \neq 0$, $b^2 p^2 > 4t\tau$. Таким же образом получаем формулу для v_p^2 .

Значит, амплитуда «поперечной составляющей» u_p^2 , v_p^2 убывает пропорционально $p^{-3/2}$, где p — расстояние до точки E . Так как $p < t/a$, то «продольная составляющая» u_p^1 , v_p^1 убывает быстрее — как $O(t^{-2})$ — и при больших t сколь угодно мала по сравнению с u_p^2 , v_p^2 . Итак, (7.7) дает асимптотическое выражение для u_p в окрестности фронта AE . Волна AE_1 имеет такой же характер.

Из (7.7), (7.8) следует, что резкость вступления волны AE на один порядок меньше, чем для волн ACA_1C_1A и EDB_1E_1 ; фаза у волны AE запаздывает на $1/4$ периода по сравнению с указанными волнами, преобладающий период — больше. Как известно [13], такие же особенности имеет головная волна (по сравнению с падающей и отраженной волнами).

Сравним амплитуды волн AC и AE в такой точке (x, y) , где x велико по сравнению с y , а $y > T/a$. Из (7.3) и (7.1) имеем

$$\sqrt{u^2 + v^2}|_{AC} \approx \frac{a^2 \sin \nu}{V 2ar} |\text{Im } \Phi'(a \cos \nu)| |f_{p1}(t - ar)|$$

Из (7.7) и п. 4 § 7 имеем

$$\sqrt{u^2 + v^2}|_{AE} \approx |c_0| \frac{(b^2 - a^2)^{1/4}}{V b p^3} |f_{p2}(\tau)|, \quad |c_0| = \lim_{\theta \rightarrow a+0} \frac{|\text{Re } \Psi'(\theta)|}{V \theta - a}$$

В силу (2.12) этот предел равен $V 2/a |\text{Im } \Phi'(a)|$. Так как при $x \gg y$ имеем $x \approx r$, $\sin \nu = y/r$, $\cos \nu \approx 1$, $p \approx r \sqrt{b^2 - a^2}/b$, то отношения амплитуд волн AE и AC приближенно равно

$$\frac{2b \max |f_{p2}|}{a^2 y \max |f_{p1}|} \quad (7.9)$$

Так как в силу (7.2) и (7.8)

$$f_{p2}(\tau) = 1/2 \int_0^\tau f_{p1}(s) ds$$

то последняя дробь в (7.9) зависит от вида функции f_{p1} . Например, если $f_{p1}(\tau) = c \sin(2\pi n\tau/T)$ при $0 < \tau < T$ и $f_{p1}(\tau) = 0$ вне этого интервала, то выражение (7.9) равно $bT/(2\pi n a^2 y)$. То-есть с уменьшением «периода колебаний» T/n отношение амплитуд волн AE и AC убывает. При $y = T/4an$ (т. е. на расстоянии от границы, равном $1/4$ «длины волны») амплитуды волн AE и AC будут одного порядка. С ростом y амплитуда AC растет линейно (пока $y \ll x$), а амплитуда AE в первом приближении

не зависит от y . Эти заключения справедливы и для многих других видов функции f_{p1} , причем роль «периода колебаний» играет удвоенное расстояние между точками, в которых f_{p1} обращается в нуль. С другой стороны, между амплитудами волн AE и BED (фиг. 7) не существует такой простой зависимости.

д) Сказанное в пп. а, б, в, г означает, что около фронтов KM , C_1M_1 , CK , DK (фиг. 7) u и v не убывают при $t \rightarrow \infty$, около фронтов диффрагированных волн u и v убывают как $t^{-1/2}$, а вдали от всех фронтов u и v убывают как t^{-1} (если $m \neq 0$) и как t^{-2} (если $m = 0$), где m то же, что в «в»). В случае $m = 0$ около фронта AE (также AE_1) u и v убывают как $p^{-3/2}$, где p — расстояние до точки E (соответственно E_1), а при $p = \text{const}$ u и v не зависят от времени (в первом приближении). Окрестности точек A, B, C, C_1, D, E, E_1 надо исследовать отдельно. Мы не проводим этого исследования.

В случае свободной границы появляется еще одна особенность в окрестности точки $x = t/c, y = 0$, где c — то же, что п. 4 § 3. Это — волна Релея, исследование которой проводится так, как указано в [10], п. 10 § 3.

Поступила 15 X 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Общая теория диффракции волн на римановых поверхностях. Тр. Математич. ин-та им. Стеклова, т. 9, стр. 39—105, 1935.
2. Шерман Д. И. К вопросу о диффракции упругих волн. ДАН СССР, т. 48, № 9, стр. 655—658, 1945.
3. Кусков А. М. Диффракция упругих установившихся колебаний. ДАН СССР, т. 70, № 2, стр. 197—199, 1950.
4. Мауе А. W. Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene. Zeitschr. für angew. Math. und Mech., Bd. 33, Heft 1/2, стр. 1—10, 1953.
5. Скуриди Г. А. Приближенное решение задачи о диффракции плоской упругой волны относительно щели. ИАН, сер. геофиз., № 1, стр. 3—16, 1955.
6. Миндлин Я. А. Диффракция плоской волны относительно круга. ДАН СССР, т. 26, № 6, стр. 567—571, 1940.
7. Фридман М. М. Диффракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза, свободного от напряжений. ДАН СССР, т. 66, № 1, стр. 21—24, 1949.
8. Фридман М. М. Диффракция плоской упругой волны относительно полубесконечной, прямолинейной, жестко заделанной щели. Уч. зап. ЛГУ, сер. математич. наук, механика, № 114, вып. 17, стр. 72—94, 1949.
9. Смирнов В. И. и Соболев С. Л. (Smirnoff V., Soboleff S.). Sur une methode nouvelle dans le probleme plan des vibrations élastiques. Тр. Сейсмологич. ин-та, № 20, стр. 1—37, 1932.
10. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний; гл. XII в кн. Ф. Франк и Р. Мизес: Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2-я, ОНТИ, стр. 468—617, 1937.
11. Филиппов А. Ф. Плоская задача диффракции упругих волн. Диссертация канд. физ.-мат. наук. МГУ, М., 1953.
12. Соболев С. Л. Soboleff S. Sur les vibrations d'un demiplan et d'une couche à conditions initiales arbitraires. Математич. сб., т. 40, вып. 2, стр. 236—266, 1933.
13. Зайцев Л. П. и Зволинский Н. В. Исследование головной волны, возникающей на границе раздела двух упругих жидкостей. ИАН, сер. географ. и геофиз., т. 15, № 1, стр. 20—39, 1951.