Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. Е. Прокопович

(Одесса)

В настоящей заметке приведено решение плоской контактной задачи с учетом ползучести для тел, удовлетворяющих предпосылкам теории Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна [1, 2]. Как известно, эта теория применима для бетона при напряжениях, не превосходящих 0.5 от разрушающих, дерева, пластмасс и связанных грунтов [6]. Поэтому и предлагаемое решение справедливо для рассмотрения контакта двух тел, выполненных из этих материалов, и может быть распространено и на задачи о напряжениях и деформациях однородного грунта основания под подошвой фундамента.

1. В случае плоской задачи деформации с учетом ползучести согласно [2] могут быть записаны так:

$$\varepsilon_x^*(t) = \frac{\sigma_x^*(t) - \mu(t)\,\sigma_y^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \left[\sigma_x^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \sigma_y^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta^\times(t,\tau)\right]d\tau + \varepsilon_x^\circ(t) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_y^*(t) = \frac{\sigma_y^*(t) - \mu(t)\,\sigma_x^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \left[\sigma_y^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) - \sigma_x^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta^\times(t,\tau)\right]d\tau + \varepsilon_y^\circ(t)$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = 2\left\{\frac{[1+\mu(t)]\,\tau_{xy}^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{xy}^*(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}\delta^\times(t,\tau)\right]d\tau\right\} + \gamma_{xy}^\circ(t)$$

Здесь $E(t)$ — модуль упруго-мгновенной деформации, $\mu(t)$ — коэффициент поперечного расширения для упругой части деформации, $\delta(t,\tau) = 1/E(\tau) + C(t,\tau)$ — полная относительная деформация при сжатии или растяжении, $\delta^\times(t,\tau) = \mu(\tau)/E(\tau) + \mu^*(t,\tau)\,C(t,\tau)$ — полная относительная поперечная деформация, $\mu^*(t,\tau)$ — коэффициент поперечного расширения при деформации ползучести, $\varepsilon_x^\circ(t)$, $\varepsilon_y^\circ(t)$ и $\gamma_{xy}^\circ(t)$ — соответствующие вынужденные деформации, τ_1 — время приложения нагрузки.

Разумеется, все деформации и напряжения являются функциями координат x и y и времени t.

Подставив (1.1) в уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x^*(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y^*(t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}^*(t)}{\partial x\,\partial y} \tag{1.2}$$

и исключив τ_{xy}^* при помощи уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x^*(t)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*(t)}{\partial y} + X = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}^*(t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*(t)}{\partial y} Y = 0 \tag{1.3}$$

после введения функции напряжений по известным формулам

$$\sigma_x^*(t) = \frac{\partial^2 \varphi^*(t)}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y^*(t) = \frac{\partial^2 \varphi^*(t)}{\partial x^2}$$

и некоторых преобразований придем к такому интегро-дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2\nabla^2 \varphi^*(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t} \nabla^2\nabla^2\varphi^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau = -[1+\mu(t)]\left[\frac{\partial X(t)}{\partial x} + \frac{\partial Y(t)}{y}\right] +$$

$$+E(t)\int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right]\frac{\partial}{\partial\tau}[\delta(t,\tau) + \delta^{\times}(t,\tau)]\,d\tau -$$

$$-\left[\frac{\partial^2 \varepsilon_x^\circ(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^\circ(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^\circ(t)}{\partial x\,\partial y}\right] \tag{1.4}$$

Это уравнение относительно функции $\nabla^2\nabla^2\varphi(t)$ является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и при правой части, равной нулю, не имеет решений, отличных от тождественного нуля. Поэтому в случае постоянных объемных сил при их отсутствии и при отсутствии вынужденных деформаций единственным решением этого уравнения будет

$$\nabla^2\nabla^2\varphi^*(t) = 0, \qquad \varphi^*(t) = \varphi(t) \tag{1.5}$$

Отсюда при контурных условиях, заданных в напряжениях, непосредственно следует, что

$$\sigma_x^*(t) = \sigma_x(t), \qquad \sigma_y^*(t) = \sigma_y(t), \qquad \tau_{xy}^*(t) = \tau_{xy}(t) \tag{1.6}$$

т. е. что напряжения с учетом ползучести совпадают с соответствующими напряжениями упруго-мгновенной задачи. Этот вывод дополняет результат Арутюняна [2], рассматривавшего трехмерную задачу и получившего аналогичный результат при условии $\mu(t) = \mu^*(t,\tau) = \mu = \mathrm{const}$.

Учитывая (1.6), в случае плоской задачи можно вычислить деформации упруго-ползучего тела, вызванные внешними силами, приложенными к контуру по формулам (1.1), подставляя в эти формулы соответствующие напряжения упруго-мгновенной задачи.

Согласно [3] вертикальное перемещение границы упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации под действием переменных во времени нормальных сил $p(x, t)$, определяется формулой

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi E(t)}[1-\mu^2(t)]\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p(s,t)\,ds + c(t) \tag{1.7}$$

где $2a$ ширина участка приложения усилий, $c(t)$ — произвольная постоянная. Учитывая все сказанное выше, такие же перемещения границы полупространства с учетом ползучести можно вычислить по формуле

$$v^*(x,t) = \frac{2}{\pi}\frac{1-\mu^2(t)}{E(t)}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p(s,t)\,ds -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p(s,t)\,ds\frac{\partial}{\partial\tau}\{[1-\mu^{*2}(t,\tau)]\,\delta(t,\tau)\}\,d\tau + c^*(t) \tag{1.8}$$

2. Как известно [3], соответствующие вертикальные упругие перемещения двух тел v_1 и v_2 в месте их контакта связаны уравнением

$$v_1(t, \tau) + v_2(t, \tau) = \delta(t) - f_1(x) - f_2(x) \tag{2.1}$$

где $\delta(t)$ — суммарное неупругое перемещение, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — уравнения поверхностей первого и второго тел.

Разумеется, уравнение (2.1) справедливо как для деформаций упруго-мгновенной задачи, так и для полных деформаций с учетом ползучести. Ограничиваясь рассмотрением случая контакта без сил трения и сцепления, после подстановки в (2.1) значений v_1 и v_2, записанных по (1.8), получим следующее интегральное уравнение по переменным x и t:

$$\frac{2}{\pi}\Bigg\{\bigg[\frac{1-\mu_1^2(t)}{E_1(t)} + \frac{1-\mu_2^2(t)}{E_2(t)}\bigg]\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \ln\frac{1}{|x-s|}\, p^*(s, t)\, ds -$$

$$-\int\limits_{\tau_1}^{t}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \ln\frac{1}{|x-s|}\, p^*(s, \tau)\, ds\, \frac{\partial}{\partial\tau}\,[[1-\mu_1^{*2}(t, \tau)]\,\delta_1(t, \tau) +$$

$$+ [1-\mu_2^{*2}(t, \tau)]\,\delta_2(t,\tau)]\, d\tau\Bigg\} = c^*(t) - f_0(x) \tag{2.2}$$

где $f_0(x) = f_1(x) + f_2(x)$, причем $f_0(x)$ не зависит от t, $2a(t)$ — переменная ширина контакта. Это интегральное уравнение можно переписать в следующей, более компактной форме:

$$\omega(x, t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} K(t, \tau)\,\omega(x, \tau)\, d\tau = \frac{c^*(t) - f_0(x)}{\vartheta(t)} \tag{2.3}$$

где

$$\omega(x, t) = \int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \ln\frac{1}{|x-s|}\, p^*(s, \tau)\, d\tau \tag{2.4}$$

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\,\frac{[1-\mu_1^{*2}(t, \tau)]\,\delta_1(t, \tau) + [1-\mu_2^{*2}(t, \tau)]\,\delta_2(t, \tau)}{\vartheta(t)} \tag{2.5}$$

$$\vartheta(t) = \frac{2}{\pi}\bigg[\frac{1-\mu_1^2(t)}{E_1(t)} + \frac{1-\mu_2^2(t)}{E_2(t)}\bigg] \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что разрешающее уравнение (2.2) контактной задачи с учетом ползучести распадается на интегральное уравнение Фредгольма первого рода (2.4), описывающее упруго-мгновенную задачу, и интегральное уравнение Вольтерра второго рода (2.3), учитывающее влияние ползучести.

Решение уравнения (2.3) может быть представлено в виде

$$\omega(x, t) = \gamma^{\times}(t) - H(t)\, f_0(x) \tag{2.7}$$

где $\gamma^{\times}(t)$ — решение при правой части, равной $c^*(t)/\vartheta(t)$, $H(t)$ — при правой части, равной $1/\vartheta(t)$.

Поэтому (2.4) можно записать в виде интегрального уравнения

$$\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \ln\frac{1}{|x-s|}\, p^*(s, t)\, ds = \gamma^{\times}(t) - H(t)\, f_0(x) \tag{2.8}$$

являющегося обычным уравнением упруго-мгновенной задачи для момента времени t с дополнительным множителем при $f_0(x) - H(t)$, учитывающим влияние ползучести. Если это так, то воспользовавшись решениями Н. А. Ростовцева[4] и М. Г. Крейна[5] для упруго-мгновенной контактной задачи, позволяющими легко получить расчетные формулы при различных функциях $f_0(x)$, запишем для случая симметричного приложения внешней силы

$$p^*(s, t) = \frac{\gamma^\times(t)}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} + H(t)\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \frac{u}{\sqrt{u^2 - x^2}}\int\limits_0^u \frac{f_0''(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}}\,ds\,du \qquad (2.9)$$

В этой формуле первый член, представляющий решение с особенностями в точках $x = \pm a$, подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a$, причем $\gamma^\times(t)$ определяется из уравнения равновесия

$$P(t) = \int\limits_{-a}^{a} p^*(s, t)\,dx \qquad (2.10)$$

Когда ширина контакта $2a$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, необходимо положить $\gamma^\times(t) = 0$ и искать $a(t)$ при помощи уравнения

$$P(t) = \int\limits_{-a(t)}^{a(t)} p^*(s, t)\,dx \qquad (2.11)$$

3. Интегральное уравнение для определения $H(t)$ согласно (2.3) — (2.7) можно представить в виде

$$\left[\frac{D_1(t)}{E_1(t)} + \frac{D_2(t)}{E_2(t)}\right] H(t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} [D_1(t, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1'(t, \tau) +$$

$$+ D_2(t, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_2'(t, \tau)]\, H(\tau)\,d\tau = 1 \qquad (3.1)$$

где

$$D_1(t) = \frac{2[1 - \mu_1^2(t)]}{\pi}, \qquad D_2(t) = \frac{2[1 - \mu_2^2(t)]}{\pi}$$

$$D_1(t, \tau) = \frac{2[1 - \mu_1^{*2}(t, \tau)]}{\pi}, \qquad D_2(t, \tau) = \frac{2[1 - \mu_2^{*2}(t, \tau)]}{\pi} \qquad (3.2)$$

При плоском напряженном состоянии здесь и далее необходимо положить

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_1^* = \mu_2^* = 0$$

С целью упрощения дальнейших выкладок будем считать

$$\mu_1(t) = \mu_1^*(t) = \mu_1 = \text{const}, \qquad \mu_2(t) = \mu_2(t) = \mu_2 = \text{const} \qquad (3.3)$$

и соответственно

$$D_1(t) = D_1(t, \tau) = d_1 = \frac{2(1 - \mu_1^2)}{\pi}$$

$$D_2(t) = D_2(t, \tau) = d_2 = \frac{2(1 - \mu_2^2)}{\pi} \qquad (3.4)$$

$$\vartheta(t) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1 - \mu_1^2}{E_1(t)} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2(t)}\right]$$

Если для полных относительных деформаций принять выражения

$$\delta_1(t, \tau) = \frac{1}{E_1(\tau)} + \varphi_1(\tau)\,[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

$$\delta_2(t, \tau) = \frac{1}{E_2(\tau)} + \varphi_2(\tau)\,[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \qquad (3.5)$$

интегральное уравнение (3.1) может быть сведено к следующему дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\vartheta(t) H''(t) + \Big\{\gamma\left[\vartheta(t) + d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t)\right] - \\ - \left[d_1 \frac{E_1'(t)}{E_1^2(t)} + d_2 \frac{E_2'(t)}{E_2^2(t)}\right]\Big\} H'(t) = 0 \qquad (3.6)$$

и начальными условиями

$$H(\tau_1) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)}, \qquad H'(\tau_1) = -\gamma\left[d_1\varphi_1(\tau_1) + d_2\varphi_2(\tau_1)\right] \frac{H(\tau_1)}{\vartheta(\tau_1)} \qquad (3.7)$$

где τ_1 — момент начала приложения нагрузки.

Решение уравнения (3.6) при этих начальных условиях может быть представлено в квадратурах следующим образом:

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)} - \gamma\Psi(\tau_1) \int_{\tau_1}^{t} \frac{e^{-\eta(\tau)}}{\vartheta(\tau)}\, d\tau \qquad (3.8)$$

где

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} [1 - \Psi(z)]\, dz, \qquad \Psi(\tau) = \frac{d_1\varphi_1(\tau) + d_2\varphi_2(\tau)}{\vartheta(\tau)} \qquad (3.9)$$

Следуя [2], примем

$$\varphi_1(\tau) = C_1 + \frac{A_2}{\tau}, \qquad \varphi_2(\tau) = C_2 + \frac{A_3}{\tau} \qquad (3.10)$$

тогда

$$\Psi(\tau) = \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau}\right)\frac{1}{\vartheta(\tau)}, \qquad C_0 = d_1C_1 + d_2C_2, \qquad A_1 = d_1A_2 + d_2A_3 \qquad (3.11)$$

и из (3.8)

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)}\left[1 - \gamma\left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}\right)\int_{\tau_1}^{t} \frac{e^{-\eta(\tau)}}{\vartheta(\tau)}\, d\tau\right] \qquad (3.12)$$

Рассмотрим случай наличия постоянных зависимостей между характеристиками деформативности двух тел:

$$m_y(\tau) = \frac{E_2(\tau)}{E_1(\tau)} = m_y = \text{const}, \qquad m_n(\tau) = \frac{\varphi_2(\tau)}{\varphi_1(\tau)} = m_n = \text{const} \qquad (3.13)$$

В этом случае

$$\Psi(\tau) = b\varphi_1(\tau) E_1(\tau), \qquad b = \frac{d_1 + d_2 m_n}{d_1 + d_2 m_y} m_y \qquad (3.14)$$

где произведение $\varphi_1(\tau) = \varphi_1(\tau) E_1(\tau)$ является общей характеристикой деформативности первого тела и подлежит определению экспериментальным путем. Действительно, легко видеть, что $\varphi_1(\tau) E_1(\tau) = \varepsilon_{1n}(\tau) / \varepsilon_{1y}(\tau)$, где $\varepsilon_{1n}(\tau)$ — полная относительная деформация ползучести от силы, приложенной в момент времени τ, $\varepsilon_{1y}(\tau)$ — соответствующая упруго-мгновенная деформация.

Функция $\Psi_1(\tau)$ может быть аппроксимирована следующим рядом:

$$\Psi_1(\tau) = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{k=j} \frac{\sigma_k}{\tau^k}$$

Обработка опытных данных показывает, что для бетонов во многих случаях уже первые два члена этого ряда достаточно хорошо описывают закон изменения $\Psi_1(\tau)$, т. е. что можно считать

$$\Psi_1(\tau) = b\left(\sigma_0 + \frac{\sigma_1}{\tau}\right) \tag{3.15}$$

Приняв закон изменения $E_1(\tau)$ в виде

$$E_1(\tau) = E_1(1 - e^{-\alpha\tau}) \tag{3.16}$$

и подставив в (3.8) значения $\Psi_1(\tau)$ и $E_1(\tau)$ по (3.15) и (3.16), можем представить расчетную формулу для $H(t)$ в следующем виде:

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta(\tau_1)}\left\{1 - \gamma\frac{E_1}{E_1(\tau_1)} b\left(\sigma_0 + \frac{\sigma_1}{\tau_1}\right) e^{r\tau_1}\tau_1{}^p \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\Phi(r,t,\ p) - \Phi(r\tau_1,\ p)}{r^{1-p}} - \frac{\Phi[(r+\alpha)\,t,\ p] - \Phi[(r+\alpha)\,\tau_1\,p]}{(r+\alpha)^{1-p}}\right]\right\}$$

где

$$r = \gamma(1 + b\sigma_0), \qquad p = \gamma b\sigma_1, \qquad \Phi(\xi,\ p) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^p}\,d\tau \tag{3.17}$$

$\Phi(\xi,\ p)$ — неполные гамма-функции.

При постоянных модулях упруго-мгновенной деформации

$$E_1(t) = E_1 = \text{const}, \qquad E_2(t) = E_2 = \text{const} \tag{3.18}$$

$$H(t) = \frac{1}{\vartheta}\left[1 - \gamma b E_1\left(C_0 + \frac{A_2}{\tau_1}\right) e^{r\tau_1}\tau_1{}^p\, \frac{\Phi(rt,\ p) - \Phi(r\tau_1,\ p)}{r^{1-p}}\right] \tag{3.19}$$

где

$$r = \gamma(1 + bC_1E_1), \qquad p = b\gamma A_2 E_1$$

В случае контакта тел, имеющих одинаковые характеристики деформативности, $b = 1$ и (3.19) с точностью до постоянного множителя ϑ^{-1} совпадает с выражением для коэффициента затухания температурных напряжений [2] (стр. 77) при действии стационарного теплового потока $H_x{}^*(t,\ \tau)$. Однако физическая сущность коэффициентов $H_x{}^*(t,\ \tau)$ и $H(t)$ разная, так как первый является коэффициентом затухания напряжений, вызванных вынужденными температурными деформациями, а второй коэффициентом перераспределения нормальных контактных усилий [см. (2.9)]. Правда, при контакте двух тел, ограниченных плавными кривыми или поверхностями без особых точек, коэффициент $H(t)$ вследствие увеличения за счет ползучести $a(t)$ вызывает уменьшение усилий, возникающих в момент контакта, но при наличии особенностей происходит именно перераспределение усилий.

4. Ниже рассмотрено несколько конкретных примеров решения контактной задачи с учетом ползучести.

а) Контакт происходит по параболической цилиндрической поверхности $f_0(x) = x^2/2R$, ширина контакта задана. Подставив значение $f_0(x)$ в (2.9), после выполнения элементарных операций, найдем

$$p^*(x,\ t) = \frac{\gamma^\times(t)}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{H(t)}{\pi R}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4.1}$$

Вследствие ограниченной ширины контакта и наличия особых точек $\gamma^\times(t) \neq 0$ определяется при помощи уравнения (2.10) и равно

$$\gamma^\times(t) = P(t) - \frac{H(t)\,a^2}{2R} \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) получим окончательно

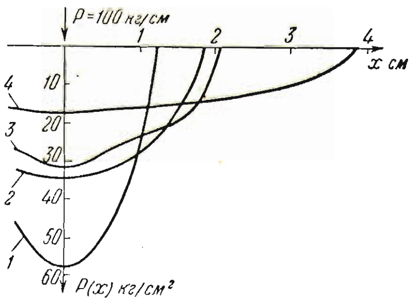
$$p^*(x,\ t) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\left[P(t) + \frac{H(t)}{2R}(a^2 - 2x^2)\right] \tag{4.3}$$

причем эта формула справедлива при $\gamma^{\times}(t) > 0$, т. е. когда $P(t) > H(t)\,a^2/2R$. Из этого решения, очевидно, что если контакт происходит по прямой, то в формуле (4.2) второй член, связанный с $f_0''(s)$ [см. (2.9)], обращается в нуль, в силу чего

$$p^*(x,\ t) = p(x,\ t) = \frac{P(t)}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{4.4}$$

и ползучесть не оказывает влияния на распределение усилий в месте контакта.

б) Контакт происходит по параболической цилиндрической поверхности $f_0(x) = x^2/2R$, ширина контакта не задана.



Фиг. 1

Вследствие отсутствия особых точек в (2.9) и соответственно в (4.1) нужно положить $\gamma(t) = 0$. Поэтому

$$p^*(x,\ t) = \frac{H(t)}{\pi R}\sqrt{a^2(t) - x^2} \tag{4.5}$$

где $a^2(t)$ определяется из уравнения (2.11):

$$a^2(t) = 2P(t)\,R\,/\,H(t) \tag{4.6}$$

Отсюда следует формула (4.7)

$$p^*(x,\ t) = \frac{H(t)}{\pi R}\sqrt{\frac{2RP(t)}{H(t)} - x^2}$$

На фиг. 1 представлены вычисленные по этим формулам эпюры напряжений в месте контакта двух бетонных тел (задача симметричная), обладающих следующими характеристиками деформативных свойств:

$$E^1(t) = E_2(t) = E = 2\cdot 10^5 = \mathrm{const}, \qquad C_1 = C_2 = 0.90\cdot 10^{-5},$$

$$A_2 = A_3 = 4.82\cdot 10^{-5},\ \gamma = 0.026, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{6}.$$

Кривая *1* соответствует упруго-мгновенной задаче, кривые *2*, *3*, *4* соответствуют значениям $\tau_1 = 360$, 28.7 дней при $t = \infty$.

Поверхности контакта не имеют особых точек и удовлетворяют условию $f_0(x) = x^2/2R$, причем $R = 1000$ см, $P(t) = 100$ кг/см $=$ const.

5. Рассмотрим теперь влияние ползучести на напряжения под подошвой ленточного внецентренно-нагруженного фундамента. Раскладывая приложенную нагрузку на симметричную и кососимметричную, можем учесть влияние симметричной нагрузки по формуле (4.4). Решение упруго-мгновенной задачи в случае кососимметричной нагрузки согласно результатам[5] может быть представлено формулой

$$p(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^a \frac{u}{\sqrt{u^2 - x^2}}\int_0^u \frac{f_{0-}'(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}}\,ds\,du \tag{5.1}$$

Решение задачи с учетом ползучести сслажняется тем, что здесь необходимо принять $f_{0-}(x,\ t) = xk(t)$, где $k(t)$ — угол поворота фундамента, зависящий от времени, в силу чего в (2.7) $f_{0-}(x) = x$, а $H(t)$ есть решение интегрального уравнения (2.3) при правой части, равной $k(t)/\vartheta(t)$. Учитывая (2.8) и (5.1), можно записать

$$p^*(x,\ t) = H(t)\,\frac{2}{\pi^2}\int_x^a \frac{u}{\sqrt{u^2 - x^2}}\int_0^u \frac{f_{0-}'(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}}\,ds\,du \tag{5.2}$$

Подставив сюда значение $f_{0-}(x)$ после интегрирования, получим

$$p^*(x, t) = -\frac{k(t)\,H(t)}{\pi}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{5.3}$$

Величину $k(t)$ можно связать моментом внешних сил формулой

$$M(t) = \frac{2H(t)}{\pi}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, f'_{0-}(s, t)\, ds \tag{5.4}$$

получаемой из (5.2). Отсюда

$$M(t) = \tfrac{1}{2}\, a^2 H(t)\, k(t), \qquad k(t) = \frac{2M(t)}{a^2 H(t)} \tag{5.5}$$

Тогда из (5.3) следует

$$p^*(x, t) = -\frac{2M(t)}{\pi a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{5.6}$$

Прибавив сюда влияние симметричной нагрузки согласно (4.4), найдем окончательно

$$p^*(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\left[P(t) - \frac{2M(t)}{a^2}x\right] \tag{5.7}$$

Эта формула справедлива при $p^*(x, t) > 0$, т. е. при $M(t) < {}^1/_2\, P(t)\, a$.

Этот результат показывает, что ползучесть не оказывает влияния на распределение напряжений под подошвой фундамента, если грунт основания удовлетворяет предпосылкам теории ползучести Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна (см. [6]), т. е. что здесь справедливо равенство

$$p^*(x, t) = p(x, t) \tag{5.8}$$

Равенствами (1.6) и (5.8) подтверждается правильность в этом случае определения осадки сооружений во времени по начальной эпюре напряжений при однородном грунте основания. Угол поворота фундамента с учетом ползучести определяется зависимостью (5.5), причем $H(t)$ может быть получено из интегрального уравнения

$$\left[\frac{D_1(t)}{E_1(t)} + \frac{D_2(t)}{E_2(t)}\right] H(t) - \\ - \int_{\tau_1}^{t} \left[D_1(t, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t, \tau) + D_2(t, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_2(t, \tau)\right] H(\tau)\, d\tau = \frac{2M(t)}{a^2 H(t)} \tag{5.9}$$

Поступила 20 VIII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Г. Н. Термонапряженное состояние в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Известия НИИГ, т. 28, 1941.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
4. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953
5. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, т. 100, № 3, 1955.
6. Месчан С. Р. К вопросу ползучести связных грунтов. Известия АН Арм. ССР, физ.-мат. естественные и техн. науки, т. VII, вып. 6, 1954.