ОДНА КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

И. С. Малютин

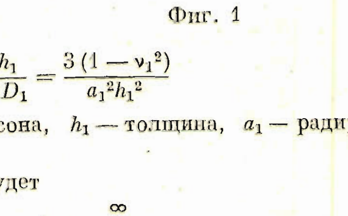
(Москва)

Рассмотрим две надетые одна на другую без зазора круговые цилиндрические оболочки, толщины и материалы которых в общем случае различны. К одной из оболочек (для определенности будем считать — к внешней) приложено кольцевое, равномерно распределенное сосредоточенное давление интенсивности P (фиг. 1). Оболочки предполагаем простирающимися в обе стороны от нагрузки до бесконечности и взаимодействующими без трения. Задача состоит в определении контактного давления q между оболочками в тех случаях, когда они контактируют по всей длине.

Пусть x — координата вдоль образующей, отсчитываемая от сечения приложения внешней нагрузки. Величины, относящиеся к внешней оболочке, будем отмечать индексом 1, а относящиеся к внутренней оболочке — индексом 2.

Внешняя оболочка находится под действием кольцевого давления P и нагрузки $q(x)$, которая может включать (и, как окажется, действительно включает) и сосредоточенные факторы. Прогиб, вызванный кольцевым давлением, как известно [1], определяется формулой

$$u = \frac{Pe^{-\beta_1|x|}}{8\beta_1^3 D_1}(\sin\beta_1|x| + \cos\beta_1|x|) = \frac{P}{8\beta_1^3 D_1}\varphi(\beta_1|x|)$$



Фиг. 1

Здесь

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}, \qquad \beta_1^4 = \frac{E_1 h_1}{4a_1^2 D_1} = \frac{3(1-\nu_1^2)}{a_1^2 h_1^2}$$

где E_1 — модуль упругости, ν_1 — коэффициент Пуассона, h_1 — толщина, a_1 — радиус оболочки.

Прогиб, вызванный нагрузкой $q(x) = q(-x)$, будет

$$v = \frac{1}{8\beta_1^3 D_1}\int_{-\infty}^{\infty} q(\xi)\varphi(\beta_1|x-\xi|)\,d\xi \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{8\beta_1^3 D_1}\int_{-\infty}^{\infty} q(x-\xi)\varphi(\beta_1|\xi|)\,d\xi$$

Общий прогиб внешней оболочки $w_1 = u - v$. Прогиб внутренней оболочки будет

$$w_2 = \frac{1}{8\beta_2^3 D_2}\int_{-\infty}^{\infty} q(x-\xi)\varphi(\beta_2|\xi|)\,d\xi$$

Условие $w_1 = w_2$ дает интегральное уравнение (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x-\xi)\psi(|\xi|)\,d\xi = u(|x|) \qquad \left(\psi(\xi) = \frac{1}{8\beta_1^3 D_1}\varphi(\beta_1\xi) + \frac{1}{8\beta_2^3 D_2}\varphi(\beta_2\xi)\right)$$

Это интегральное уравнение легко решается путем применения операционного исчисления на основе двустороннего преобразования Лапласа [2]. Введем операционные соотношения для функций, входящих в уравнение (1):

$$q(x) \doteqdot Q(s), \qquad \psi(|x|) \doteqdot \Psi(s), \qquad u(|x|) \doteqdot U(s)$$

Учитывая, что левая часть уравнения (1) является складкой функций $q(x)$ и $\psi(,|x|)$ и переходя в (1) к изображениям, получаем

$$Q(s) = \frac{s\,U(s)}{\Psi(s)}$$

При этом предполагается, что функции $q(x)$, $\psi(|x|)$ и $u(|x|)$ имеют общую полосу сходимости. Для изображений $U(s)$ и $\Psi(s)$ имеем

$$U(s) = s\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} u(|x|)\,dx = \frac{P}{8\beta_1^3 D_1}\, s\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\varphi(\beta_1|x|)\,dx =$$

$$= \frac{P}{8\beta_1^3 D_1}\, s\left[\int_0^{\infty} e^{-(s+\beta_1)x}(\sin\beta_1 x + \cos\beta_1 x)\,dx + \int_0^{\infty} e^{-(\beta_1 - s)x}(\sin\beta_1 x + \cos\beta_1 x)\,dx\right]$$

Как видно из этого выражения, полосой сходимости функции $u(|x|)$ будет $-\beta_1 < \operatorname{Re} s < \beta_1$. Вычисляя интегралы, находим

$$U(s) = \frac{P}{D_1}\,\frac{s}{s^4 + 4\beta_1^4}, \qquad \Psi(s) = \frac{1}{D_1}\,\frac{s}{s^4 + 4\beta_1^4} + \frac{1}{D_2}\,\frac{s}{s^4 + 4\beta_2^4}$$

Указанное здесь выражение для $\Psi(s)$ получается аналогично, причем полоса сходимости функции $\psi(|x|)$ определяется неравенством $-\beta < \operatorname{Re} s < \beta$, где β есть наименьшее из значений β_1 и β_2.

Изображение искомой функции будет

$$Q(s) = PD_2 s\,\frac{s^4 + 4\beta_2^4}{D_1(s^4 + 4\beta_1^4) + D_2(s^4 + 4\beta_2^4)}$$

или

$$Q(s) = \frac{PD_2}{D_1 + D_2}\left[s - 4\,\frac{D_1(\beta_1^4 - \beta_2^4)}{D_1 + D_2}\,\frac{s}{s^4 + 4k^4}\right] \qquad \left(k^4 = \frac{\beta_1^4 D_1 + \beta_2^4 D_2}{D_1 + D_2}\right)$$

Переходя к оригиналу, находим

$$q(x) = \frac{PD_2}{D_1 + D_2}\left[\delta(x) - \frac{1}{2k^3}\,\frac{D_1(\beta_1^4 - \beta_2^4)}{D_1 + D_2}\,\varphi(k|x|)\right] \tag{2}$$

Здесь $\delta(x)$ — импульсивная функция.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденная функция действительно удовлетворяет исходному интегральному уравнению. Как видно из выражения (2), контактное давление состоит из кольцевой сосредоточенной нагрузки интенсивности $PD_2/(D_1 + D_2)$ и распределенной нагрузки. При этом, поскольку имеются области, где $q < 0$, то для справедливости полученного решения необходимо допустить наличие или сцепления между оболочками, или предварительного натяга такой величины, чтобы суммарное контактное давление было положительным. В последнем случае формула (2) определяет дополнительную контактную нагрузку, накладывающуюся на давление, возникшее за счет натяга.

Поступила 23 I 1956.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
2. Ван дер Поль Б. и Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. ИЛ, 1952.