Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

М. Н. Коган

(Москва)

Пространственные сверхзвуковые течения обладают рядом интегральных свойств, которые позволяют установить аналогию с плоскими течениями и сделать ряд качественных выводов, а также упростить расчет обтекания некоторых классов крыльев [1]. Пусть в пространстве x, y, z имеется область возмущенного движения, отделенная от невозмущенного потока, текущего со сверхзвуковой скоростью V вдоль оси x, характеристической поверхностью. Назовем интегралом от некоторой функции $A(x, y, z)$ функцию

$$A^*(x, z) = \int A(x, y, z)\, dy \qquad (1)$$

где интегрирование ведется вдоль линий, упирающихся в упомянутую характеристическую поверхность.

Теорема 1. Интеграл от возмущенной скорости u (направленной вдоль оси x) и интеграл от возмущенной скорости w (вдоль оси z) связаны между собой так же как соответствующие скорости в плоском потоке.

Доказательство. Линеаризованные уравнения сверхзвукового движения газа имеют вид:

$$\beta^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (\beta^2 = M^2 - 1) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (3)$$

Беря указанным выше образом интеграл от (2) и второго уравнения (3), получим

$$\beta^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial w^*}{\partial z} = \left(\beta^2 u \frac{\partial y}{\partial x} + v - w \frac{\partial y}{\partial z}\right)\Bigg|_1^2 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z} - \frac{\partial w^*}{\partial x} = \left(u \frac{\partial y}{\partial z} - w \frac{\partial y}{\partial x}\right)\Bigg|_1^2 \qquad (5)$$

Значения стоящих в правой части скобок берутся на характеристической поверхности. Легко проверить, что эти скобки равны нулю так как являются условиями разрыва на характеристической поверхности. Поэтому имеем

$$\beta^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u^*}{\partial z} - \frac{\partial w^*}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

Уравнения (6) представляют собой не что иное как уравнения плоского течения.

На характеристической поверхности либо $u^* = w^* = 0$, либо $u^* = -\beta^{-1} w^*$. Поэтому по аналогии с плоскими течениями можем сразу записать решение уравнений (6) в виде

$$u^* = -\beta^{-1} w^* \qquad (7)$$

что и требовалось.

Следствие 1. Если перпендикулярное потоку сечение крыла (расположенного вблизи плоскости $z = 0$) упирается в характеристическую поверхность, отделяющую область возмущенного течения, то подъемная сила этого сечения полностью определяется распределением местных углов атаки в этом сечении и не зависит от других частей крыла.

Подъемная сила C_y этого сечения шириной dx согласно (7) равна

$$dC_y = \frac{4}{\beta S}\, dx \int \alpha(x, y)\, dy \tag{8}$$

где $\alpha(x, y)$ — распределение местных углов атаки и S — площадь крыла.

Если крыло имеет произвольную сверхзвуковую переднюю и заднюю кромку, перпендикулярную набегающему потоку, то, пользуясь формулой (8), легко написать выражение для подъемной силы и продольного момента этого крыла.

Следствие 2. Так как в плоскости $z = 0$ вне крыла $u = 0$, то и $u^* = w^* = 0$. Тогда u^* и w^* равны нулю во всей области, расположенной вниз по потоку от самой задней точки (b, c, O) произвольного крыла и вырезаемой характеристическими плоскостями $z = \pm (x - b) / \beta$. Поэтому если в этой области за произвольным крылом расположить другое крыло с перпендикулярными потоку передней и задней кромками и упирающееся в характеристическую поверхность, то подъемная сила и продольный момент этого второго крыла будут теми же, что и в невозмущенном потоке.

Следствие 3. Из крыльев с произвольной сверхзвуковой передней кромкой и задней кромкой, перпендикулярной потоку, являющихся кусками произвольных цилиндрических поверхностей с образующими, перпендикулярными потоку, плоское крыло обладает минимальным индуктивным сопротивлением. Сопротивление C_x подобного крыла, очевидно, равно

$$C_x = \frac{1}{S} \int_0^B \alpha^2(x)\,[y_2(x) - y_1(x)]\, dx$$

Решение простейшей изопериметрической задачи доказывает справедливость сделанного утверждения.

Теорема 2. Между функциями $(uy)^*$ и $(wy)^*$ существует такая же связь, как между u и w в плоском потоке.

Доказательство. Умножим (2) и второе из уравнений (3) на y и проинтегрируем их. Тогда совершенно так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим, учитывая условия разрыва на характеристической поверхности:

$$\beta^2 \frac{\partial (uy)^*}{\partial x} - \frac{\partial (wy)^*}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial (wy)^*}{\partial x} - \frac{\partial (uy)^*}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

Откуда, учитывая граничные условия на характеристической поверхности, имеем

$$(uy)^* = - \beta^{-1} (wy)^* \tag{10}$$

Следствие 4. Момент, создаваемый антисимметричным относительно плоскости $y = 0$ распределением местных углов атаки (элеронами), полностью определяется формой элеронов и их расположением относительно плоскости симметрии и не зависит от формы крыла, если характеристические поверхности, ограничивающие область, возмущенную элеронами, не пересекают передней кромки крыла и задняя кромка перпендикулярна потоку.

Следствие 5. Момент действует только на перпендикулярные потоку полоски крыла, пересекающие элероны, и величина его зависит лишь от распределения местных углов атаки в данной полоске.

Поступила 19 IV 1956

ЛИТЕРАТУРА

1 Коган М. Н. Некоторые интегральные свойства сверхзвуковых течений. Труды ЦАГИ, № 687, 1955.