Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Ю. И. Красильников

(Саратов)

Задача о неустановившемся движении вязкой жидкости в круглой трубе была исследована еще в прошлом столетии И. С. Громекой [1]. Громека получил решение поставленной задачи в общем случае и рассмотрел некоторые частные случаи.

Интересно изучить неустановившееся движение вязко-пластической жидкости в круглой трубе. Такое движение имеет место при течении глинистых растворов, которые применяются при бурении скважин, по трубам, а также при движении нефти по трубопроводам при температурах, близких к застыванию. В данной работе и дано обобщение метода, предложенного Громекой, на изучение движения вязко-пластической жидкости.

Дифференциальные уравнения движения вязко-пластического материала были получены Г. Генки [2]. Вязко-пластический материал при его течении рассматривается частью как изотропное упругое тело с заданным пределом текучести, частью как несжимаемая вязкая жидкость. Полагается, что тензор напряжения поверхностных сил слагается из двух тензоров: тензора упругих сил и тензора вязких сил. На компоненты тензора упругих сил налагается условие пластичности. Вся область течения распадается на две области. Первая область — область средней части, где действуют только упругие силы. Вторая область — пограничный слой, где действуют вязкие и упругие силы. Первая область движется как твердое тело, а во второй имеется сложное распределение скоростей.

Вид дифференциальных уравнений движения, полученных Генки [1] с учетом всех сил, действующих на жидкость, есть

$$\frac{du}{dt}=F_x+\frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\partial p}{\partial x}+(\mu+\lambda)\,\Delta u+2\varepsilon_x\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\gamma_{xy}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\lambda_{xz}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{dv}{dt}=F_y+\frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\partial p}{\partial y}+(\mu+\lambda)\,\Delta v+\gamma_{yx}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+2\varepsilon_y\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\gamma_{yz}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right\}$$

$$\frac{dw}{dt}=F_z+\frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\partial p}{\partial z}+(\mu+\lambda)\,\Delta w+\gamma_{zx}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\gamma_{zy}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+2\varepsilon_z\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right\}\qquad(0.1)$$

$$\lambda=\frac{2k}{\sqrt{3}}\left\{2\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2\right)+\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2\right\}^{-1/2},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Здесь в первых трех уравнениях в левой части имеется полная производная по времени, u, v, w — проекции скорости на оси координат, F_x, F_y, F_z — проекции массовой силы на оси координат, ρ — плотность жидкости, p — гидростатическое давление, μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент пластичности, $2k$ — предельное растягивающее (сжимающее) напряжение при одноосном напряженном состоянии.

Уравнения (0.1) в случае прямолинейного, осесимметричного движения в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left[\mu\Delta u+\frac{2k}{\sqrt{3}}\frac{1}{r}\right]$$

$$u=u(r,t),\qquad p=p(x,t)\qquad\left(\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\qquad(0.2)$$

причем жидкость движется вдоль оси x и массовые силы не учитываются.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим прямолинейное, осесимметричное движение вязко-пластической жидкости в круглой цилиндрической трубе. Обозначим радиус трубы через a, примем ось трубы за ось x. Течение считаем горизонтальным. Массовыми силами пренебрегаем, ибо они малы по сравнению с силами вязкости, упругости и инерции. Решаем задачу в цилиндрических координатах. Тогда в этом случае мы должны решать уравнения (0.2). Положив для сокращения $\mu / \rho = m^2$, представим уравнение (0.2) в таком виде:

$$\frac{\partial u}{dt} - m^2 \Delta u - \frac{2k}{\sqrt{3}\rho} \frac{1}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.1}$$

Но так как u зависит только от r и t, а p зависит от x и t, то это равенство возможно только тогда, когда правая и левая части зависят от одного t. Следовательно, поэтому

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \omega(t), \qquad -\frac{p}{\rho} = \omega(t)\, x + \chi(t) \tag{1.2}$$

Функции $\omega(t)$ и $\chi(t)$ будут определены, если предположим, что в двух поперечных сечениях трубы (в концах ее) давления p_0 и p_1 в известный промежуток времени, от $t = 0$ до $t = T$, суть данные функции времени. Обозначив через L расстояние между этими сечениями (длину трубы), приняв начало координат в первом сечении и направив ось x ко второму, будем иметь

$$\omega(t) = \frac{p_0 - p_1}{\rho L}, \qquad \chi(t) = -\frac{p_0}{\rho}$$

Итак, скорость u в каждой точке внутри трубы и в течение всего промежутка времени T должна удовлетворять следующему уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega(t) + m^2 \Delta u + \frac{2k}{\sqrt{3}\rho} \frac{1}{r} \tag{1.3}$$

Но мы решаем краевую задачу, поэтому к этому уравнению (1.3) мы должны добавить начальное и граничное условия. Жидкость вязкая, и граничное условие есть

$$u = 0 \qquad \text{при} \quad r = a \tag{1.4}$$

В начале движения, при $t = 0$, скорость u должна иметь в каком-либо поперечном сечении трубы данное распределение. Это дает нам начальное условие

$$u = F(r) \qquad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.5}$$

где функция $F(r)$ — ограниченная, непрерывная и согласная с условием (1.4) произвольно заданная.

§ 2. Решение задачи. 1°. Применяя метод, которым пользовался Громека [2], положим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \omega(t)\, dt = m^2 \gamma, \qquad \omega(t) = m^2 \gamma + \psi(t) \tag{2.1}$$

где $\psi(t)$ будет известная функция времени, удовлетворяющая равенству

$$f(T) = 0 \qquad \left(\int_0^t \psi(t)\, dt = f(t) \right) \tag{2.2}$$

Положим

$$u = S + f(t) + \frac{\gamma}{4}(a^2 - r^2) + \frac{2k}{\sqrt{3}\mu}(a - r) \tag{2.3}$$

Тогда функция S будет удовлетворять краевой задаче

$$\frac{\partial S}{\partial t} = m^2 \Delta S \qquad (\, 0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T \,) \tag{2.4}$$

$$S = -f(t) \qquad (\, r = a,\ 0 \leqslant t \leqslant T \,) \tag{2.5}$$

$$S = F(r) - \frac{\gamma}{4}(a^2 - r^2) - \frac{2k}{\sqrt{3}\mu}(a - r) \qquad (\, 0 \leqslant r \leqslant a,\ t = 0 \,) \tag{2.6}$$

2°. Воспользуемся частным решением уравнений (2.4) и (2.5)

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{[U_0(\alpha a)]^2 + [V_0(\alpha a)]^2} \cos\frac{n\pi t}{T} \{V_0(\alpha a)\, U_0(\alpha r) - U_0(\alpha a)\, V_0(\alpha r)\} - \tag{2.7}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{[U_0(\alpha a)]^2 + [V_0(\alpha a)]^2} \sin\frac{n\pi t}{T} \{U_0(\alpha a)\, U_0(\alpha r) + V_0(\alpha a)\, V_0(\alpha r)\} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{n\pi}{T}}\right)$$

Функция $f(t)$ полагается разложенной в тригонометрический ряд

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi t}{T}$$

Функции $U_0(\alpha r)$ и $V_0(\alpha r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 U_0(\alpha z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dU_0(\alpha z)}{dz} + \alpha^2 V_0(\alpha z) = 0, \qquad \frac{d^2 V_0(\alpha z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dV_0(\alpha z)}{dz} - \alpha^2 U_0(\alpha z) = 0 \tag{2.8}$$

и они суть

$$U_0(z) = 1 - \frac{z^4}{2^4(2!)^2} + \frac{z^8}{2^8(4!)^2} - \cdots, \qquad V_0(z) = \frac{z^2}{2^2(1!)^2} - \frac{z^6}{2^6(3!)^2} + \frac{z^{10}}{2^{10}(5!)^2} - \cdots \tag{2.9}$$

Сходимость ряда (2.7) доказывается при помощи асимптотических представлений функций Бесселя и доказана Громекой [2]. Заметим, что

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{V_0(\alpha a)\, U_0(\alpha r) - U_0(\alpha a)\, V_0(\alpha r)}{[U_0(\alpha a)]^2 + [V_0(\alpha a)]^2} = \Pi(r) \qquad \text{при } t = 0 \tag{2.10}$$

3°. Представим искомую функцию S, удовлетворяющую уравнениям (2.4), (2.5) (2.6), в виде суммы $S = S_1 + S_2$, где S_1 определена согласно (2.7). Тогда функция S_2 должна удовлетворять уравнению (2.4) при условии

$$S_2 = 0 \qquad (r = a,\ 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.11}$$

$$S_2 = F(r) - \Pi(r) - \frac{\gamma}{4}(a^2 - r^2) - \frac{2k}{\sqrt{3}\,\mu}(a - r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant a,\ t = 0) \tag{2.12}$$

Эти уравнения легко решаются по известным правилам. Возьмем в качестве частного интеграла уравнения (2.4) выражение

$$S_0 = R(r) \exp\left(-\frac{q^2 m^2 t}{a^2}\right)$$

в котором q — некоторая постоянная, a — радиус трубы, R — функция одного r. Тогда находим, что R должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\frac{q}{a}\right)^2 R = 0$$

А так как при $r = 0$ функция R не должна обращаться в бесконечность, то решение этого уравнения есть

$$R = CJ_0\left(\frac{q}{a} r\right)$$

где C — произвольная постоянная. Если сюда присоединить граничное условие (2.11), то мы получим, что $CJ_0(q) = 0$, а так как $C \neq 0$, то на стенках трубы должно выполняться условие $J_0(q) = 0$, т. е. q должно быть одним из корней трансцендентного уравнения $J_0(t) = 0$. Отправляясь от такого частного интеграла, представим решение уравнения (2.4) в виде ряда Фурье — Бесселя

$$S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0\left(q_i \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) \tag{2.13}$$

в котором $q_1, q_2, \ldots$ — расположенные в порядке возрастающих величин корни трансцендентного уравнения $J_0(t) = 0$, а постоянные коэффициенты определены формулой

$$C_i = \frac{2}{J_1^2(q_i)} \int_0^1 \Phi(\rho a)\, J_0(q_i \rho)\, \rho\, d\rho \tag{2.14}$$

где

$$\Phi(\rho a) = F(\rho a) - \Pi(\rho a) - \frac{\gamma}{4} a^2 (1-\rho^2) - \frac{2k}{\sqrt{3}\mu} a(1-\rho) \tag{2.15}$$

Сходимость ряда (2.13) может быть доказана на основании того, что $\Phi(\rho a)$, как это следует из ранее сделанных предположений, внутри круга $\rho = 1$ остается ограниченной, однозначной и по отношению к ρ может быть в этих пределах проинтегрирована. Заметим, что между всеми корнями q_i нет ни одного, равного нулю. Отсюда следует, что функция S_2 при возрастании времени приближается к нулю.

4°. Теперь подготовлено все необходимое для решения задачи, изложенной в пункте 1°. Скорость движения жидкости в каждой точке внутри трубы для t в промежутке от $t = 0$ до $t = T$ определяется согласно (2.3) уравнением

$$u = S_1 + S_2 + f(t) + \frac{\gamma}{4} a^2 (1-\rho^2) + \frac{2k}{\sqrt{3}\mu} a(1-\rho) \tag{2.16}$$

вместе с уравнениями (2.7) и (2.13).

5°. Ряд (2.13) содержит постоянные коэффициенты C_i. Из (2.14) и (2.15) видно, что каждый коэффициент C_i содержит три слагаемых, из которых одно зависит от начального распределения скоростей, другое от закона, по которому изменяется давление, а третье от свойства самой жидкости, т. е. от ее предела текучести.

Вычислим эти коэффициенты C_i, т. е. выполним все указанные интегрирования. Сделав подстановку $q_i\rho = t$, учитывая, что q_i есть корень уравнения $J_0(t) = 0$, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^1 (1-\rho^2) J_0(q_i\rho)\rho\, d\rho = \frac{4}{q_i^3} J_1(q_i), \qquad \int_0^1 (1-\rho) J_0(q_i\rho)\rho\, d\rho = \frac{1}{q_i^3}\int_0^{q_i} J_0(t)\, dt$$

На основании уравнений (2.8) пункта 2° найдем, что

$$\int_0^1 U_0(\alpha a\rho) J_0(q_i\rho)\rho\, d\rho = \frac{[q_i^2 U_0(\alpha a) + \alpha^2 a^2 V_0(\alpha a)]}{q_i^4 + \alpha^4 a^4} q_i J_1(q_i)$$

$$\int_0^1 V_0(\alpha a\rho) J_0(q_i\rho)\rho\, d\rho = \frac{[q_i^2 V_0(\alpha a) - \alpha^2 a^2 U_0(\alpha a)]}{q_i^4 + \alpha^4 a^4} q_i J_1(q_i)$$

Отсюда на основании (2.10) найдем, что

$$\int_0^1 \Pi(\rho a) J_0(q_i\rho)\rho\, d\rho = a^2 q_i J_1(q_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \alpha^2}{q_i^4 + \alpha^4 a^4}$$

При помощи этих равенств найдем

$$C_i = \frac{2}{J_1^2(q_i)} \int_0^1 F(\rho a) J_0(q_i\rho)\rho\, d\rho - \frac{2q_i a^2}{J_1(q_i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n\alpha^2}{q_i^4 + \alpha^4 a^4} -$$

$$- \frac{2\gamma a^2}{q_i^3 J_1(q_i)} - \frac{2k}{\sqrt{3}\mu}\, \frac{2a}{q_i^3 J_1^2(q_i)} \int_0^{q_i} J_0(t)\, dt \tag{2.17}$$

§ 3. Частный случай. Пусть давление не зависит от времени, т. е. разность давлений $p_0 - p_1$ постоянна. Считаем, что в начальный момент жидкость находится в покое, т. е. $F(\rho a) = 0$. Тогда в этом случае функции $\omega(t) = m^2\gamma$, $\psi(t) = 0$. Следовательно, функции $f(t)$, S_1, $\Pi(r)$ в этом случае уничтожаются. Время T может быть принято бесконечным, а постоянное

$$\gamma = \frac{p_0 - p_1}{\mu L} = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \tag{3.1}$$

Движение жидкости в этом случае определяется уравнением

$$u = \frac{p_0 - p_1}{4\mu L} a^2 (1-\rho^2) + \frac{2k}{\sqrt{3}\mu} a(1-\rho) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(q_i\rho) \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) \tag{3.2}$$

где C_i на основании (2.17) будут

$$C_i = -\frac{2\gamma a^2}{q_i^3 J_1(q_i)} - \frac{2k}{\sqrt{3}\mu} \frac{2a}{q_i^3 J_1^2(q_i)} \int_0^{q_i} J_0(t)\,dt \tag{3.3}$$

Видно, что эти коэффициенты имеют размерность скорости. Это движение очень быстро с течением времени становится установившимся, а именно

$$u = \frac{p_0 - p_1}{4\mu L} a^2 (1 - \rho^2) + \frac{2k}{\sqrt{3}\mu} a (1 - \rho) \tag{3.4}$$

Формула (3.4) и дает распределение скоростей для стационарного движения вязко-пластической жидкости в круглой трубе.

Но по условию пластичности невозможно, чтобы пластическая деформация распространялась до $r = 0$, а поэтому должен существовать радиус $r_0 < a$, начиная от которого пластический материал будет продвигаться через трубу как твердое тело (как ядро). Ясно, что на границе ядра вязкое напряжение обращается в нуль, поэтому радиус ядра находится из условия

$$\frac{\mu}{a} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 \tag{3.5}$$

Для установившегося движения радиус ядра будет

$$\rho_0 = \frac{2\tau_0}{a\, dp / dx} \qquad \left(\tau_0 = \frac{2k}{\sqrt{3}}\right) \tag{3.6}$$

Важно установить, как меняется радиус ядра в зависимости от времени для неустановившегося движения. Исходя из условия (3.5), имеем для нашего случая

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} a\rho_1 - \tau_0 - \frac{\mu}{a} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i J_1(q_i \rho_1) \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Здесь ρ_1 — текущий радиус ядра, C_i определяются формулой (3.3). Уравнение (3.7) является трансцендентным. Найдены значения ρ_1 в первом приближении для малых и больших времен.

При t, очень близких к нулю:

$$\rho_1 \approx 1, \ \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) = 1 - \frac{q_i^2 m^2}{a^2} t + \cdots$$

Пренебрегая малыми второго порядка, мы из (3.7) получим для очень малых t

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} a\rho_1 = \tau_0 + \frac{\mu}{a} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i J_1(q_i) \left(1 - \frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) \tag{3.8}$$

Отсюда

$$\rho_{10} = \rho_0 + \frac{2}{a\, dp / dx} \left(\frac{\mu}{a} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i J_1(q_i) - t \frac{\mu}{a} \frac{m^2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i^3 J_1(q_i) \right) \tag{3.9}$$

Формула (3.9) определяет радиус ядра в первом приближении для t очень малых. Наоборот, $\rho_1 \to \rho_0$ при $t \to \infty$. И мы можем положить, что при t, очень больших,

$$\rho_{1\infty} = \rho_0 + \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0 \text{ при } t \to \infty) \tag{3.10}$$

Вставляя (3.10) в уравнение (3.7), будем иметь для t, очень больших,

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} a(\rho_0 + \varepsilon) - \tau_0 - \frac{\mu}{a} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i J_1(q_i \rho_0 + q_i \varepsilon) \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) = 0$$

Разлагая функцию $J_1(q_i \rho_0 + q_i \varepsilon)$ в ряд Тейлора, пренебрегая малыми второго порядка и пользуясь соотношениями между бесселевыми функциями, получим

$$\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} a\rho_0 + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} a\varepsilon - \tau_0 - \frac{\mu}{a} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i J_1(q_i \rho_0) \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right) -$$

$$- \varepsilon \frac{\mu}{a} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i^2 \left[q_i J_0(q_i \rho_0) - \frac{J_1(q_i \rho_0)}{\rho_0} \right] \exp\left(-\frac{q_i^2 m_2 t}{a^2}\right) = 0 \tag{3.11}$$

Первое и третье слагаемые дают в сумме нуль. Тогда имеем

$$\varepsilon = \frac{\frac{\mu}{a}\sum_{i=1}^{\infty} C_i q_1) J\, q_{ii}\rho_0) \exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)}{\left\{\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}a - \frac{\mu}{a}\sum_{i=1}^{\infty} C_i q_i^2\left[q_1 J_0(q_i\rho_0) - \frac{J_1(q_i\rho_0)}{\rho_0}\right]\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)\right\}} \tag{3.12}$$

Формула (3.10) с учетом (3.12) определяет радиус ядра в первом приближении для t больших.

Остается вычислить расход жидкости. В общем случае расход будет очень сложной функцией времени. Для того чтобы вычислить расход жидкости, необходимо определить скорость ядра течения. В нашем случае скорость ядра течения будет определяться формулами

$$u_{10} = \frac{\gamma}{4}a^2(1-\rho_{10}^2) + \frac{\tau_0}{\mu}a(1-\rho_{10}) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(q_i\rho_{10})\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)$$

$$u_{1\infty} = \frac{\gamma}{4}a^2(1-\rho_{1\infty}^2) + \frac{\tau_0}{\mu}a(1-\rho_{1\infty}) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(q_i\rho_{1\infty})\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)$$

Так как ядро течения движется как твердое тело, то для расхода будем иметь

$$Q_{10} = \pi a^2\rho_{10}^2 u_{10} + 2\pi a^2\int_{\rho_{10}}^{1} u\rho\, d\rho, \qquad Q_{1\infty} = \pi a^2\rho_{1\infty}^2 u_{1\infty} + 2\pi a^2\int_{\rho_{1\infty}}^{1} u\rho\, d\rho \tag{3.13}$$

Вычисляя, получим

$$Q_{10} = \pi a^2\rho_{10}^2 u_{10} + 2\pi a^2\left\{\left[\frac{\gamma}{16}a^2 + \frac{\tau_0}{6\mu}a + \sum_{=1}^{\infty}\frac{C_i}{q_i}J_1(q_i)\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. -\left[\frac{\gamma a^2}{4}\left(\frac{\rho_{10}^2}{2} - \frac{\rho_{10}^4}{4}\right) + \frac{\tau_0}{\mu}a\left(\frac{\rho_{10}^2}{2} - \frac{\rho_{10}^3}{3}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{q_i}\rho_{10}J_1(q_i\rho_{10})\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)\right]\right\} \tag{3.14}$$

аналогично

$$Q_{1\infty} = \pi a^2\rho_{1\infty}^2 u_{1\infty} + 2\pi a^2\left\{\left[\frac{\gamma}{16}a^2 + \frac{\tau_0}{6\mu}a + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{q_i}J_1(q_i)\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. -\left[\frac{\gamma a^2}{4}\left(\frac{\rho_{1\infty}^2}{2} - \frac{\rho_{1\infty}^4}{4}\right) + \frac{\tau_0}{\mu}a\left(\frac{\rho_{1\infty}^2}{2} - \frac{\rho_{1\infty}^3}{3}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{q_i}\rho_{1\infty}J_1(q_i\rho_{1\infty})\exp\left(-\frac{q_i^2 m^2 t}{a^2}\right)\right]\right\} \tag{3.15}$$

Таким образом, в данной работе решена задача движения вязкопластической жидкости в круглой трубе. Получена формула распределения скоростей (2.16) для прямолинейного осесимметричного движения в случае, когда давление зависит от времени. Получены формулы (3.2), (3.3) для скорости в случае, когда давление не зависит от времени. Получены приближенные формулы (3.8), (3.9), (3.10), устанавливающие зависимость изменения ядра течения от времени.

Поступила 12 VI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И. С. Движение жидкости в узких цилиндрических трубках. Собрание сочинений. Изд. АН СССР, 1952.
2. Генки Г. О медленных стационарных течениях в пластических телах. Теория пластичности (Сборник статей под редакцией Ю. Н. Работнова), 1948.