Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Определение периодических режимов в нелинейных динамических системах, которые отличаются от линейных наличием одной кусочно-линейной характеристики, сводится к нахождению периодических решений системы уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} x_j + \rho_i y_1 \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{1.1}$$

где α и ρ — действительные числа, а $y_1 = f(x_1)$ — заданная кусочно-линейная характеристика.

Требуется составить уравнения периодов, позволяющие найти непрерывные периодические решения системы (1.1) заданного типа.

Перенумеруем цифрами $1, 2, \ldots$ бесконечные прямые, из отрезков которых составлена характеристика [1].

Тип периодического режима задается при помощи $2r$ чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$, $\sigma_0, \ldots, \sigma_{r-1}$, где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ — номера звеньев характеристики, указывающие порядок прохождения их во времени за один период (два несоседних числа $\varkappa$ могут быть и равными), а σ_g — то значение координаты x_1, при котором во время искомого режима совершается переход с прямой $\varkappa_g$ на прямую $\varkappa_{g+1}$. Предполагается, что этот переход происходит в тот момент, когда изображающая точка, перемещаясь вдоль g-й прямой, впервые достигает точки с абсциссой σ_g $(g = 0, 1, \ldots, r-1, \varkappa_0 = \varkappa_r)$.

Времена прохождения звеньев обозначим через $\tau_1, \ldots, \tau_r$; эти величины и их сумма — период T — являются искомыми и определяются из уравнений периодов, составлению которых в основном и посвящена эта работа.

Задача о составлении уравнений периодов в случае системы любого порядка решалась лишь для релейной характеристики [1–8,11].

Насколько известно авторам, лишь Ю. И. Неймарк в статье [11], находящейся в печати и выполненной независимо от настоящей работы, в качестве примера применения методов теории релейных систем при более сложных характеристиках получил методом припасовывания уравнения периодов для симметричного режима при трехзвенной ломаной характеристике.

---

[1] Предполагается, что характеристика $y_1 = f(x_1)$ не имеет звеньев, параллельных оси y_1. Этого всегда можно достигнуть, подвергнув плоскость x_1, y_1 аффинному преобразованию (см. § 5 этой работы).

В настоящей работе составляются уравнения периодов для общего случая системы с произвольной кусочно-линейной характеристикой и для периодических режимов любого типа. Это осуществляется в § 2 при помощи определенным образом нормированных фундаментальных решений линейных систем дифференциальных уравнений, которые получаются из системы (1.1) подстановкой в нее вместо $f(x_1)$ линейных функций, соответствующих звеньям характеристики.

В § 4 и 5 уравнение периодов составляется, исходя из уравнения

$$D(p)\,x_1 = K(p)\,f(x_1) \qquad \left(p = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.2}$$

где $D(p)$ и $K(p)$ — полиномы, которое получается исключением из системы (1.1) всех неизвестных функций, кроме x_1. Уравнение (1.2) в дальнейшем будем называть основным уравнением рассматриваемой динамической системы.

В связи с тем, что в рассматриваемой задаче хотя бы одна из функций $f(x_1)$ и $df(x_1)/dx_1$ разрывная (при $x_1 = \sigma_g$), задача должна быть доопределена «условиями скачков». Только при определенных разрывах решений $x_1(t)$ и ее производных основное уравнение (1.2) эквивалентно исходной системе (1.1). Эти «условия скачков» выводятся в § 3.

В § 5 подробно исследуется частный случай определения симметричных режимов в системах с трехзвенной ломаной характеристикой. Здесь вводится понятие об аффинно-эквивалентных системах, позволяющее любую трехзвенную характеристику заменить $\mathcal{J}$-характеристикой с конечным временем прохождения вертикального звена. При помощи частотных соображений уравнения периодов выражаются непосредственно через коэффициенты полиномов D и K.

§ 2. Составление уравнений периодов для системы (1.1). Для звена характеристики с номером $\varkappa_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$, имеющего уравнение $y_1 = \beta_k x_1 + \gamma_k$, система уравнения (1.1) имеет в матричной записи вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{l}_k \tag{2.1}$$

где [1]

$$\mathbf{A}_k = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} + \rho_1\beta_k & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1s} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{s1} + \rho_s\beta_k & \alpha_{s2} \ldots \alpha_{ss} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{l}_k = \begin{Vmatrix} \rho_1\gamma_k \\ \vdots \\ \rho_s\gamma_k \end{Vmatrix}$$

Наряду с системой (2.1) рассмотрим соответствующую однородную систему, в которой $\gamma_k = 0$.

В качестве фундаментальной системы решений этой однородной системы уравнений примем решения

$$z_{1j}^k(t), \quad z_{2j}^k(t), \ldots, z_{sj}^k(t) \qquad (j = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, r)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$z_{ij}^k(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, s)$$

[1] Предполагается, что все матрицы $\mathbf{A}_k$ — неособенные. Это всегда может быть достигнуто сколь угодно малым изменением коэффициентов α.

В этих обозначениях первый нижний индекс — номер неизвестной функции в системе (2.1), второй — номер решения в фундаментальной системе решений, а верхний индекс k — номер звена характеристики, к которому относится рассматриваемая система дифференциальных уравнений.

Из этих решений составим «фундаментальные матрицы»:

$$\mathbf{Z}_k = \| z_{ij}^k \|_{i,\, j=1}^s \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

Тогда решение системы (2.1), удовлетворяющее произвольным начальным условиям при $t = t_{k-1}$, имеет вид:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{s} z_{ij}^k (t - t_{k-1}) [x(t_{k-1}) - d_j^k] + d_i^k \qquad \begin{pmatrix} t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k \\ i = 1, \ldots, s; \; k = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

а постоянные d_j^k определяются из системы алгебраических линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} d_j^k + \rho_i (\beta_k d_1^k + \gamma_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{2.3}$$

В матричной записи

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Z}_k (t - t_{k-1}) [\mathbf{x}(t_{k-1}) - \mathbf{d}_k] + \mathbf{d}_k \qquad (t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k; \; k = 1, \ldots, r) \tag{2.4}$$

где столбец $\mathbf{d}_k = (d_1^k, \ldots, d_s^k)$ определяется из соотношения

$$\mathbf{A}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{l}_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.5}$$

Запишем теперь условия непрерывности координат при переходе с одного участка характеристики на другой, а также условие периодичности, т. е. совпадения значений в начале и в конце периода:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{Z}_k(\tau_k)\, \mathbf{x}(t_{k-1}) + [\mathbf{E} - \mathbf{Z}_k(\tau_k)]\, \mathbf{d}_k \qquad (k = 1, \ldots, r) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_r) \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{E} = \| \delta_{ij} \|_1^s$ — единичная матрица s-го порядка.

Выразив непосредственно столбец $\mathbf{x}(t_k)$ $(k = 1, \ldots, r)$ через $\mathbf{x}(t_0)$, получим

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{U}_k \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{v}_k \tag{2.7}$$

где

$$\mathbf{U}_k = \| u_{ij}^k \| = \mathbf{Z}_k(\tau_k)\, \mathbf{Z}_{k-1}(\tau_{k-1}) \ldots \mathbf{Z}_1(\tau_1) \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.8}$$

$$\mathbf{v}_k = \begin{Vmatrix} v_1^k \\ \vdots \\ v_s^k \end{Vmatrix} = \mathbf{d}_k + \mathbf{Z}_k(\tau_k)(\mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{d}_k) + \mathbf{Z}_k(\tau_k)\, \mathbf{Z}_{k-1}(\tau_{k-1})(\mathbf{d}_{k-2} - \mathbf{d}_{k-1}) + \cdots$$

$$\cdots + \mathbf{Z}_k(\tau_k)\, \mathbf{Z}_{k-1}(\tau_{k-1}) \ldots \mathbf{Z}_2(\tau_2)(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) - \mathbf{Z}_k(\tau_k)\, \mathbf{Z}_k(\tau_{k-1}) \ldots \mathbf{Z}_1(\tau_1)\, \mathbf{d}_1$$

Вспоминая, что $\mathbf{x}(t_r) = \mathbf{x}(t_0)$, из соотношения (2.7) при $k = r$ находим

$$[\mathbf{E} - \mathbf{Z}_r]\, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{v}_r \tag{2.9}$$

Кроме того, при заданном режиме должны выполняться условия $x_1(t_g) = \sigma_g$ $(g = 0, 1, \ldots, r - 1)$, которые в силу (2.7) можно записать так[1]:

$$x_1(t_0) = \sigma_0, \qquad \{\mathbf{U}_k \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{v}_k\}_1 = \sigma_k \qquad (k = 1, \ldots, r - 1) \tag{2.10}$$

Равенства (2.9) и (2.10) составляют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $x_j(t_0)$ $(j = 2, \ldots, s)$ (полагаем

[1] Через $\{\mathbf{b}\}_h$ обозначаем h-й элемент столбца $\mathbf{b}$.

всюду $x_1(t_0)=\sigma_0$) с коэффициентами, зависящими от искомых величин $\tau_1, \ldots, \tau_r$, которая в развернутой записи имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{s}(\delta_{ij}-u_{ij}{}^{r})\,x_j(t_0)=v_i{}^{r}+(u_{i1}{}^{r}-\delta_{i1})\,\sigma_0 \qquad (i=1,\ldots,s)\\
&\sum_{j=2}^{s}u_{1j}{}^{k}x_j(t_0)=\sigma_k-v_1{}^{k}-u_{11}{}^{k}\sigma_0 \qquad (k=1,\ldots,r-1)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Исключая линейно входящие неизвестные $x_j(t_0)$, находим r искомых уравнений периодов относительно $\tau_1, \ldots, \tau_r$ в виде приравненных нулю определителей s-го порядка:

$$\begin{vmatrix}
(u_{11}^{r}-1)\,\sigma_0+v_1^{r} & u_{12}^{r}\ldots u_{1s}^{r}\\
u_{21}^{r}\sigma_0+v_2^{r} & u_{22}^{r}-1\ldots u_{2s}^{r}\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
u_{s1}^{r}\sigma_0+v_s^{r} & u_{s2}^{r}\ldots u_{ss}^{r}-1
\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}
(u_{11}^{r}-1)\,\sigma_0+v_1^{r} & u_{12}^{r}\ldots u_{1,\,s-1}^{r} & u_{1s}^{r}\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\\
u_{s-1,1}^{r}\sigma_0+v_{s-1}^{r} & u_{s-1,\,2}^{r}\ldots u_{s-1,\,s-1}^{r}-1 & u_{s-1,\,s}^{r}\\
u_{11}^{k}\sigma_0+v_1^{k}-\sigma_k & u_{12}^{k}\ldots u_{1,\,s-1}^{k} & u_{1s}^{k}
\end{vmatrix}=0 \tag{2.12}$$

$$(k=1,\ldots,r-1)$$

Элементы определителей, фигурирующих в левых частях этих уравнений, выражаются (путем перемножения и сложения соответствующих матриц) через постоянные d_i^k [решения системы (2.3)] и через функции $z_{ij}^{k}(t)$, которые могут быть определены при помощи интегратора или выражены через корни характеристических уравнений, либо могут быть найдены каким-либо иным способом.

Если существуют положительные решения $\tau_1, \ldots, \tau_r$ уравнений периодов, то для каждого такого решения соответствующий режим задается формулой (2.2), где $x_j(t_{k-1})$ находятся из (2.7) и (2.10). Построив решение, надо проверить на любом k-м участке, что величина x_1 при $t_{k-1}<t<t_k$ содержится между пределами σ_{k-1} и σ_k, достигая этих пределов только на концах участка.

Рассмотрим теперь частный случай симметричного процесса.

Назовем периодический процесс с периодом $T=2T_1$ симметричным, если $x_i(t+T_1)\equiv -x_i(t)$ $(i=1,\ldots,s)$; симметричные процессы возможны только при следующих условиях: 1) r — четно $(r=2r_1)$; 2) звенья характеристики с номерами $\varkappa_i$ и $\varkappa_{r_1+i}$ получаются друг из друга зеркальным отображением относительно начала координат; 3) $\sigma_{r_1+i}=-\sigma_i$ $(i=0, 1,\ldots, r_1-1)$.

Для определения симметричного периодического режима достаточно найти $\tau_1, \ldots, \tau_{r_1}$, и поэтому число уравнений периодов равно r_1, т. е. вдвое меньше, нежели в несимметричном случае. Для составления этих уравнений периодов следует повторить все предыдущие рассуждения с заменой числа r на r_1 и равенств $x_i(t_r)=x_i(t_0)$ равенствами $x_i(t_{r_1})=-x_i(t_0)$. Это приводит к тому, что в равенстве (2.9) матрицу $\mathbf{E}$ следует заменить на $-\mathbf{E}$, а в окончательных уравнениях периодов (2.11) надо всюду r заменить на r_1 и -1 на $+1$.

§ 3. Основное уравнение и условия скачков. Исключим в системе (1.1) все x_j, кроме x_1. С этой целью, временно предполагая функцию $f(x_1)$ и ее производные непрерывными, последовательно почленно дифференцируем первое из уравнений системы (1.1), каждый раз заменяя производные от x_j их выражениями из (1.1). Получаемую так систему равенств дополним тождеством $x_1 \equiv x_1$. Имеем

$$x_1 \equiv x_1, \qquad p^j x_1 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i{}^j x_i + (\rho_1{}^j + \rho_2{}^j p + \cdots + \rho_j{}^j p^{j-1}) f(x_1)$$

$$\left(p = \frac{d}{dt}\right) \qquad (j = 1, \ldots, s) \tag{3.1}$$

Здесь α_i^k и ρ_i^k — постоянные, выражающиеся через коэффициенты системы (1.1). Если из линейных форм

$$f_k \equiv \sum_{i=1}^{s} \alpha_i{}^k x_i \qquad (k = 0, 1, \ldots, s;\ f_0 \equiv x_1) \tag{3.2}$$

первые n $(n \leqslant s)$ линейно независимы, а f_n линейно зависит от них:

$$a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_n f_0 \equiv 0 \qquad (f_0 \equiv x_1) \tag{3.3}$$

то, умножая почленно первые $n+1$ из равенств (3.1) соответственно на $a_n, \ldots, a_1, a_0$ и складывая получим, в силу (3.3)

$$D(p) x_1 = K(p) f(x_1) \tag{3.4}$$

где $D(p)$ и $K(p)$ — многочлены соответственно степеней n и m $(m < n)$. Из вывода уравнения (3.1) следует, что для достаточно гладкой $f(x_1)$ не только каждому решению исходной системы (1.1) соответствует решение основного уравнения (3.4), но и, наоборот, каждому решению уравнения (3.4) соответствует ∞^{s-n} решений исходной системы. Эти решения имеют одинаковые x_1 и отличаются функциями $x_2, \ldots, x_s$.

Вопрос осложняется, когда характеристика $y_1 = f(x_1)$ кусочно-гладкая. В этом случае для определения решения основного уравнения (3.4) необходимо знать не только начальные значения функций $x_1, px_1, \ldots, p^{n-1}x_1$, но и величины их разрывов.

Выразим эти разрывы через коэффициенты основного уравнения и заданную характеристику $y_1 = f(x_1)$.

С этой целью заменим в системе (1.1) оператор p оператором обобщенной производной p^*, определив его следующим образом:

$$p^* F(t) = pF(t) + \sum_{q} \xi_q \delta(t - t_q)$$

где $F(t)$ — кусочно-непрерывная функция с разрывами ξ_q в моменты t_q, производная $pF(t)$ понимается в обычном смысле, $\delta(t)$ — функция Дирака, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\delta(t)\,dt = h(0)$$

для любой достаточно гладкой функции $h(t)$.

Такая замена не меняет системы (1.1), так как в этой системе содержатся под знаком производной только непрерывные функции, а в этом случае операции p и p^* совпадают.

Из тождественного равенства двух кусочно-непрерывных функций следует равенство их обобщенных производных. Поэтому все указанные выше операции, связанные с исключением $x_2, \ldots, x_s$, сохраняются и при кусочно-гладкой характеристике, если всюду p заменено на p^*. В этом случае вместо (3.4) имеем

$$D(p^*)\,x_1 = K(p^*)\,y_1 \tag{3.5}$$

где

$$D(p^*) = a_0 p^{*n} + a_1 p^{*n-1} + \cdots + a_n$$
$$K(p^*) = b_0 p^{*n} + b_1 p^{*n-1} + \cdots + b_n$$

причем, при $m < n$ первые коэффициенты $b_0, \ldots, b_{n-m-1}$ — нули [1].

Обозначим через $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ и $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}$ соответственно разрывы функций $x_1, px_1, \ldots, p^{n-1}x_1$ и $y_1, py_1, \ldots, p^{n-1}y_1$ в какой-либо момент времени t_q. По определению оператора p^* имеем

$$p^* x_1 = p x_1 + \sum_q \xi_0 \delta(t - t_q)$$

$$p^{*2} x_1 = p^2 x_1 + \sum_q [\xi_0 \delta'(t - t_q) + \xi_1 \delta(t - t_q)]$$

. . . .

$$p^{*n} x_1 = p^n x_1 + \sum_q [\xi_0 \delta^{n-1}(t - t_q) + \xi_1 \delta^{(n-2)}(t - t_q) + \cdots + \xi_{n-1}\delta(t - t_q)]$$

где суммирование ведется по всем точкам разрыва. Аналогичные выражения можно написать для $p^* y_1, p^{*2} y_1, \ldots, p^{*n} y_1$.

Подставляя в (3.5) эти выражения для обобщенных производных и приравнивая слева и справа коэффициенты при δ, δ', δ'' и т. д., получаем уравнение $D(p)\,x_1 = K(p)\,y_1$ и дополнительно для каждого момента t_q при котором имеются разрывы, равенства

$$\begin{gathered} a_0\xi_0 = b_0\eta_0, \\ a_0\xi_1 + a_1\xi_0 = b_0\eta_1 + b_1\eta_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0\xi_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi_0 = b_0\eta_{n-1} + \cdots + b_{n-1}\eta_0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Эти равенства можно записать в следующей форме:

$$\xi_{i-1} = h_0\eta_{i-1} + h_1\eta_{i-2} + \cdots + h_{i-1}\eta_0 \qquad \left(h_0 = \frac{b_0}{a_0},\ h_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}, \ldots\right)$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

где $h_0, h_1, \ldots$ являются первыми n коэффициентами в разложении дроби $K(p)/D(p)$ в ряд по степеням $1/p$.

Равенства (3.6) будем называть далее условиями скачков [2].

Первое из этих равенств $a_0\xi_0 = b_0\eta_0$ показывает, что интересующий нас случай (функция x_1 непрерывна, и поэтому $\xi_0 = 0$) осуществляется, если: а) $m < n$ (т. е. $b_0 = 0$), б) $m = n$ и $\eta_0 = 0$, т. е. y_1 непрерывно.

---

[1] Из самого процесса исключения вытекало, что $m < n$. В этой работе далее будет использована замена переменных, при которой задача сводится к случаю $m = n$. Имея это в виду, условие скачков выводится в предположении $m \leqslant n$.

[2] Условия скачков можно получить, исходя и из операторного метода, но прямой путь представляется авторам более простым и естественным.

Поэтому в случае $m = n$ при разрывной характеристике (например, в релейных системах) возможны только решения с разрывной функцией $x_1(t)$.

Пользуясь соотношениями (3.6) и исходя из произвольных начальных условий, можно всегда однозначно определить решение уравнения (3.4).

Таким образом, если иметь в виду определение координаты x_1 как функции времени t, то исходная система (1.1) эквивалентна уравнению (3.5), в котором производная понимается в обобщенном смысле, либо же основному уравнению (3.4) с обычным оператором дифференцирования, но дополненному условиями скачков (3.6).

§ 4. Составление уравнения периодов для основного уравнения. Рассмотрим основное уравнение

$$D(p)x = K(p)y, \qquad y = f(x) \tag{4.1}$$

Здесь индексы x_1 и y_1 в прежнем смысле опускаются и пишутся просто x и y. Для дальнейшего индексы k вводятся в другом смысле, а именно, x_k и y_k будут обозначать значения x и y на k-м участке процесса, т. е. при

$$t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k \quad (k = 1, \ldots, r).$$

Подставляя x_k и $y_k = \beta_k x_k + \gamma_k$ вместо x и y в уравнение (4.1), получаем для k-го участка уравнение

$$D_k(p)x_k = b_n\gamma_k \tag{4.2}$$

где

$$D_k(p) = D(p) - \beta_k K(p) = a_{0k}p^n + a_{1k}p^{n-1} + \cdots + a_{nk} \tag{4.3}$$

Обозначим через $X_{jk}(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ n линейно независимых решений уравнения

$$D_k(p)x = 0$$

Тогда общее решение уравнения (4.2) можно записать в виде[1]

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_{jk}X_{jk}(t - t_{k-1}) + \frac{b_n}{a_{nk}}\gamma_k \tag{4.4}$$

Введем в рассмотрение «квазипроизводные», связанные с дифференциальным оператором $D_k(p)$:

$$x_k^{[q]} = a_{0k}x_k^{(q)} + a_{1k}x^{(q-1)} + \cdots + a_{qk}x_k \qquad (q = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.5}$$

где индекс в круглых скобках означает порядок обычной производной[2].

Линейно независимые решения $X_{jk}(t)$, входящие в (4.4), выберем так, чтобы они удовлетворяли следующим специальным начальным условиям:

$$X_{jk}^{[q]}(0) = \delta_{jq} \qquad (j, q = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.6}$$

где δ_{jq} — символ Кронекера.

---

[1] Ограничимся случаем $a_{nk} \neq 0$. В противном случае частное решение уравнения (4.4) следовало бы далее искать не в виде постоянной, а в форме степенной функции.

[2] Обратим внимание на то, что на каждом участке берутся свои квазипроизводные, так как коэффициенты a_{jk}, входящие в (4.6), различны для разных участков.

Если в условия скачков (3.6), записанные для момента $t = t_k$, подставить

$$\xi_j = x_{k+1}^{(j)} - x_k^{(j)}, \qquad \eta_j = y_{k+1}^{(j)} - y_k^{(j)}$$

воспользоваться равенством $y_k = \beta_k x_k + \gamma_k$ и ввести квазипроизводные, то условия скачков можно записать весьма просто:

$$x_{k+1}^{[q]} = x_k^{[q]} + b_q(\gamma_{k+1} - \gamma_k) \qquad (q = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 1, \ldots, r) \tag{4.7}$$

Определим теперь произвольные постоянные c_{jk} в решении (4.4). С этой целью подставим в условия скачков (4.7) вместо x_k и x_{k+1} их выражения в силу (4.4), полагая $t = t_k$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{j,k+1} X_{j,k+1}^{[q]}(0) + a_{q,k+1}\frac{b_n\gamma_{k+1}}{a_{n,k+1}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} c_{ik} X_{jk}^{[q]}(\tau_k) + a_{qk}\frac{b_n\gamma_k}{a_{nk}} + b_q(\gamma_{k+1} - \gamma_k)$$

В силу начальных условий (4.6) эти соотношения можно переписать так:

$$c_{q,k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} c_{jk} X_{jk}^{[q]}(\tau_k) + s_{qk} \tag{4.8}$$

где

$$s_{qk} = \left(a_{qk}\frac{\gamma_k}{a_{nk}} - a_{q,k+1}\frac{\gamma_{k+1}}{a_{n,k+1}}\right)b_n + b_q(\gamma_{k+1} - \gamma_k) \tag{4.9}$$

$$\begin{pmatrix} q = 0, 1, \ldots, n-1; & & & \\ k = 1, \ldots, r; & c_{q,r+1} = c_{q,1}; & \gamma_{r+1} = \gamma_1; & a_{n,r+1} = a_{n,1} \end{pmatrix}$$

или в матричной записи

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{W}_k(\tau_k)\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k \qquad (k = 1, \ldots, r;\ \mathbf{c}_{r+1} = \mathbf{c}_1) \tag{4.10}$$

где

$$\mathbf{W}_k(t) = \begin{Vmatrix} X_{0k}^{[0]}(t) \ldots X_{n-1,k}^{[0]}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{0k}^{[n-1]}(t) \ldots X_{n-1,k}^{[n-1]}(t) \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{s}_k = \begin{Vmatrix} s_{0k} \\ \vdots \\ s_{n-1,k} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_k = \begin{Vmatrix} \mathbf{c}_{0k} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n-1,k} \end{Vmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

Аналогично тому, как это делалось в § 2, выразим отсюда столбцы $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ через $\mathbf{c}_1$:

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{H}_k\mathbf{c}_1 + \mathbf{e}_k \tag{4.11}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{H}_k = \| h_{ij}^{k} \| = \mathbf{W}_k(\tau_k) \ldots \mathbf{W}_k(\tau_1) \qquad (k = 1, \ldots, r;\ \mathbf{c}_{r+1} = \mathbf{c}_1) \\ \mathbf{e}_k = \begin{Vmatrix} e_1^{k} \\ \vdots \\ e_n^{k} \end{Vmatrix} = \mathbf{W}_k(\tau_k) \ldots \mathbf{W}_2(\tau_2)\mathbf{s}_1 + \mathbf{W}_k(\tau_k) \ldots \mathbf{W}_3(\tau_3)\mathbf{s}_2 + \cdots + \mathbf{s}_k \end{gathered} \tag{4.12}$$

Последнее из соотношений (4.11) может быть записано в виде

$$(\mathbf{E} - \mathbf{H}_r)\,\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_r \tag{4.13}$$

Система (4.13) содержит n алгебраических уравнений относительно n линейно входящих произвольных постоянных $c_{11}, \ldots, c_{n1}$ и r нелинейно входящих величин $\tau_1, \ldots, \tau_r$.

Недостающие r уравнений получаются из условия

$$x(t_{k-1}) = \sigma_{k-1} \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{4.14}$$

и могут быть в силу (4.4) и (4.11) записаны так:

$$c_{01} = \varepsilon_1, \quad \{\mathbf{H}_k c_1 + \mathbf{e}_k\}_0 = \varepsilon_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, r-1) \tag{4.15}$$

где

$$\varepsilon_k = \sigma_{k-1} - \frac{b_n}{a_{nk}}\gamma_k \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

Система уравнений (4.13) и (4.15) получается из системы (2.9) и (2.10) при изменении обозначений:

$$\mathbf{U}_k = \|u_{ij}{}^k\| \to \mathbf{H}_k = \|h_{ij}{}^k\|, \qquad \sigma_k \to \varepsilon_{k+1}, \quad s \to n$$

$$\mathbf{v}_k = \begin{Vmatrix} v_1{}^k \\ \vdots \\ v_s{}^k \end{Vmatrix} \to \mathbf{e}_k = \begin{Vmatrix} e_1{}^k \\ \vdots \\ e_n{}^k \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \begin{Vmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_s(t_0) \end{Vmatrix} \to \mathbf{c}_1 = \begin{Vmatrix} c_0{}^1 \\ \\ c_{n-1}{}^1 \end{Vmatrix}$$

Этой же заменой обозначений из уравнения (2.11) получаем уравнения периодов для рассматриваемого случая.

Все соображения, связанные с вычислением элементов определителей и с особенностями симметричных режимов, высказанные в конце § 2, полностью переносятся и на уравнения периодов, выведенные в этом параграфе для основного уравнения.

В состав матриц $\mathbf{W}_k(t)$ входит фундаментальная система решений $X_{jk}(t)$ однородного уравнения $D_k(p)x = 0$ и квазипроизводные

$$X_{jk}{}^{[q]}(t) \qquad \begin{pmatrix} q = 1, 2, \ldots, n-1 \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Эти функции просто выражаются через корни λ_i характеристического уравнения $D_k(\lambda) = 0$.

Действительно, для однородного уравнения $D_k(p)x = 0$ преобразование по Лапласу искомой функции x равно [9]

$$L_{x(t)}(S) = \frac{w_{0k}S^{n-1} + w_{1k}S^{n-2} + \cdots + w_{n-1,\,k}}{a_{0,\,k}S^n + a_{1,\,k}S^{n-1} + \cdots + a_{n,\,k}}$$

где

$$w_{q,\,k} = a_{0,\,k}x^{(q)}(0) + a_{1,\,k}x^{(q-1)}(0) + \cdots + a_{q,\,k}x(0)$$

т. е.

$$L_{x(t)}(S) = \frac{x^{[0]}(0)\,S^{n-1} + x^{[1]}(0)\,S^{n-2} + \cdots + x^{[n-1]}(0)}{D_k(S)}$$

Используя вторую теорему разложения Хависайда [9], находим решение однородного уравнения

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{[0]}(0)\lambda_i^{n-1}+x^{[1]}(0)\lambda_i^{n-2}+\cdots+x^{[n-2]}(0)}{D_k'(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}$$

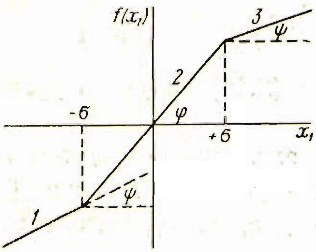
где λ_i $(i=1,\ldots,n)$ — корни полинома $D_k(\lambda)$. Подставляя в эту формулу интересующие нас специальные начальные условия, находим искомые функции

$$X_{jk}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{n-j-1}}{D_k'(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}\qquad(k=0,1,\ldots,n-1)$$

Поэтому

$$X_{jk}^{[q]}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_{0k}\lambda_i^{q}+a_{1k}\lambda_i^{q-1}+\cdots+a_{qk})\lambda_i^{n-k-1}}{D_k'(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}\qquad(j,q=0,1,\ldots,n-1)$$

§ 5. Частотный метод определения симметричных периодических режимов в системах с трехзвенной ломаной характеристикой. Рассмотрим симметричную непрерывную трехзвенную ломаную характеристику (фиг. 1) и простейший симметричный режим, для которого $r_1=2$, $\varkappa_1=2$, $\varkappa_2=3$, $\sigma_0=-\sigma$, $\sigma_1=+\sigma$. Покажем, что вместо произвольной характеристики фиг. 1 можно ограничиться рассмотрением Γ-характеристики (фиг. 2) с конечным и подлежащим определению временем прохождения среднего (вертикального) звена.



Фиг. 1

Аффинно-эквивалентные системы. При помощи аффинного преобразования

$$x_1=\alpha x+\beta y,\quad y_1=\gamma x+\delta y\quad(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)\tag{5.1}$$

где α, β, γ, δ — действительные числа, задача

$$D(p^*)x_1=K(p^*)y_1,\qquad y_1=f(x_1)\tag{5.2}$$

заменяется аналогичной задачей

$$L(p^*)x=M(p^*)y,\qquad y=F(x)\tag{5.3}$$

где

$$L(p^*)=\alpha D(p^*)-\gamma K(p^*),\qquad M(p^*)=\delta K(p^*)-\beta D(p^*)$$

а $y=F(x)$ определяется из равенства $\gamma x+\delta y=f(\alpha x+\beta y)$.

Аффинное преобразование (5.1) переводит любую трехзвенную симметричную характеристику фиг. 1 с уравнением $y_1=f(x_1)$ в характеристику $y=F(x)$ такого же типа, так как при аффинном преобразовании начало координат неподвижно, прямая переходит в прямую и симметричность характеристики сохраняется. При этом линейное дифференциальное уравнение $D(p^*)x_1=K(p^*)y_1$ заменяется уравнением того же вида $L(p^*)x=M(p^*)y$, в котором при[1] $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$ степени $L(p^*)$ и $M(p^*)$ равны между собой и равны n.

[1] Случай аффинного преобразования с $\beta=0$ использовался в [10].

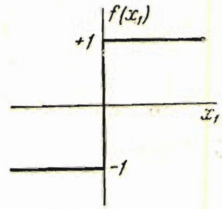
Если принять $\beta = \sigma$, $\gamma = \alpha \operatorname{tg} \psi$ и $\delta = \sigma \operatorname{tg} \varphi$, то преобразованная характеристика $y = F(x)$ будет Г-характеристикой (фиг. 2), но, в отличие от релейных характеристик, время прохождения среднего (вертикального) звена конечно.

Из формул аффинного преобразования (5.1) следует, что в аффинно-эквивалентных задачах (5.2) и (5.3) периодические симметричные решения соответствуют периодическим симметричным решениям с тем же периодом и устойчивые решения переходят в устойчивые.

Выражение уравнения периодов через коэффициенты L- и M-полиномов. Сохраним для коэффициентов полиномов $L(p^*)$ и $M(p^*)$ обозначения a_g и b_g ($g = 0, 1, \ldots,$), которые использовались ранее в полиномах D и K, но теперь всегда $m = n$, т. е. $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Будем теперь периодические решения рассматриваемой системы

$$L(p^*)x = M(p^*)y, \qquad y = F(x) \tag{5.4}$$

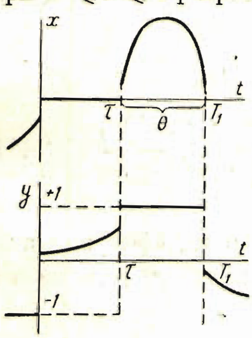
искать в форме рядов Фурье:



Фиг. 2

$$x = \sum_{h-\infty}^{+\infty} \alpha_h e^{ih\omega t}, \qquad y = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \beta_h e^{ih\omega t} \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{T_1}\right) \tag{5.5}$$

Откажемся временно от предположения, что функции x и y непрерывны, и предположим, что они имеют разрывы в моменты 0, τ, T_1, $T_1 + \tau$ и т. д. Тогда при симметричном режиме функции $x(t)$ и $y(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ протекают в соответствии с фиг. 3. Для симметричного решения всегда $\beta_h = 0$ при четном h, и в соответствии с фиг. 3 при нечетном h



Фиг. 3

$$\beta_h = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} y(t) e^{-ih\omega t} dt \tag{5.6}$$

Подсчитаем теперь β_h для нечетных h. Обозначим

$$Y = T_1\beta = \int_0^{T_1} y(t) e^{-ih\omega t} yt, \qquad Y_1 = \int_0^{T_1} y'(t) e^{-ih\omega t} dt$$

$$Y_2 = \int_0^{T_1} y''(t) e^{-ih\omega t} dt \text{ и т. д.}$$

Интегрируя по частям, находим

$$Y_1 = y(\tau - 0) e^{-ih\omega\tau} - y(+0) - y(T_1 - 0) - y(\tau + 0) e^{-ih\omega\tau} + ih\omega Y =$$
$$= (\eta_0{}^0 + \eta_0{}^\tau e^{-ih\omega\tau}) + ih\omega Y$$

$$Y_2 = -(\eta_1{}^0 + \eta_1{}^\tau e^{-ih\omega\tau}) + ih\omega(\eta_0{}^0 + \eta_0{}^\tau e^{-ih\omega\tau}) + (ih\omega)^2 Y \text{ и т. д.}$$

В этих формулах нижний индекс у η имеет старое значение, а верхний индекс указывает, к какому моменту времени относится соответствующий разрыв.

Умножая теперь каждое Y_k на b_{n-k} (при этом полагаем $Y_0 = Y$) и складывая все получающиеся таким образом выражения, находим

$$\int_0^{T_1} M(p)\, y(t)\, e^{-ih\omega t}\, dt = -\sum_{k=0}^{n-1} m_k(ih\omega)\,[\eta_k^0 + \eta_k^\tau e^{-ih\omega\tau}] + M(ih\omega)\,Y \tag{5.7}$$

где

$$m_k(ih\omega) = b_{n-k-1} + b_{n-k-2}(ih\omega) + \cdots + b_0(ih\omega)^{n-k-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

но, в соответствии с фиг. 4 и с уравнением (5.4)

$$\int_0^{T_1} M(p)\, y(t)\, e^{-ih\omega t}\, dt = \int_\tau^{T_1} M(p)\, y(t)\, e^{-ih\omega t}\, dt \tag{5.8}$$

при $\tau < t < T_1$ функция $y = 1$. Это значит, что $y(t)$ есть решение уравнения

$$M(p)\, y = b_n \tag{5.9}$$

при начальных условиях

$$y(\tau + 0) = 1, \qquad y^{(g)}(\tau + 0) = 0 \qquad (g = 1, \ldots, n-1)$$

Эти начальные условия будут использованы позже. Пока же в силу (5.9)

$$\int_\tau^{T_1} M(p)\, y(t)\, e^{-ih\omega t}\, dt = b_n \frac{1 + e^{-ih\omega\tau}}{ih\omega} \tag{5.10}$$

Определим из (5.7), учитывая (5.10), искомые значения

$$\beta_h = \frac{Y}{T_1} = \frac{1}{T_1 M(jh\omega)} \sum_{k=0}^{n-1} m_k(ih\omega)\,[\eta_0^0 + \eta_k^\tau e^{-ih\omega\tau}] + \frac{b_n(1 + e^{-ih\omega\tau})}{ih\pi M(jh\omega)} \tag{5.11}$$

Теперь, подставляя соответствующие ряды Фурье в дифференциальное уравнение $L(p^*)\,x = M(p^*)\,y$, находим коэффициенты α_h для нечетного h (для четных h все $\alpha_h = 0$):

$$\alpha_h = \frac{M(ih\omega)}{L(ih\omega)}\,\beta_h = \frac{1}{T_1 L(ih\omega)} \sum_{k=0}^{n-1} m_k(ih\omega)\,[\eta_k^0 + \eta_k^\tau e^{-ih\omega\tau}] + \frac{b_n(1 + e^{-ih\omega\tau})}{ih\pi L(ih\omega)} \tag{5.12}$$

В силу (5.11) и (5.12) все коэффициенты Фурье α_h и β_h ($h = \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$) выражаются линейно через конечное число $2n$ величин η_k^0 и η_k^τ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Теперь искомые функции x и y можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{n-1} [P_k(t)\,\eta_k^0 + P_k(t-\tau)\,\eta_k^\tau] + P(t) + P(t-\tau) \\ y &= \sum_{k=0}^{n-1} [Q_n(t)\,\eta_k^0 + Q_k(t-\tau)\,\eta_k^\tau] + Q(t) + Q(t-\tau) \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$P_k(t) \equiv \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{m_k(jh\omega)}{L(ih\omega)} e^{ih\omega t}, \qquad Q_k(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{m_k(ih\omega)}{M(ih\omega)} e^{ih\omega t}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{5.14}$$

$$P(t) = \frac{b_n}{i\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{e^{ih\omega t}}{hL(ih\omega)}, \qquad Q(t) = \frac{b_n}{i\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{e^{ih\omega t}}{hM(ih\omega)}$$

$$m_k(ih\omega) = b_{n-k-1} + b_{n-k-2}(ih\omega) + \cdots + b_0(ik\omega)^{n-k-1}, \qquad \omega = \pi / T_1$$

а штрих у знака суммы означает, что суммирование проводится лишь по нечетным h.

Из рассуждений, при помощи которых были выведены формулы (5.13), следует, что определяемые ими функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$L(p)x = 0 \quad \text{при } 0 < t < \tau, \qquad M(p)y = b_n \quad \text{при } \tau < t < T_1 \tag{5.15}$$

Нам же необходимо в силу характеристики $y = F(x)$, чтобы

$$x = 0 \quad \text{при } 0 < t < \tau, \qquad y = 1 \quad \text{при } \tau < t < T_1$$

Для обеспечения этого необходимо дополнительно к уравнениям (5.15) потребовать, чтобы выполнялись начальные условия

$$y(\tau + 0) = 1, \qquad y^{(g)}(\tau + 0) = 0 \qquad (g = 1, \ldots, n-1) \tag{5.16}$$

$$x(+0) = x'(+0) = \cdots = x^{(n-1)}(+0) = 0 \tag{5.17}$$

Эти условия в силу формул (5.13) приводят к соотношениям[1]

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{n-1} [P_k^{(q)}(+0)\eta_k^0 + P_k^{(q)}(-\tau)\eta_k^\tau] + P^{(q)}(0) + P^{(q)}(-\tau) = 0 \\
\sum_{k=0}^{n-1} [Q_k^{(q)}(\tau)\eta_k^0 + Q_k^{(q)}(+0)\eta_k^\tau] + Q^{(q)}(\tau) + Q^{(q)}(+0) = \delta_{0q}
\end{gathered} \tag{5.18}$$

$$\left(q = 0, 1, \ldots, n-1;\ \delta_{0q} = \begin{matrix} 1 \text{ при } q = 0 \\ 0 \text{ при } q \neq 0 \end{matrix}\right)$$

Система уравнений (5.18) линейна относительно $2n$ неизвестных η, а коэффициенты ее зависят (нелинейно) от τ и $\omega = \pi/\tau$. Если произвольно задаться значениями τ и T_1, то из (5.18) определятся разрывы η_h^0 и η_h^τ $(h = 0, 1, \ldots, n-1)$ и, следовательно, в силу (5.13) будут найдены $x(t)$ и $y(t)$. Однако $x(t)$ и $y(t)$ могут оказаться разрывными, так как условия непрерывности этих функций до сих пор не использовались.

---

[1] Функции $P(t)$ и $Q(t)$, как видно из соответствующих рядов Фурье, непрерывны вместе с производными до $(n-1)$-го порядка.

Функции $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ кусочно-гладкие, причем только k-я производная этих функций имеет разрыв, равный единице при $t = 0$, T_1, $2T_1$ и т. д. Это следует из (5.13), если в них положить $\eta_j^0 = 0$ при $j \neq k$, $\eta_k^0 = 1$ и все $\eta_j^\tau = 0$.

В связи с этим вместо $P_k^{(q)}(-\tau+0)$ пишем всюду $P_k^{(q)}(-\tau)$ и вместо $Q_k^{(q)}(\tau+0)$ пишем $Q_k^{(q)}(\tau)$.

Учтем теперь условия непрерывности $x(t)$ и $y(t)$, т. е. потребуем, чтобы

$$\eta_0{}^0 = \eta_0{}^\tau = 0 \tag{5.19}$$

[равенства $\xi_0{}^0 = \xi_0{}^\tau = 0$ в этом случае обеспечиваются в силу условия скачков (3.6)].

Подставляя в (5.18) $\eta_0{}^0 = \eta_0{}^\tau = 0$, получаем $2n$ уравнений, линейных относительно $2n-2$ неизвестных. Исключая эти неизвестные, получаем уравнения периодов

$$\Delta_1(\tau, T_1) = 0, \qquad \Delta_2(\tau, T_1) = 0 \tag{5.20}$$

Определители Δ_1 и Δ_2 имеют порядок $n-1$. Определитель Δ_1 состоит из столбцов коэффициентов при $\eta_1{}^0, \ldots, \eta_{n-1}^0, \eta_1{}^\tau, \ldots, \eta_{n-1}^\tau$ и из столбца свободных членов первых $2n-1$ уравнений системы (5.18). Определитель Δ_2 получается из Δ_1 заменой элементов последней строки соответствующими коэффициентами последнего n-го уравнения той же системы (5.18).

Каждая пара положительных чисел $T_1 > 0$, $0 < \tau < T_1$, удовлетворяющая уравнениям (5.20), определяет в силу (5.13) непрерывный периодический режим.

В состав определителей Δ_1 и Δ_2 входят

$$\begin{gathered} P_k{}^{(q)}(+0),\ P_k{}^{(q)}(-\tau),\ \ Q_k{}^{(q)}(\tau),\ \ Q_k{}^{(q)}(+0),\ P^{(q)}(0) \\ P^{(q)}(-\tau),\ \ Q^{(q)}(\tau),\ \ Q^{(q)}(0) \end{gathered} \qquad \begin{pmatrix} k=0, 1, \ldots, n-1 \\ q=0, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Непосредственное вычисление $P_k{}^{(q)}$, $Q_k{}^{(q)}$, исходя из разложения (5.14) в ряд Фурье функцией $P_k(t)$ и $Q_k(t)$, затруднено, так как некоторые из этих рядов медленно сходятся и их почленное дифференцирование приводит к расходящимся рядам. Эффективный способ вычисления этих величин, устраняющий все эти затруднения, может быть получен применением метода А. Н. Крылова [12] улучшения сходимости рядов Фурье.

О вычислении элементов определителей $\Delta_1(\tau, T_1)$ *и* $\Delta_2(\tau, T_1)$. Рассмотрим сначала ряд Фурье

$$Q_k(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{h=-\infty}^{-\infty}{}' \frac{m_k(ih\omega)}{M(jh\omega)} e^{ih\omega t} \tag{5.21}$$

Заметим, что

$$\frac{m_k(s)}{M(s)} = \frac{b_0 s^{n-k-1} + b_1 s^{n-k-2} + \cdots + b_{n-k-1}}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{1}{s^{k+1}} - \frac{b_{n-k}\, s^k + \cdots + b_n}{s^{k+1} M(s)} \cdot \tag{5.22}$$

Поэтому

$$Q_k(t) = Q_k{}^*(t) - Q_k{}^{**}(t) \tag{5.23}$$

где

$$Q_k{}^*(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ih\omega t}}{(ih\omega)^{k+1}}$$

$$Q_k{}^{**}(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{b_{n-k}(ih\omega)^k + \cdots + b_n}{(ih\omega)^{k+1} M(ih\omega)} e^{ih\omega t} \tag{5.24}$$

Из (5.24) следует, что как Q_k^{**}, так и производные от этих функций до $n-1$-го порядка включительно непрерывные и представлены сходящимися рядами.

Займемся теперь подсчетом $Q_k^*(t)$. Обозначим

$$q_k(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ih\pi t}}{(ih\pi)^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5.25}$$

Тогда

$$Q_k^*(t) = T_1^k q_{k+1}\left(\frac{t}{T_1}\right) \tag{5.26}$$

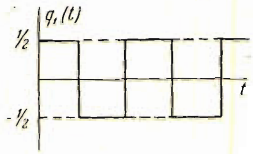
и задача сводится к определению $q_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Заметим, что

$$q_{k+1} = \int q_k(t)\, dt$$

График функции $q_1(t)$ показан на фиг. 4. В интервале $0 < t < 1$ функции q_1, q_2, и т. д. имеют следующие значения:

$$q_1(t) \equiv \frac{1}{2}, \qquad q_2(t) = \int q_1\, dt = \frac{t}{2} + C_2$$

$$q_3(t) = \frac{t^2}{4} + C_2 t + C_3, \ldots \tag{5.27}$$



Фиг. 4

Постоянные интегрирования определяются из условий

$$q_k(0) + q_k(1) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots), \text{ откуда } C_2 = -{}^1/_4,\ C_3 = 0$$

и т. д. Таким образом,

$$Q_k(t) = T_1^k q_{k+1}\left(\frac{t}{T_1}\right) - Q_k^{**}(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5.28}$$

где $q_k(t)$ — полиномы, определяемые указанным выше алгорифмом.

Теперь рассмотрим ряды

$$P_k(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{m_k(ih\omega)}{L(ih\omega)} e^{ih\omega t} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Дробно-рациональную функцию $m_k(s)/L(s)$ преобразуем следующим образом:

$$\frac{m_k(s)}{L(s)} = \frac{b_0 s^{n-k-1} + \cdots + b_{n-k-1}}{a_0 s^n + \cdots a_n} = \frac{c_1}{s^{k+1}} + \cdots + \frac{c_{n-k}}{s^n} + \frac{g_0 s^{n-1} + \cdots + g_{n-1}}{s^n L(s)}$$

где коэффициенты c и g получаются непосредственно делением полинома $m_k(s)$ на $L(s)$. Отсюда следует, что

$$P_k(t) = c_1 T_1^k q_{k+1}\left(\frac{t}{T_1}\right) + \cdots + c_{n-k} T_1^{n-1} q_n\left(\frac{t}{T_1}\right) + P_k^{**}(t) \tag{5.29}$$

где

$$P_k^{**}(t) = \frac{1}{T_1} \sum^{\infty} \frac{g_0 (ih\omega)^{n-1} + \cdots + g_{n-1}}{(ih\omega)^n L(ih\omega)} \tag{5.30}$$

Первые члены в (5.29) — полиномы. Для определения их коэффициентов выше был указан простой алгорифм. Функция $P_k^{**}(t)$ и все $n-1$ ее производных — сходящиеся ряды Фурье. Сходимость рядов, определяющих функции Q_k^{**} и P_k^{**}, может быть улучшена повторным применением к ним тех же приемов. Повторное применение их позволяет представить P_k и Q_k в форме полиномов с добавлением столь быстро сходящихся рядов, что при расчетах можно сохранить в этих рядах только первые гармоники. Совершенно аналогично ряды $P(t)$ и $Q(t)$ могут быть представлены суммой полинома и нескольких гармоник. После этого подсчет производных до $(n-1)$-го порядка от $P_k(t)$, $Q_k(t)$, $P(t)$ и $Q(t)$ производится почленным дифференцированием полученных выражений. Все затруднения, связанные с дифференцированием медленно сходящихся рядов, при этом полностью обходятся.

Таким образом, все величины, входящие в уравнения периодов, определяются непосредственно через коэффициенты уравнения $L(p^*)x = M(p^*)y$, а значит, и через коэффициенты основного уравнения $D(p^*)x = K(p^*)y$ без вычисления корней характеристических уравнений и без вычислений каких-либо решений линейных дифференциальных уравнений, описывающих движение на отдельных участках.

Поступила 18 VII 1955

Московский физико-технический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и их технические приложения. ИЛ, 1950.
2. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
3. Цыпкин Я. З. Об устойчивости периодических режимов в релейных системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, т. XIV, № 5, 1953.
4. Неймарк Ю. И., Кубланов И. М. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. Автоматика и телемеханика, т. XVI, № 1, 1953.
5. Неймарк Ю. И. О периодических режимах и устойчивости релейных систем. Автоматика и телемеханика, т. XIV, № 5, 1953.
6. Цыпкин Я. З. Частотный метод исследования периодических режимов релейных систем автоматического регулирования. Сборник памяти А. А. Андронова. Изд. АН СССР, М., 1955.
7. Неймарк Ю. И. О периодических движениях релейных систем, Изд. АН СССР. Сборник памяти А. А. Андронова, М., 1955.
8. Бромберг П. В. К теории релейных систем при постоянно действующем возмущении.
9. Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
10. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Условия существования области устойчивости для одноконтурной системы автоматического регулирования, т. XVIII, вып. 1, 1954.
11. Неймарк Ю. И. О скользящем режиме и периодических движениях. Уч. записки ГИФТИ и радиофака, ГГУ, Горький, 1955.
12. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Гостехиздат, М.-Л., 1950, гл. IV.