Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

# К ЗАДАЧЕ ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ДВУМЯ СЕРВОМОТОРАМИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

**В. А. Троицкий**

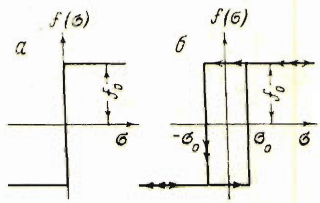
(Ленинград)

В работе дается точное решение задачи об автоколебаниях в системах автоматического регулирования с двумя регулирующими органами, имеющих два сервомотора типа «да — нет» в случае, когда среди корней характеристического уравнения линейной части системы имеются кратные.

**§ 1. Автоколебания в регулируемых системах с двумя сервомоторами типа «да — нет».** Поведение систем автоматического регулирования с двумя регулирующими органами, имеющих два сервомотора типа «да — нет», как нетрудно показать, может быть описано системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_{k1} f_1(\sigma_1) + h_{k2} f_2(\sigma_2) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$
$$\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{1\alpha} x_\alpha, \qquad \sigma_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{2\alpha} x_\alpha \tag{1.1}$$

где $b_{k\alpha}$, $h_{k\beta}$, $j_{\beta\alpha}$ — постоянные коэффициенты, $x_k$ — параметры, характеризующие положение системы, $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — координаты пусковых устройств и $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ — характеристики сервомоторов, имеющие для сервомоторов типа «да — нет» вид, изображенный на фиг. 1. На фиг. 1,*б* показана характеристика сервомотора типа «да — нет» с гистерезисной петлей.




Фиг. 1

Перепишем уравнения (1.1) в матричном виде:

$$\dot{x} = bx + h_1 f_1(\sigma_1) + h_2 f_2(\sigma_2)$$
$$\sigma_1 = j_1, \ x\,\sigma_2 = j_2 x \tag{1.2}$$

где $b$ — квадратная матрица коэффициентов $b_{k\alpha}$, $h_1$ и $h_2$ — матрицы-столбцы постоянных $h_{\beta k}$, $j_1$ и $j_2$ — матрицы-строки передаточных чисел $j_{\beta\alpha}$ и $x$ — матрица-столбец переменных $x_k$, и будем считать, что среди собственных значений матрицы $b$ могут быть кратные. В этом случае неособенным линейным преобразованием $x = cz$, $\|c\| \neq 0$ уравнения (1.2) преобразуются к каноническому виду

$$\dot{z} = Jz + a_1 f_1(\sigma_1) + a_2 f_2(\sigma_2), \qquad \sigma_1 = \gamma_1 z, \qquad \sigma_2 = \gamma_2 z \tag{1.3}$$

Здесь $J$ — квазидиагональная каноническая форма Жордана матрицы $b$ и $\gamma_\beta = j_\beta c$, $a_\beta = c^{-1} h_\beta$.

Предположим, что в системе установился периодический режим периода $2T$, и будем считать, что при $t = 0$ знак $f_1(\sigma_1)$ изменился с минуса на плюс, а при $t = \tau$ изменился знак $f_2(\sigma_2)$, причем если $f_2(\sigma_2)$ меняет знак с плюса на минус, то режим будем называть режимом первого типа, в противном случае — режимом второго типа.

Тогда в случае режима первого типа движение системы в интервале $0 < t < \tau$ будет описываться уравнением

$$\dot{z}^{*(1)} = Jz^{*(1)} + a_1 f_{10} + a_2 f_{20} \tag{1.4}$$

причем в интервале $\tau < t < T$ будем иметь

$$\dot{z}^{*(2)} = Jz^{*(2)} + a_1 f_{10} - a_2 f_{20} \tag{1.5}$$

Уравнения, соответствующие периодическому режиму второго типа, получаются из (1.4) и (1.5) заменой знака у $f_{20}$:

Решения уравнений (1.4) и (1.5) имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} z^{*(1)}(t) &= M(t)\, z_0^{*(1)} + N(t)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20}) \\ z^{*(2)}(t) &= M(t)\, z_0^{*(2)} + N(t)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$M(t) = e^{Jt}, \qquad M(0) = I, \qquad N(t) = \int_0^t M(\xi)\, d\xi, \qquad N(0) = 0 \tag{1.7}$$

и $I$ — единичная матрица порядка $n$.

Постоянные интегрирования определятся из условий

$$z^{*(1)}(0) = -z^{*(2)}(T), \qquad z^{*(1)}(\tau) = z^{*(2)}(\tau) \tag{1.8}$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_0^{*(1)} &= -[I + M(T)]^{-1}\{N(T)\, a_1 f_{10} - [N(T) - 2M(T-\tau)\, N(\tau)]\, a_2 f_{20}\} \\ z_0^{*(2)} &= -[I + M(T)]^{-1}\{N(T)\, a_1 f_{10} - [N(T) + 2M(-\tau)\, N(\tau)]\, a_2 f_{20}\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь использованы равенства $[M(t_1)]^{-1} = M(-t_1)$, $M(t_1)\, M(t_2) = M(t_1 + t_2)$.

Изменения координат пусковых устройств описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_1^{*(1)}(t) &= \gamma_1 \{M(t)\, z_0^{*(1)} + N(t)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} \\ \sigma_2^{*(1)}(t) &= \gamma_2 \{M(t)\, z_0^{*(1)} + N(t)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} \end{aligned} \qquad (0 < t < \tau)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^{*(2)}(t) &= \gamma_1 \{M(t)\, z_0^{*(2)} + N(t)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\} \\ \sigma_2^{*(2)}(t) &= \gamma_2 \{M(t)\, z_0^{*(2)} + N(t)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\} \end{aligned} \qquad (\tau < t < T) \tag{1.10}$$

в которых под $z_0^{*(1)}$ и $z_0^{*(2)}$ следует понимать значения (1.9).

Изменения переменных $z$, $\sigma_1$ и $\sigma_2$ во втором полупериоде первого периода найдутся из условий периодичности

$$z^*(t+T) = -z^*(t), \qquad \sigma_1^*(t+T) = -\sigma_1^*(t), \qquad \sigma_2^*(t+T) = -\sigma_2^*(t)$$

В дальнейшем это движение будет периодически повторяться.

Мы предполагали, что в начальный момент времени, при $t = 0$, произошло переключение первого сервомотора, причем $f_1(\sigma_1)$ изменила свое значение с $-f_{10}$ на $+f_{10}$. Поэтому следует потребовать, чтобы

$$\sigma_1^*(0) = \sigma_1^{*(1)}(0) = \sigma_{10} \tag{1.11}$$

Кроме того, нужно отметить, что указанное переключение сервомотора может произойти только в том случае, когда в момент, предшествующий переключению, производная $\dot{\sigma}_1$ от координаты первого пускового устройства была положительной. Следовательно, условием переключения в этом случае будет неравенство

$$\dot{\sigma}_1^*(-0) = -\dot{\sigma}_1^{*(2)}(T) > 0 \qquad (1.12)$$

Если после переключения это неравенство нарушится, т. е.

$$\dot{\sigma}_1^*(+0) = \dot{\sigma}_1^{*(1)}(0) < 0 \qquad (1.13)$$

то мы будем иметь дело с возможным периодическим движением, когда координата первого пускового устройства будет изменяться в пределах

$$-\sigma_{10} \leqslant \sigma_1^*(t) \leqslant \sigma_{10} \qquad (1.14)$$

Если же неравенство (1.15) останется справедливым и после переключения

$$\dot{\sigma}_1^*(+0) = \dot{\sigma}_1^{*(1)}(0) > 0 \qquad (1.15)$$

то в системе возможен обычный автоколебательный режим.

Аналогичным образом найдется второе уравнение для определения $T$ и $\tau$. Для этого следует вспомнить, что при $t = \tau$ произошло переключение второго сервомотора, причем $f_2(\sigma_2)$ изменилась с $+f_{20}$ на $-f_{20}$. Поэтому

$$\sigma_2^*(\tau) = \sigma_2^{*(1)}(\tau) = \sigma_2^{*(2)}(\tau) = -\sigma_{20} \qquad (1.16)$$

Основным условием переключения при этом будет

$$\dot{\sigma}_2^*(\tau - 0) = \sigma_2^{*(1)}(\tau) < 0 \qquad (1.17)$$

причем если

$$\dot{\sigma}_2^*(\tau + 0) = \dot{\sigma}_2^{*(2)}(\tau) > 0 \qquad (1.18)$$

то в рассматриваемой системе могут иметь место автоколебания, при которых $-\sigma_{20} \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_{20}$. Если же

$$\dot{\sigma}_2^*(\tau + 0) = \dot{\sigma}_2^{*(2)}(\tau) < 0 \qquad (1.19)$$

то мы будем иметь обычный периодический режим.

Подстановка значений $\sigma_1^*(t)$ и $\sigma_2^*(t)$ из (1.10) в равенства (1.11) и (1.16) приводит к уравнению периодов

$$\gamma_1 [I + M(T)]^{-1} \{N(T) a_1 f_{10} - [N(T) - 2M(T-\tau) N(\tau)] a_2 f_{20}\} = -\sigma_{10} \qquad (1.20)$$

$$\gamma_2 [I + M(T)]^{-1} \{N(T) a_1 f_{10} - [N(T) - 2M(T-\tau) N(\tau)] a_2 f_{20}\} + \\ + \gamma_2 N(\tau)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20}) = -\sigma_{20} \qquad (1.21)$$

Если среди собственных значений матрицы $b$ нет нулевых, то

$$N(t) = [M(t) - I] J^{-1}$$

и поэтому равенства (1.20) и (1.21) преобразуются к виду (1.22)

$$\gamma_1 J^{-1} \{[I + M(T)]^{-1} [I - M(T)] a_1 f_{10} + [2(I + M(T))^{-1} M(\tau) - I] a_2 f_{20}\} = \sigma_{10}$$

$$\gamma_2 J^{-1} \{[2(I + M(T))^{-1} M(\tau) - I] a_1 f_{10} + \\ + [I + M(T)]^{-1} [M(T) - I] a_2 f_{20}\} = -\sigma_{20} \qquad (1.23)$$

Если уравнения (1.20) и (1.21), а также уравнения, соответствующие периодическому режиму второго типа, получающиеся из (1.20) и (1.21) изменением знака на противоположный у слагаемых, содержащих $f_{20}$ и у $\sigma_{20}$, имеют хотя бы одну пару вещественных положительных корней $T$ и $\tau$ и если для этих значений $T$ и $\tau$ выполняются условия переключения (1.12) и (1.17), то в рассматриваемой системе автоматического регулирования может иметь место автоколебательный режим. Этот автоколебательный режим осуществляется в действительности, если он будет устойчивым.

Перейдем к исследованию устойчивости периодических режимов. Для этого наряду с периодическим режимом движения, определяемым равенствами (1.6) и (1.10), период $2T$ которого и постоянная $\tau$ даются уравнениями (1.20) и (1.21) и удовлетворены условия (1.12) и (1.17), рассмотрим какое-либо непериодическое решение уравнений (1.3), начальное условие которого

$$z(0) = z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} \tag{1.24}$$

мало отличается от соответствующих значений $z_0^{*(1)}$ в периодическом движении. Предположим опять, что при $t = 0$ произошло переключение первого сервомотора с $-f_{10}$ на $+f_{10}$. Тогда в последующем интервале времени $0 < t < \tau'$ до момента $t = \tau'$ перекладки второго регулирующего органа движение системы будет описываться уравнениями (исследуется устойчивость периодического режима первого типа)

$$0 < t < \tau', \qquad \dot z^{(1)} = Jz^{(1)} + a_1 f_{10} + a_2 f_{20} \tag{1.25}$$

В следующем интервале $\tau' < t < T'$ до переключения первого сервомотора уравнения движения имеют вид:

$$\tau' < t < T', \quad \dot z^{(2)} = Jz^{(2)} + a_1 f_{10} - a_2 f_{20} \tag{1.26}$$

Решения уравнений (1.25) и (1.26), удовлетворяющие условию (1.24) и условию сопряжения $z^{(1)}(\tau') = z^{(2)}(\tau')$, запишутся в форме

$$z^{(1)}(t) = M(t)(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + N(t)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20}) \tag{1.27}$$

$$z^{(2)}(t) = M(t)(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + 2M(t-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + N(t)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20}) \tag{1.28}$$

Соотношение (1.28) позволяет вычислить значение $z(t)$ в момент $t = T'$ перекладки первого регулирующего органа:

$$z^{(2)}(T') = -(z_0^{*(1)} + \delta z^{(1)}) = M(T')(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + N(T')(a_1 f_{10} - a_2 f_{20}) + 2M(T'-\tau')a_2 f_{20} \tag{1.29}$$

Как будет видно из дальнейшего, при малых $\delta z^{(0)}$ величины $\delta T^{(0)} = T' - T$, $\delta\tau^{(0)} = \tau' - \tau$ будут также малыми. Поэтому мы можем разложить правую часть (1.29) в ряд по степеням малых величин $\delta z^{(0)}$, $\delta T^{(0)}$, $\delta\tau^{(0)}$ и в этом разложении отбросить слагаемые, содержащие эти малые величины в степени выше второй, после чего будем иметь

$$\begin{aligned} -\delta z^{(1)} = M(T)\delta z^{(0)} + [M'(T)z_0^{*(1)} +{} \\ + 2M'(T-\tau)N(\tau)a_2 f_{20} + N'(T)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})]\,\delta T^{(0)} +{} \\ + 2[-M'(T-\tau)N(\tau) + M(T-\tau)N'(\tau)]\,a_2 f_{20}\delta\tau^{(0)} \end{aligned} \tag{1.30}$$

где обозначено

$$M'(t_1) = \left[\frac{dM(t)}{dt}\right]_{t=t_1}, \qquad N'(t_1) = \left[\frac{dN(t)}{dt}\right]_{t=t_1}$$

Мы предполагали, что при $t=\tau'$ произошло переключение второго сервомотора. Поэтому

$$\sigma_2^{(1)}(\tau') = \gamma_2 z^{(1)}(\tau') = \gamma_2\{M(\tau')(z_0^{*(1)}+\delta z^{(0)}) + N(\tau')(a_1f_{10}+a_2f_{20})\} = -\sigma_{20}$$

что после разложения правой части в ряд и оставления только слагаемых первой степени относительно $\delta z^{(0)}$ и $\delta\tau^{(0)}$ дает

$$\gamma_2 M(\tau)\,\delta z^{(0)} + \gamma_2[M'(\tau)\,z_0^{*(1)} + N'(\tau)(a_1f_{10}+a_2f_{20})]\,\delta\tau^{(0)} = 0 \qquad (1.31)$$

Аналогичным образом из условия $\sigma_1(T') = -\sigma_{10}$ получим уравнение

$$\begin{aligned}\gamma_1 M(T)\,\delta z^{(0)} + \gamma_1[M'(T)\,z_0^{*(1)} + 2M'(T-\tau)\,N(\tau)\,a_2f_{20} +\\ + N'(T)(a_1f_{10}-a_2f_{20})]\,\delta T^{(0)} + \gamma_1[-2M'(T-\tau)\,N(\tau) +\\ + M(T-\tau)\,N'(\tau)]\,a_2f_{20}\delta\tau^{(0)} = 0\end{aligned} \qquad (1.32)$$

Уравнения (1.30) — (1.32) дают возможность при известных $\delta z^{(0)}$ вычислить $\delta z^{(1)}$, $\delta T^{(0)}$ и $\delta\tau^{(0)}$.

Приняв теперь $-(z_0^{*(1)}+\delta z^{(1)})$ за начальные значения для второго «полупериода» движения системы, придем к уравнениям, получающимся из (1.30) — (1.32) заменой в них $\delta z^{(1)}$, $\delta z^{(0)}$, $\delta T^{(0)}$ и $\delta\tau^{(0)}$ на $\delta z^{(2)}$, $\delta z^{(1)}$, $\delta T^{(1)}$, $\delta\tau^{(1)}$. Продолжив этот процесс, получим для $s+1$-го «полупериода» систему конечно-разностных уравнений

$$\begin{aligned}-\delta z^{(s+1)} &= M(T)\,\delta z^{(s)} + G\delta T^{(s)} + F\delta\tau^{(s)}\\ \gamma_2 M(\tau)\,\delta z^{(s)} &+ R\delta\tau^{(s)} = 0\\ -\gamma_1 M(T)\,\delta z^{(s)} &+ \gamma_1 G\delta T^{(s)} + \gamma_1 F\delta\tau^{(s)} = 0\end{aligned} \qquad (1.33)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}G &= M'(T)\,z_0^{*(1)} + 2M'(T-\tau)\,N(\tau)\,a_2f_{20} + N'(T)(a_1f_{10}-a_2f_{20})\\ F &= 2\,[-M'(T-\tau)\,N(\tau) + M(T-\tau)\,N'(\tau)]\,a_2f_{20}\\ R &= \gamma_2[M'(\tau)\,z_0^{*(1)} + N'(\tau)(a_1f_{10}+a_2f_{20})]\end{aligned} \qquad (1.34)$$

Если среди собственных значений матрицы $b$ нет нулевых, то вместо (1.34) следует пользоваться формулами

$$\begin{aligned}G &= 2\,[I+M(T)]^{-1}M(T)\,[a_1f_{10} - M(-\tau)\,a_2f_{20}]\\ F &= 2M(T-\tau)\,a_2f_{20}\\ R &= 2\gamma_2[I+M(T)]^{-1}M(\tau)\,[a_1f_{10} - M(T)\,a_2f_{20}]\end{aligned} \qquad (1.35)$$

Второе и третье уравнения (1.33) позволяют исключить из первого $\delta T^{(s)}$ и $\delta\tau^{(s)}$. Так, из второго найдем

$$\delta\tau^{(s)} = -\frac{1}{R}\gamma_2 M(\tau)\,\delta z^{(s)}$$

а из третьего будем иметь

$$\delta T^{(s)} = \left\{-\frac{\gamma_1 M(T)}{\gamma_1 G} + \frac{\gamma_1 F\gamma_2 M(\tau)}{\gamma_1 GR}\right\}\delta z^{(s)}$$

Подставив эти значения $\delta T^{(s)}$ и $\delta\tau^{(s)}$ в первое уравнение (1.32), получим

$$-\delta z^{(s+1)} = B\delta z^{(s)} \tag{1.36}$$

Здесь

$$B = \left\{I - \frac{G\gamma_1}{\gamma_1 G}\right\} M(T) + \left\{\frac{G\gamma_1 F\gamma_2}{\gamma_1 GR} - \frac{F\gamma_2}{R}\right\} M(\tau) \tag{1.37}$$

Исследуемый периодический режим будет устойчивым, если все $\delta z^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$, а для этого необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения [1]

$$|\mu I + B| = 0 \tag{1.38}$$

были по модулю меньше единицы

$$|\mu| < 1 \tag{1.39}$$

Если неравенства (1.39) выполняются, то в системе имеет место устойчивый автоколебательный режим, период которого $2T$ определяется уравнениями (1.20) и (1.21). Изменения параметров $z$ и $\sigma$ в этом режиме найдутся по формулам (1.6) и (1.10).

**§ 2. Автоколебания в регулируемых системах с двумя сервомоторами постоянной скорости.** Системы автоматического регулирования с двумя регулирующими органами, имеющие два сервомотора постоянной скорости, описываются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + n_{k1}\xi_1 + n_{k2}\xi_2 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\dot{\xi}_1 = f_1(\sigma_1), \quad \sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{1\alpha} x_\alpha + r_{11}\xi_1 + r_{12}\xi_2 \tag{2.1}$$

$$\dot{\xi}_2 = f_2(\sigma_2), \quad \sigma_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{2\alpha} x_\alpha + r_{21}\xi_1 + r_{22}\xi_2$$

где $b_{k\alpha}$, $n_{k\beta}$, $j_{\beta\alpha}$ — постоянные коэффициенты, $x_k$, $\xi_\beta$ и $\sigma_\beta$ — переменные, а характеристики сервомоторов $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ имеют вид, изображенный на фиг. 1. Матричная форма уравнений (2.1) будет

$$\begin{gathered} \dot{x} = bx + n_1\xi_1 + n_2\xi_2 \\ \dot{\xi}_1 = f_1(\sigma_1), \quad \sigma_1 = j_1 x + r_{11}\xi_1 + r_{12}\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = f_2(\sigma_2), \quad \sigma_2 = j_2 x + r_{21}\xi_1 + r_{22}\xi_2 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Структура входящих в это уравнение матриц та же, что и в уравнениях (1.3) предыдущего параграфа.

При решении поставленной задачи нами будет использована каноническая форма уравнений (2.2)

$$\begin{gathered} \dot{z} = Jz + a_1 f_1(\sigma_1) + a_2 f_2(\sigma_2) \\ \dot{\sigma}_1 = \beta_1 z + r_{11} f_1(\sigma_1) + r_{12} f_2(\sigma_2) \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\dot{\sigma}_2 = \beta_2 z + r_{21} f_1(\sigma_1) + r_{22} f_2(\sigma_2) \tag{2.4}$$

Приведение уравнений (2.2) к форме (2.3) и (2.4) возможно при отсутствии у матрицы $b$ нулевых собственных значений.

Для периодического режима первого типа периода $2T$ будем иметь уравнения

$$\dot{z}^{*(1)} = Jz^{*(1)} + a_1 f_{10} + a_2 f_{20} \tag{2.5}$$

$$\dot{\sigma}_1^{*(1)} = \beta_1 z^{*(1)} + r_{11} f_{10} + r_{12} f_{20} \qquad (0 < t < \tau)$$

$$\dot{\sigma}_2^{*(1)} = \beta_2 z^{*(1)} + r_{21} f_{10} + r_{22} f_{20} \tag{2.6}$$

$$\dot{z}^{*(2)} = Jz^{*(2)} + a_1 f_{10} - a_2 f_{20} \tag{2.7}$$

$$\dot{\sigma}_1^{*(2)} = \beta_1 z^{*(2)} + r_{11} f_{10} - r_{12} f_{20} \qquad (\tau < t < T)$$

$$\dot{\sigma}_2^{*(2)} = \beta_2 z^{*(2)} + r_{21} f_{10} - r_{22} f_{20} \tag{2.8}$$

Решение уравнений (2.5) и (2.6) найдено ранее и имеет вид (1.6). После подстановки этих решений в (2.6) и (2.8) и интегрирования имеем

$$\begin{gathered}\sigma_s^{*(1)}(t) = \beta_s N(t)\{z_0^{*(1)} + J^{-1}(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} - (\beta_s J^{-1} a_1 - r_{s1}) f_{10} t - \\ - (\beta_s J^{-1} a_2 - r_{s2}) f_{20} t + D_s^{(1)} \\ \sigma_s^{*(2)}(t) = \beta_s N(t)\{z_0^{*(2)} + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\} - \\ - (\beta_s J^{-1} a_1 - r_{s1}) f_{10} t + (\beta_s J^{-1} a_2 - r_{s2}) f_{20} t + D_s^{(2)} \qquad (s = 1,2)\end{gathered} \tag{2.9}$$

причем постоянные, $D_s$, найденные из условий

$$\sigma_s^{*(1)}(0) = -\sigma_s^{*(2)}(T), \qquad \sigma_s^{*(1)}(\tau) = \sigma_s^{*(2)}(\tau) \qquad (s = 1,2) \tag{2.10}$$

равны

$$\begin{gathered}D_s^{(1)} = \beta_s J^{-2}\{[I + M(T)]^{-1}[I - M(T)]\, a_1 f_{10} - \\ - [I - 2(I + M(T))^{-1} M(T - \tau)\, a_2 f_{20}\} + \\ + (\beta_s J^{-1} a_1 - r_{s1}) f_{10} \tfrac{1}{2} T - (\beta_s J^{-1} a_2 - r_{s2}) f_{20} \left(\tfrac{1}{2} T - \tau\right) \\ D_s^{(2)} = -\beta_s J^{-2}\{[I + M(T)]^{-1}[I - M(T)]\, a_1 f_{10} + \\ + [I - 2(I + M(T))^{-1} M(-\tau)\, a_2 f_{20}\} + \\ + (\beta_s J^{-1} a_1 - r_{s1}) f_{10} \tfrac{1}{2} T - (\beta_s J^{-1} a_2 - r_{s2}) \left(\tfrac{1}{2} T + \tau\right)\end{gathered} \tag{2.11}$$

Нами предполагалось, что при $t = 0$ произошло переключение первого сервомотора, а при $t = \tau$ — второго. Поэтому следует потребовать, чтобы $\sigma_1(0) = \sigma_{10}$, $\sigma_2(\tau) = -\sigma_{20}$; это приведет к уравнениям периодов следующего вида:

$$\begin{gathered}\beta_1 J^{-2}\{(I + M(T))^{-1}(I - M(T))\, a_1 f_{10} - \\ - [I - 2(I + M(T))^{-1} M(T - \tau)]\, a_2 f_{20}\} + \\ + (\beta_1 J^{-1} a_1 - r_{11}) f_{10} \tfrac{1}{2} T - (\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20} \left(\tfrac{1}{2} T - \tau\right) = \sigma_{10} \\ \beta_2 J^{-2}\{[2(I + M(T))^{-1} - I]\, a_1 f_{10} - (I + M(T))^{-1}(I - M(T))\, a_2 f_{20}\} + \\ + (\beta_2 J^{-1} a_1 - r_{21}) \left(\tfrac{1}{2} T - \tau\right) - (\beta_2 J^{-1} a_2 - r_{22}) f_{20} \tfrac{1}{2} T = -\sigma_{20}\end{gathered} \tag{2.12}$$

К этим уравнениям нужно добавить условия переключения

$$-\dot{\sigma}_1^{*(2)}(T) > 0, \qquad \dot{\sigma}_2^{*(1)}(\tau) < 0 \tag{2.13}$$

Переходим к исследованию устойчивости найденного периодического режима. Для этого рассмотрим вместе с периодическим движением какое-либо непериодическое движение исследуемой системы, начальные условия которого

$$z(0) = z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} \tag{2.14}$$

мало отличаются от соответствующих значений $z_0^{*(1)}$ в периодическом режиме. Предположив, что при $t=0$ и $t=T'$ происходят переключения первого сервомотора, а при $t=\tau'$ переключается второй сервомотор, будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}^{(1)} &= Jz^{(1)} + a_1 f_{10} + a_2 f_{20} \qquad (0<t<\tau') \\ \dot{z}^{(2)} &= Jz^{(2)} + a_1 f_{10} - a_2 f_{20} \qquad (\tau'<t<T') \end{aligned} \tag{2.15}$$

решением которых, удовлетворяющим условиям (2.14), будет

$$\begin{aligned} z^{(1)}(t) &= M(t)(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + N(t)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20}) \\ z^{(2)}(t) &= M(t)(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + 2M(t-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + N(t)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Второе соотношение (2.16) позволяет вычислить значение столбца $z$ в момент второго переключения первого сервомотора:

$$\begin{gathered} z(T') = z^{(2)}(T') = -(z_0^{*(1)} + \delta z^{(1)}) = \\ = M(T')(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + 2M(T'-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + N(\tau')(a_1 f_{10} - a_2 f_{20}) \end{gathered}$$

что после разложения правой части в ряды по степеням $\delta T^{(0)} = T' - T$ и $\delta\tau^{(0)} = \tau' - \tau$ и отбрасывания слагаемых степени выше первой и несложных преобразований можно записать в форме

$$\begin{aligned} -\delta z^{(1)} = M(T)\delta z^{(0)} &+ 2(I + M(T))^{-1} M(T)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\delta T^{(0)} + \\ &+ 2M(T-\tau)a_2 f_{20}\delta\tau^{(0)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Для вычисления координаты $\sigma_1$ первого пускового устройства следует воспользоваться уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1^{(1)} &= \beta_1\{M(t)(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + N(t)(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} + \\ &\quad + r_{11} f_{10} + r_{12} f_{20} \qquad (0<t<\tau') \\ \dot{\sigma}_1^{(2)} &= \beta_1\{M(t)(z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)}) + 2M(t-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + \\ &\quad + N(t)(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\} + r_{11} f_{10} - r_{12} f_{20} \qquad (\tau'<t<T') \end{aligned}$$

интегрирование которых дает

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)}(t) &= \beta_1 N(t)\{z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} + J^{-1}(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} - \\ &\quad - (\beta_1 J^{-1} a_1 - r_{11}) f_{10} t - (\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20} t + D_1^{(1)} \\ \sigma_1^{(2)}(t) &= \beta_1 N(t)\{z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20}\} - \\ &\quad - (\beta_1 J^{-1} a_1 - r_{11}) f_{10} t + (\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20} t + D_1^{(2)} \end{aligned}$$

Из условий $\sigma_1^{(1)}(0) = \sigma_{10}$, $\sigma_1^{(1)}(\tau') = \sigma_1^{(2)}(\tau')$ определяем постоянные интегрирования

$$\begin{gathered} D_1^{(1)} = \sigma_{10} \\ D_1^{(2)} = \sigma_{10} + 2\beta_1 N(\tau')[J^{-1} - M(-\tau')N(\tau')]a_2 f_{20} - 2(\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20}\tau' \end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(2)}(t) = \sigma_{10} &+ \beta_1\{N(t)[z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + \\ &+ J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})] + 2N(\tau')[J^{-1} - M(-\tau')N(\tau')]a_2 f_{20}\} - \\ &- (\beta_1 J^{-1} a_1 - r_{11}) f_{10} t + (\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20}(t - 2\tau') \end{aligned} \tag{2.18}$$

При помощи этого соотношения найдем

$$\sigma_1^{(2)}(T') = -\sigma_{10} = \sigma_{10} + \beta_1 \{N(T')\,[z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')\,N(\tau')\,a_2 f_{20} + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})] - 2N(\tau')\,[J^{-1} - M(-\tau')\,N(\tau')]\,a_2 f_{20}\} - (\beta_1 J^{-1} a_1 - r_{11}) f_{10} T' + (\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20}(T' - 2\tau')$$

что после разложения правой части в ряд по степеням $\delta T^{(0)}$ и $\delta\tau^{(0)}$, подстановки $z_0{}^{*(1)}$ и проведения некоторых преобразований дает

$$\beta_1 \{N(T)\,\delta z^{(0)} + 2\,[I + M(T)]^{-1} J^{-1} M(T)\,[a_1 f_{10} - M(-\tau)\,a_2 f_{20}]\,\delta T^{(0)} + 2M(T-\tau)\,J^{-1} a_2 f_{20}\delta\tau^{(0)}\} - (\beta_1 J^{-1} a_1 - r_{11}) f_{10}\delta T^{(0)} + (\beta_1 J^{-1} a_2 - r_{12}) f_{20}(\delta T^{(0)} - \delta\tau^{(0)}) = 0 \qquad (2.19)$$

Перейдем к вычислению значений координаты $\sigma_2$ пускового устройства второго сервомотора в рассматриваемом непериодическом режиме. Так как нам известно значение $\sigma_2$ в момент $t = \tau'$ переключения второго сервомотора $\sigma_2(\tau') = -\sigma_{20}$, то мы можем найти изменение $\sigma_2$ в интервале $\tau' < t < T'$ из уравнения

$$\dot{\sigma}_2^{(2)} = \beta_2 \{M(t)\,[z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')\,N(\tau')\,a_2 f_{20}] + N(t)\,(a_1 f_{10} - a_{20} f_{20})\} + r_{21} f_{10} - r_{22} f_{20} \qquad (\tau' < t < T')$$

в следующем виде:

$$\sigma_2^{(2)}(t) = -\sigma_{20} + \beta_2\,[N(t) - N(\tau')]\,[z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')\,N(\tau')\,a_2 f_{20} + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})] - (\beta_2 J^{-1} a_1 - r_{21}) f_{10}(t - \tau') + (\beta_2 J^{-1} a_2 - r_{22}) f_{20}(t - \tau') \qquad (2.20)$$

Для того чтобы получить последнее уравнение для вычисления $\delta z^{(1)}$, $\delta T^{(0)}$ и $\delta\tau^{(0)}$, нам придется рассмотреть начало второго «полупериода». Значение координаты пускового устройства второго сервомотора в конце первого «полупериода», а значит, и в начале второго определителя по (2.20) выражением

$$\sigma_2^{(2)}(T') = -\sigma_{20} + \beta_2\,[N(T') - N(\tau')]\,[z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')\,N(\tau')\,a_2 f_{20} + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})] - (\beta_2 J^{-1} a_1 - r_{21}) f_{10}(T' - \tau') + (\beta_2 J^{-1} a_2 - r_{22}) f_{20}(T' - \tau') \qquad (2.21)$$

Прежде чем переходить к построению функции $\sigma_2$ в первом интервале $T' < t < T' + \tau''$ второго «полупериода», нам необходимо найти изменение параметров $z$ в этом интервале. Если отсчитывать время от момента переключения первого сервомотора и принять за начальные условия значения

$$z(0) = -(z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(1)}) \qquad (2.22)$$

то повторением соответствующих выкладок можно найти

$$z^{(1)}(t) = -M(t)\,(z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(1)}) - N(t)\,(a_1 f_{10} + a_2 f_{20}) \qquad (0 < t < \tau'') \qquad (2.23)$$

и, следовательно, $\sigma_2$ в этом интервале найдется из уравнения

$$\dot{\sigma}_2^{(1)} = -\beta_2 \{M(t)\,(z_0{}^{*(1)} + \delta z^{(1)}) - N(t)\,(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} - r_{21} f_{10} - r_{22} f_{20}$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию

$$\sigma_2^{(1)}(0) = \sigma_2^{(2)}(T')$$

где $\sigma_2^{(2)}(T')$ дается равенством (2.21), будет

$$\begin{gathered}\sigma_2^{(1)}(t) = -\sigma_{20} - \beta_2 \{N(t)[z_0^{*(1)} + \delta z^{(1)} + J^{-1}(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})] - \\ - [N(T') - N(\tau')][z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} + 2M(-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + \\ + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})]\} + (\beta_2 J^{-1} a_1 - r_{21}) f_{10}(t + \tau' - T') + \\ + (\beta_2 J^{-1} a_2 - r_{22}) f_{20}(t - \tau' + T')\end{gathered} \tag{2.24}$$

В конце первого интервала, при $t = \tau''$, происходит переключение второго сервомотора. Поэтому

$$\begin{gathered}\sigma_2^{(1)}(\tau'') = \sigma_{20} = -\sigma_{20} + \beta_2\{-N(\tau'')[z_0^{*(1)} + \delta z^{(1)} + \\ + J^{-1}(a_1 f_{10} + a_2 f_{20})] + [N(T') - N(\tau')][z_0^{*(1)} + \delta z^{(0)} + \\ + 2M(-\tau')N(\tau')a_2 f_{20} + J^{-1}(a_1 f_{10} - a_2 f_{20})]\} + \\ + (\beta_2 J^{-1} a_1 - r_{21}) f_{10}(\tau'' + \tau' - T') + (\beta_2 J^{-1} a_2 - r_{22}) f_{20}(\tau'' - \tau' + T')\end{gathered}$$

Разлагая правую часть этого соотношения в ряд по степеням $\delta z^{(1)}$, $\delta z^{(0)}$, $\delta T^{(0)}$, $\delta\tau^{(0)}$, $\delta\tau^{(1)}$, отбрасывая слагаемые степени выше первой, получим:

$$\begin{gathered}-\beta_2 J^{-1}[M(T) - I]\delta z^{(1)} + \beta_2[M(T) - M(\tau)]J^{-1}\delta z^{(0)} - \\ - 2\beta_2 J^{-1}[I + M(T)]^{-1}[M(\tau)a_1 f_{10} + M(T)a_2 f_{20}]\delta\tau^{(1)} + \\ + 2\beta_2 J^{-1}[I + M(T)]^{-1}M(T)[a_1 f_{10} - M(-\tau)a_2 f_{20}]\delta T^{(0)} + \\ + 2\beta_2 J^{-1}[I + M(T)]^{-1}\{-M(\tau)a_1 f_{10} + [M(-\tau)(I + M(T)) - \\ - M(T)a_2 f_{20}]\}\delta\tau^{(0)} + (\beta_2 J^{-1} a_1 - r_{21}) f_{10}(\delta\tau^{(1)} + \delta\tau^{(0)} - \delta T^{(0)}) + \\ + (\beta_2 J^{-1} a_2 - r_{22}) f_{20}(\delta\tau^{(1)} - \delta\tau^{(0)} + \delta T^{(0)}) = 0\end{gathered} \tag{2.25}$$

Уравнения (2.17), (2.19) и (2.25) показывают, что предположение о малости величин $\delta z^{(1)}$, $\delta T^{(0)}$, $\delta\tau^{(0)}$ и $\delta\tau^{(1)}$ при малом $\delta z^{(0)}$ справедливо.

Нами рассмотрен первый и начало второго «полупериода» движения системы. Мы можем аналогичным образом рассмотреть следующий второй «полупериод» и начало третьего, приняв за начальные условия равенство (2.22), и получить уравнения, отличающиеся от (2.17), (2.19) и (2.25) тем, что в них вместо малых величин $\delta z^{(0)}$, $\delta z^{(1)}$, $\delta T^{(0)}$, $\delta\tau^{(0)}$, $\delta\tau^{(1)}$ будут входить $\delta z^{(1)}$, $\delta z^{(2)}$, $\delta T^{(1)}$, $\delta\tau^{(1)}$ и $\delta\tau^{(2)}$. Продолжив этот процесс, на $s+1$-м этапе получим систему уравнений в конечных разностях:

$$\begin{gathered}-\delta z^{(s+1)} = M(T)\delta z^{(s)} + G\delta T^{(s)} + F\delta\tau^{(s)} \\ \beta_1 N(T)\delta z^{(s)} + Q_1\delta T^{(s)} + Q_2\delta\tau^{(s)} = 0 \\ -\beta_2 J^{-1}[M(T) - I]\delta z^{(s+1)} + \beta_2 J^{-1}[M(T) - M(\tau)]\delta z^{(s)} + \\ + R_1\delta T^{(s)} + R_2\delta\tau^{(s)} + R_2^*\delta\tau^{(s+1)} = 0\end{gathered} \tag{2.26}$$

Здесь

$$\begin{gathered}G = 2M(T)(I + M(T))^{-1}(a_1 f_{10} - M(-\tau)a_2 f_{20}), \qquad F = 2M(T - \tau)a_2 f_{20} \\ Q_1 = \beta_1 J^{-1}G - (\beta_1 J^{-1}a_1 - r_{11})f_{10} + (\beta_1 J^{-1}a_2 - r_{12})f_{20} \\ Q_2 = \beta_1 J^{-1}F + (\beta_1 J^{-1}a_2 - r_{12})f_{20} \\ R_1 = \beta_2 J^{-1}G - (\beta_2 J^{-1}a_1 - r_{21})f_{10} + (\beta_2 J^{-1}a_2 - r_{22})f_{20} \\ R_2 = 2\beta_2[I + M(T)]^{-1}\{-M(\tau)a_1 f_{10} + [M(-\tau)(M(T) + I) - M(T)]a_2 f_{20}\} + \\ + (\beta_2 J^{-1}a_1 - r_{21})f_{10} - (\beta_2 J^{-1}a_2 - r_{22})f_{20} \\ R_2^* = -2\beta_2[I + M(T)]^{-1}J^{-1}[M(\tau)a_1 f_{10} + M(T)a_2 f_{20}] + \\ + (\beta_2 J^{-1}a_1 - r_{21})f_{10} + (\beta_2 J^{-1}a_1 - r_{22})f_{20}\end{gathered} \tag{2.27}$$

Исследуемое периодическое движение будет устойчивым, если $\delta z^{(s)}$, $T^{(s)}$ и $\delta\tau^{(s)}$ будут беспредельно уменьшаться при увеличении номера. Для этого необходимо потребовать, чтобы все корни характеристического уравнения системы конечно-разностных уравнений (2.26) были по модулю меньше единицы. Характеристическое уравнение составляется так же, как и в предыдущем параграфе.

Как мы уже отмечали, использованным в этой работе приемом может быть решена задача об автоколебаниях в системах автоматического регулирования с тремя и более регулирующими органами, если в них имеются сервомоторы постоянной скорости или сервомоторы типа «да — нет». Могут быть рассмотрены также сервомоторы, имеющие другие характеристики, например сервомотор постоянной скорости с зоной нечувствительности.

§ 3. **Пример.** В предыдущих параграфах показано, что решение задачи об автоколебаниях в регулируемых системах с двумя регулирующими органами, имеющих два сервомотора типа «да — нет», сводится к нахождению корней системы двух трансцедентных уравнений. Особенно просто указанная задача решается в случае, когда все собственные значения матрицы $b$, характеризующей динамические свойства объекта регулирования, равны нулю, так как в этом случае вместо трансцедентных уравнений приходится решать систему двух алгебраических уравнений.

В качестве примера такого типа рассмотрим систему автоматического регулирования, уравнения которой имеют вид:

$$\dot{z}_1 = a_{11} f_1(\sigma_1) + a_{21} f_2(\sigma z), \qquad \dot{z}_2 = a_{12} f_1(\sigma_1) + a_{22} f_2(\sigma_2) \tag{3.1}$$

$$\sigma_1 = \gamma_{11} z_1 + \gamma_{12} z_2, \qquad \sigma_2 = \gamma_{21} z_1 + \gamma_{22} z_2 \tag{3.2}$$

Эти уравнения для удобства дальнейших выкладок запишем в матричной форме:

$$\dot{z} = a_1 f_1(\sigma_1) + a_2 f_2(\sigma_2) \tag{3.3}$$

$$\sigma_1 = \gamma_1 z, \qquad \sigma_2 = \gamma_2 z \tag{3.4}$$

где

$$z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Vmatrix}, \qquad a_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Vmatrix}, \qquad a_2 = \begin{Vmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Vmatrix}, \qquad \gamma_1 = \| \gamma_{11}, \ \gamma_{12} \|, \qquad \gamma_2 = \| \gamma_{21}, \ \gamma_{22} \| \tag{3.5}$$

Матрица $b$ в этом случае тождественно равна нулю, и мы имеем случай двойного нулевого корня с простыми элементарными делителями.

Следует отметить, что хотя уравнения движения и записаны в канонической форме, это мало сужает область применимости результатов, так как именно уравнениями вида (3.1) описывается поведение некоторых объектов регулирования (паровая турбина с одним отбором пара при отсутствии самовыравнивания, паровой котел и т. д.).

Для разыскания периода автоколебаний $2T$ нам необходимо воспользоваться уравнениями (1.20) и (1.21). Входящие в эти уравнения матрицы $M(t)$ и $N(t)$ имеют в нашем случае вид:

$$M(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = I, \qquad N(t) = \begin{Vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{Vmatrix} = tI \tag{3.6}$$

и поэтому

$$M(T) = M(T - \tau) = I, \qquad N(T) = TI, \qquad N(\tau) = \tau I$$

$$I + M(T) = 2I, \qquad [I + M(T)]^{-1} = \frac{1}{2} I \tag{3.7}$$

Подстановка этих значений в (1.20) и (1.21) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} T\gamma_1 a_1 f_{10} - (T - 2\tau)\gamma_1 a_2 f_{20} &= -2\sigma_{10} \\ (T - 2\tau)\gamma_2 a_1 f_{10} - T\gamma_2 a_2 f_{20} &= 2\sigma_{20} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Отметим, что коэффициенты в этих уравнениях являются скалярными величинами, так как

$$\begin{aligned} \gamma_1 a_1 &= \gamma_{11} a_{11} + \gamma_{12} a_{21}, & \gamma_1 a_2 &= \gamma_{11} a_{12} + \gamma_{12} a_{22} \\ \gamma_2 a_1 &= \gamma_{21} a_{11} + \gamma_{22} a_{21}, & \gamma_2 a_2 &= \gamma_{21} a_{12} + \gamma_{22} a_{22} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Уравнения (3.8) можно также переписать в форме

$$\begin{aligned} (\gamma_1 a_1 f_{10} - \gamma_1 a_2 f_{20})\, T + 2\gamma_1 a_2 f_{20} \tau &= -2\sigma_{10} \\ (\gamma_2 a_1 f_{10} - \gamma_2 a_2 f_{20})\, T - 2\gamma_2 a_1 f_{10} \tau &= 2\sigma_{20} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Если определитель этой системы отличен от нуля:

$$\Delta = -2\gamma_1 (a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\, \gamma_2 a_1 f_{10} - 2\gamma_2 (a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\, \gamma_1 a_2 f_{20} \neq 0$$

то решение уравнений (3.10) найдется в форме

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{\Delta} \{\sigma_{10} \gamma_2 a_1 f_{10} + \sigma_{20} \gamma_1 a_2 f_{20}\} \\ \tau &= \frac{2}{\Delta} \{\sigma_{20} \gamma_1 (a_1 f_{10} - a_2 f_{20}) + \sigma_{10} \gamma_2 (a_1 f_{10} - a_2 f_{20})\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Решение уравнений типа (3.10), соответствующих периодическому решению второго типа, имеет вид:

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{\Delta} \{\sigma_{10} \gamma_2 a_1 f_{10} + \sigma_{20} \gamma_1 a_2 f_{20}\} \\ \tau &= \frac{2}{\Delta} \{\sigma_{20} \gamma_1 (a_2 f_{20} - a_1 f_{10}) + \sigma_{10} \gamma_2 (a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$\Delta = -2\gamma_1 (a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\, \gamma_2 a_1 f_{10} + 2\gamma_2 (a_1 f_{10} + a_2 f_{20})\, \gamma_1 f_{20} a_2$$

При дальнейшем исследовании следует отбросить решения (3.11) и (3.12), не удовлетворяющие неравенствам $T_1 > \tau > 0$.

Условия переключения имеют вид:

$$\gamma_1 a_1 f_{10} - \gamma_1 a_2 f_{20} < 0, \qquad \gamma_2 a_1 f_{10} + \gamma_2 a_2 f_{20} < 0 \tag{3.13}$$

а в случае периодического режима второго типа запишутся в форме

$$\gamma_1 a_1 f_{10} + \gamma_1 a_2 f_{20} < 0, \qquad \gamma_2 a_1 f_{10} - \gamma_2 a_2 f_{20} > 0 \tag{3.14}$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты характеристического уравнения (1.38), значения корней которого (1.39) решают вопрос об устойчивости, не будут зависеть от $T$ и $\tau$ и, следовательно, устойчивость автоколебаний определяется в рассматриваемом случае динамическими свойствами самого объекта и передаточными числами суммирующих устройств.

Поступила 2 VII 1954

Ленинградский политехнический институт

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бромберг П. В. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. Оборонгиз, 1953.
2. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.