Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ

Е. П. Морозова

(Чита)

Однородное симметричное твердое тело вращения, масса которого равна M, подвешено на струне OO_1 длины l, верхний конец O которой расположен в вертикальном подшипнике. Точкой крепления струны к твердому телу (точка O_1, лежащая на оси симметрии тела) будем называть начало нижнего отрезка O_1G струны, жестко заделанного в твердом теле. Точка G— центр масс тела. В начальный момент твердому телу сообщена угловая скорость ω вращения вокруг оси симметрии, причем струна и ось вращения твердого тела расположены на одной вертикали. При исследовании устойчивости такого движения ввиду сложности задачи рассматривается упрощенная схема механической системы и не учитываются силы сопротивления. Струна считается абсолютно гибкой, безинерционной и не поддающейся кручению. Начало неподвижной системы осей координат $O\xi\eta\zeta$ возьмем в точке выхода струны из подшипника, ось ζ направим по вертикали вверх, оси ξ, η расположены в горизонтальной плоскости. Подвижные оси координат $Gxyz$, неизменно связанные с твердым телом, направим по главным центральным осям инерции твердого тела. Ось Gz совпадает с осью симметрии тела.

Рассматриваемая механическая система голономна и имеет пять степеней свободы. За обобщенные координаты системы возьмем углы α, β, ψ, θ, φ. Первые два угла α и β определяют положение оси O_1O, направленной по струне от точки крепления ее к твердому телу к точке выхода струны из подшипника; β — угол между плоскостью $\xi O\zeta$ и прямой OD, являющейся продолжением отрезка O_1O; α — угол между осью $O\zeta$ и проекцией прямой OD на плоскость $\xi O\zeta$.

Положение твердого тела относительно центра масс будем определять тремя углами ψ, θ, φ. Для того чтобы от системы осей координат $G\xi_1\eta_1\zeta_1$, остающихся параллельными неподвижным осям $O\xi\eta\zeta$, перейти к осям $Gxyz$, неизменно связанным с твердым телом (фиг. 1), повернем сначала систему осей $\xi_1\eta_1\zeta_1$ вокруг оси η_1 на угол ψ, затем полученную систему $NM\eta_1$ — вокруг оси N на угол θ так, чтобы ось M перешла в ось z, и третий поворот — вокруг оси z на угол φ.

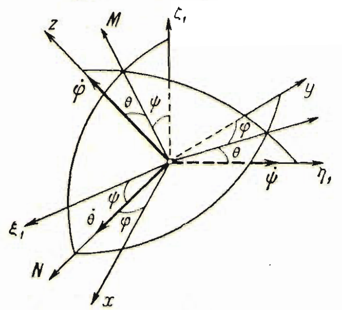
Косинусы углов между осями xyz и $\xi_1\eta_1\zeta_1$ даны в таблице.

	x	y	z
ξ_1	$\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$	$-\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\psi\cos\theta$
η_1	$\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$-\sin\theta$
ζ_1	$-\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi$	$\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\psi\cos\theta$

Проекции мгновенной угловой скорости твердого тела на подвижные оси xyz будут

$$p = \dot\psi\cos\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,\quad q = \dot\psi\cos\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\quad r = \dot\varphi - \dot\psi\sin\theta \tag{1}$$

Координаты центра масс твердого тела определяются формулами



Фиг. 1

$$\xi_G = -l\sin\alpha\cos\beta + a\sin\psi\cos\theta$$
$$\eta_G = l\sin\beta - a\sin\theta \tag{2}$$
$$\zeta_G = -l\cos\alpha\cos\beta + a\cos\psi\cos\theta$$

где a — расстояние центра масс G до точки O_1 крепления струны к твердому телу, причем $a > 0$, если центр масс лежит выше точки O_1.

Дифференциальные уравнения движения механической системы запишем в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

Живая сила будет равна

$$T = \tfrac{1}{2}A^*(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\cos^2\theta) + \tfrac{1}{2}C(\dot\varphi - \dot\psi\sin\theta)^2 + S \tag{3}$$

где $A = B$, C — главные центральные моменты инерции твердого тела,

$$A^* = A + Ma^2$$
$$S = \tfrac{1}{2}Ml^2(\dot\beta^2 + \dot\alpha^2\cos^2\beta) - Mal\,\{\dot\alpha\dot\psi\cos\theta\cos\beta\cos(\psi-\alpha) +$$
$$+ \dot\theta\dot\beta\sin\theta\sin\beta\cos(\psi-\alpha) + \dot\theta\dot\beta\cos\beta\cos\theta - \dot\theta\dot\alpha\sin\theta\cos\beta\sin(\psi-\alpha) +$$
$$+ \dot\beta\dot\psi\sin\beta\cos\theta\sin(\psi-\alpha) \tag{4}$$

Функция S зависит от l и при $l = 0$ обращается в нуль.

Из внешних сил, действующих на механическую систему, учитывается только сила тяжести, которая имеет силовую функцию

$$U = Mgl\cos\alpha\cos\beta - Mga\cos\psi\cos\theta \tag{5}$$

Уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left\{A^*\dot\psi\cos^2\theta - C(\dot\varphi - \dot\psi\sin\theta)\sin\theta + \frac{\partial S}{\partial\dot\psi}\right\} - \frac{\partial S}{\partial\psi} = Mga\sin\psi\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left\{A^*\dot\theta + \frac{\partial S}{\partial\dot\theta}\right\} + A^*\dot\psi^2\cos\theta\sin\theta + C(\dot\varphi - \dot\psi\sin\theta)\dot\psi\cos\theta - \frac{\partial S}{\partial\theta} = Mga\cos\psi\sin\theta$$

$$C\frac{d}{dt}\{\dot\varphi - \dot\psi\sin\theta\} = 0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial\dot\alpha}\right) - \frac{\partial S}{\partial\alpha} = -Mgl\sin\alpha\cos\beta \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial\dot\beta}\right) - \frac{\partial S}{\partial\beta} = -Mgl\cos\alpha\sin\beta$$

Дифференциальные уравнения (6) имеют очевидное решение

$$\psi = 0,\quad \theta = 0,\quad \alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \dot\varphi = \omega = \mathrm{const}$$

Это решение определяет следующее движение механической системы: твердое тело, подвешенное на струне, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг главной центральной оси; струна и ось вращения твердого тела расположены на вертикальной оси ζ.

Примем это движение за невозмущенное и исследуем его устойчивость.

Уравнения (6) представляют собой уравнения возмущенного движения. Они имеют три первых интеграла: интеграл энергии, интеграл площадей и интеграл $r = \mathrm{const}$. Исследование устойчивости невозмущенного движения будем проводить прямым методом Ляпунова. Функцию Ляпунова построим методом Н. Г. Четаева[3]. Примем в дальнейшем следующие обозначения вариаций переменных и их скоростей:

$$\psi = u, \quad \dot{\psi} = u_1, \quad \theta = v, \quad \dot{\theta} = v_1, \quad \dot{\varphi} = \omega + w, \quad \alpha = \gamma, \quad \dot{\alpha} = \gamma_1, \quad \beta = \delta, \quad \dot{\beta} = \delta_1$$

Первые интегралы уравнений возмущенного движения запишутся:

интеграл энергии

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} A^* (v_1^2 + u_1^2 \cos^2 v) + \frac{1}{2} Ml^2 (\delta_1^2 + \gamma_1^2 \cos^2 \delta) + \frac{1}{2} Cw^2 + \frac{1}{2} Cu_1^2 \sin^2 v + \\ + C\omega w - C\omega u_1 \sin v - Cwu_1 \sin v - Mal\, [\gamma_1 u_1 \cos\delta \cos v \cos(u-\gamma) + \\ + v_1 \delta_1 \sin v \sin\delta \cos(u-\gamma) + v_1\delta_1 \cos v \cos\delta - v_1\gamma_1 \sin v \cos\delta \sin(u-\gamma) + \\ + \delta_1 u_1 \sin\delta \cos v \sin(u-\gamma)] - Mg\,(l\cos\gamma\cos\delta - a\cos u \cos v) = k_1 = \mathrm{const}\end{gathered} \tag{7}$$

интеграл площадей

$$\begin{gathered}A^* (u_1 \sin v \cos v \cos u - v_1 \sin u) + C(\omega + w - u_1 \sin v) \cos u \cos v + \\ + Ml^2 (\gamma_1 \sin\delta \cos\delta \cos\gamma - \delta_1 \sin\gamma) - Mal\, [u_1 \sin\delta \cos u \cos v - \\ - v_1 (\cos v \cos\delta \sin\gamma + \sin\delta \sin v \sin u + \gamma_1 \sin v \cos\delta \cos\gamma) - \\ - \delta_1 (\cos\delta \sin u \cos v + \sin v \sin\delta \sin\gamma)] = k_2 = \mathrm{const}\end{gathered} \tag{8}$$

интеграл $r = \mathrm{const}$

$$w - u_1 \sin v = k_3 = \mathrm{const} \tag{9}$$

Рассмотрим линейную комбинацию первых интегралов

$$V = 2\lambda k_1 - 2\mu k_2 + 2\nu k_3 \quad (\lambda,\ \mu,\ \nu \text{ — произвольные постоянные}) \tag{10}$$

Выделив линейную и квадратичную части в функции V и затем положив $\nu = C(\mu - \lambda\omega)$, для того чтобы линейная часть обратилась в нуль, запишем функцию V с точностью до постоянной в виде

$$V = \lambda C w^2 + V_2 + V^* \tag{11}$$

Здесь V_2 — квадратичная форма восьми переменных

$$\begin{gathered}V_2 = (C_1\omega - G)(u^2 + v^2) - 2A_1 u_1 v + 2A_1 u v_1 + 2Lv\gamma_1 - \\ - 2L\delta_1 u + A_2 (u_1^2 + v_1^2) - 2Lv_1\delta_1 - 2L_1 u_1 \gamma_1 - 2Lv_1\gamma + \\ + 2Lu_1\delta + B(\gamma_1^2 + \delta_1^2) + G_1(\gamma^2 + \delta^2) + 2B\delta_1\gamma - 2B\gamma_1\delta\end{gathered} \tag{12}$$

с коэффициентами

$$\begin{gathered}C_1\omega - G = \mu C\omega - \lambda Mga, \quad A_1 = \mu A^*, \quad L = \mu Mal, \\ A_2 = \lambda A^*, \quad L_1 = \lambda Mal, \quad B = \mu Ml^2, \quad B_1 = \lambda Ml^2, \quad G_1 = \lambda Mgl\end{gathered} \tag{13}$$

V^* содержит члены выше второго порядка малости. Производная функции V в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения будет равна нулю, так как V есть линейная связка первых интегралов уравнений движения. Если возможно подобрать такие две произвольные постоянные λ, μ, чтобы функция V была знакоопределенной, то можно заключить, что невозмущенное движение устойчиво на основании первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения механической системы.

Функция V будет знакоопределенной в окрестности начала координат H, если квадратичная форма V_2 будет определенно-положительна (определенно-отрицательна) при $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). Возьмем $\lambda > 0$. Согласно критерию Сильвестра функция V_2 будет определенно-положительна, если будут выполняться неравенства

$$\Delta_1 = C_1\omega - G > 0, \qquad \Delta_3 = (C_1\omega - G)\left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right] > 0$$

$$\Delta_2 = (C_1\omega - G)^2 > 0, \quad \Delta_4 = \left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right]^2 > 0$$

$$\Delta_5 = \left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right]\{G_1\left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right] - L^2(C_1\omega - G)]\} > 0$$

$$\Delta_6 = \{G_1\left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right] - L^2(C_1\omega - G)\}^2 > 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Delta_7 = \{G_1\left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right] - L^2(C_1\omega - G)\}\{(B_1G_1 - B^2)\times \\ \times\left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right] + (2BLL_1 - G_1L_1^2 - B_1L^2)(C_1\omega - G) + \\ + \left[L^4 + 2A_1G_1LL_1 - 2A_1BL^2 - A_2G_1L^2\right]\} > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_8 = \{(B_1G_1 - B^2)\left[A_2(C_1\omega - G) - A_1^2\right] + (2BLL_1 - G_1L_1^2 - B_1L^2)(C_1\omega - G) + \\ + L^4 + 2A_1G_1LL_1 - 2A_1BL^2 - A_2G_1L^2\}^2 > 0\end{aligned}$$

Система неравенств (14) будет справедлива, если будут выполнены одновременно следующие четыре неравенства (при $l > 0$):

$$nC\omega - Mga > 0 \qquad (n = \mu/\lambda) \tag{15}$$

$$-n^2A^* + nC\omega - Mga > 0$$

$$-n^3C\omega Ma^2l + n^2(M^2ga^3l - A^{*2}g) + nA^*gC\omega - A^*Mg^2a > 0$$

$$n^4Al - C\omega ln^3 + g[Ma(l-a) - A]n^2 + nC\omega g - Mg^2a > 0$$

Из неравенств (15) легко получить условие устойчивости вращения твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа, положив $l = 0$.

В ряду неравенств (15) останутся тогда существенными только два первых неравенства:

$$nC\omega - Mga > 0, \qquad -n^2A^* + nC\omega - Mga > 0 \tag{16}$$

где A^*, C — моменты инерции относительно главных осей эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки. Если эти неравенства выполняются одновременно для некоторого значения n, то вращение твердого тела вокруг оси симметрии будет устойчивым.

Первое неравенство (16) выполняется для всех

$$n > n_0 = \frac{Mga}{C\omega}$$

Второе неравенство (16) для $n_2 < n < n_1$, где

$$n_{1,2} = \frac{C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 - 4A^*Mga}}{2A^*}$$

если корни квадратного многочлена вещественны, т. е. при условии

$$C^2\omega^2 - 4A^*Mga > 0 \tag{17}$$

Тогда, следовательно, выполняются неравенства

$$\frac{Mga}{C\omega} < \frac{C\omega}{4A^*} < \frac{C\omega + \sqrt{C^2\omega^2 - 4A^*Mga}}{2A^*} \quad \text{или } n_0 < n_1$$

Итак, если выполнено неравенство (17), то на оси n существует бесчисленное множество значений n в интервале $n_0 < n < n_1$, для которых оба неравенства (16) выполняются.

Полученное неравенство (17) есть известное условие устойчивости майевского вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа.

Условиями устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне, будут условия существования по крайней мере одного значения параметра n, при котором неравенства (15) выполняются одновременно, ибо тогда построенная функция V будет удовлетворять условиям первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения механической системы. При больших угловых скоростях ω такое n всегда существует.

Знаки левых частей неравенств (15) будут такими же, что и знаки членов, содержащих ω. Они будут положительны, когда n лежит в интервале $0 < n < \sqrt{g/l}$. Таким образом, твердое тело, подвешенное на струне, будет иметь устойчивое вращение вокруг оси симметрии при достаточно большой угловой скорости. Величина угловой скорости, начиная с которой твердое тело будет иметь устойчивое вращение, существенно зависит от условия крепления струны к твердому телу.

1. Точка крепления струны к твердому телу расположена выше центра масс твердого тела $a < 0$. Можно всегда выбрать n достаточно малым, чтобы неравенства (15) были справедливы при любой угловой скорости.

2. Струна крепится в центре масс твердого тела $a = 0$. Неравенства (15) запишутся в виде (18)

$$nC\omega > 0, \quad n(C\omega - nA) > 0, \quad Agn(C\omega - nA) > 0, \quad n(C\omega - nA)(g - ln^2) > 0$$

Эти неравенства (18) выполняются одновременно, если n выбрать так:

$$0 < n < \min\left\{\frac{C\omega}{A}, \sqrt{\frac{g}{l}}\right\} \tag{19}$$

Таким образом, твердое тело, подвешенное на струне в центре масс, будет иметь устойчивое стационарное вращение вокруг главной центральной оси при отличной от нуля угловой скорости ω (ω — абсолютное значение угловой скорости).

3. При решении вопроса об устойчивости движения твердого тела, вращающегося на струне, когда точка крепления струны к твердому телу лежит ниже центра масс $a > 0$, воспользуемся известной теоремой[5].

Дана квадратичная форма[1]

$$V = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{20}$$

коэффициенты которой a_{ij} зависят от параметров $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Пусть при $\sigma_1 = \sigma_1^*, \ldots, \sigma_k = \sigma_k^*$ квадратичная форма V определенно-положительна, следовательно, выполнены неравенства Сильвестра $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

[1] Теорема сообщена Б. С. Разумихиным.

Последнее неравенство $\Delta_n > 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) & a_{12}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\ldots a_{1n}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) \\ a_{21}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) & a_{22}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\ldots a_{2n}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) & a_{n2}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\ldots a_{nn}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) \end{vmatrix} > 0 \qquad (21)$$

определяет многосвязную область L в k-мерном пространстве параметров $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$, которая состоит из ряда односвязных областей $L_1,\ldots,L_r$.

Тогда область значений параметров $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$, внутри которой квадратичная форма определенно-положительна, совпадает с той из совокупности односвязных областей $L_1,\ldots,L_r$, определяемых неравенством $\Delta_n > 0$, которая содержит точку $\{\sigma_k^*,\ldots,\sigma_k^*\}$.

Следовательно, при непрерывном изменении параметров системы от их значений $\sigma_1^*,\ldots,\sigma_k^*$ в ряду неравенств Сильвестра первым нарушится последнее неравенство $\Delta_n > 0$.

Для рассматриваемой квадратичной формы V_2 нарушение неравенства $\Delta_8 > 0$ эквивалентно нарушению неравенства

$$y(n) = Aln^4 - C\omega ln^3 - g\,[A - Ma(l-a)]\,n^2 + nC\omega g - Mg^2a > 0 \qquad (22)$$

Левая часть неравенства (22) есть многочлен четвертой степени относительно n, который всегда имеет два действительных корня на интервалах $(-\infty, -\sqrt{g/l})(\sqrt{g/l}, +\infty)$. Если $y(n)$ имеет четыре действительных корня, то два из них расположены на интервале $(0, \sqrt{g/l})$.

Нам известно, что при значениях параметров A^*, C^*, l^*, ω^*, $a^* = 0$ и значениях n, принадлежащих интервалу $0 < n < \min\{C\omega/A, \sqrt{g/l}\}$, выполнены все неравенства Сильвестра. При непрерывном изменении параметров A, C, l, ω, $a > 0$ первым нарушится последнее неравенство $(\Delta_8 > 0)$. В этом случае $y(n)$ не имеет положительных значений на интервале $(0, \sqrt{g/l})$ и, следовательно, многочлен четвертой степени $y(n)$ будет иметь только два действительных корня.

Таким образом, условием существования такого n, при котором справедливы все неравенства (14) одновременно, будет условие существования четырех действительных корней у многочлена $y(n)$. Это условие согласно Хальфен[4] можно записать в следующем виде:

$$3g\,\{\tfrac{1}{4}C^2\omega^2 l\,[A + Mal - \tfrac{1}{2}Ma^2] + g\,[Ma(l-a) - A]\times$$
$$\times[AMal + \tfrac{1}{36}(Ma(l-a) - A)^2]\}^2 - 4\,\{\tfrac{1}{4}C^2\omega^2 l + \tfrac{1}{12}g\,[Ma(l-a) - A]^2 -$$
$$- AMgla\}^3 < 0 \qquad (22)$$

Это условие и будет условием устойчивости движения твердого тела, вращающегося на струне, когда точка крепления струны к твердому телу расположена ниже центра масс твердого тела.

Поступила 11 II 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГИТТЛ, 1946.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, в. 1, 1954
4. Halphen. Nouvelles annales de mathématiques, p. 34—35, 1885.
5. Жуковский Н. Е. О прочности движения, Собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1948.