

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Н. Жигулев

(Москва)

Определяется класс точных решений уравнений околозвуковых плоских и осесимметрических течений. Плоские течения этого класса, начинающиеся от прямолинейной линии перехода, известны.

В этом классе наряду с другими содержатся плоские и осесимметрические течения в соплах, имеющих излом образующей в точке достижения звуковой скорости, в окрестности прямолинейной линии перехода.

§ 1. Уравнения осесимметрических и плоских околозвуковых течений газа, как известно (см., например, [1]) имеют вид:

$$-u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{v}{y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

где u и v являются добавками к скорости, равной скорости звука a_∞ (направленной вдоль x) вдоль осей x и перпендикулярной к ней y соответственно, отнесенные к величине $a_\infty/(x+1)$; здесь x — показатель адиабаты, $\delta = 0$ для случая плоского движения газа и $\delta = 1$ для случая движения с осевой симметрией (x — ось симметрии).

Будем искать такие решения уравнений (1.1), где u и v представимы следующими функциями:

$$u = u_1(x)u_2(y), \quad v = v_1(x)v_2(y) \quad (1.2)$$

Тогда функции u_1, u_2, v_1, v_2 удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (λ_1 и λ_2 — произвольные действительные постоянные):

$$v_1''v_1' = \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} v_1, \quad u_1 = \lambda_2 v_1', \quad u_2'' + \delta \frac{u_2'}{y} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} u_2^2, \quad v_2 = \lambda_2 u_2' \quad (1.3)$$

Пусть $v_1^* = (\lambda_2^2/\lambda_1)v_1$, $u_2^* = (\lambda_1/\lambda_2)u_2$, тогда система уравнений (1.3) примет вид:

$$v_1^{*''}v_1^{*'} = v_1^*, \quad u_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1^{*'}, \quad u_2^{*''} + \delta \frac{u_2^{*'}}{y} = u_2^{*2}, \quad v_2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} u_2^{*'} \quad (1.4)$$

Поэтому $u = u_1u_2 = v_1^*u_2^*$, $v = v_1v_2 = v_1^*u_2^*$, т. е. не зависят от выбора λ_1 и λ_2 . Следовательно, случай любого ненулевого выбора постоянных λ_1 и λ_2 может быть выражен через тот случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, что мы в дальнейшем и будем полагать.

Замечание. Если $\lambda_1 = 0$, то течение будет $u = \lambda_2 c_1 (c_3 y + c_4)$, $v = \lambda_2 c_3 (c_1 x + c_2)$.

§ 2. Как видно на основании (1.3), зависимость скоростей u и v от x для рассматриваемого класса решений одинакова у плоских и осесимметрических течений. Исследуем ее. Из уравнения (1.3) для v_1 последовательно имеем

$$v_1'^2 \frac{dv_1'}{dv_1} = v_1, \quad v_1'^3 = \frac{3}{2} v_1^2 + \alpha_1^3, \quad \int \frac{dv_1}{V \frac{3}{2} v_1^2 + \alpha_1^3} = x + D_1 \quad (2.1)$$

где α_1 и D_1 — произвольные постоянные. Интеграл (2.1) следующим образом выражается через эллиптические интегралы:

$$\text{sign } v_1 \left[(x + D_1) \sqrt{\frac{2}{3}} \right] = 3^{-1/4} V |\alpha_2| \left[(\text{sign } \alpha_1 + \sqrt{3}) F(k\varphi) + \right. \quad (2.2) \\ \left. + 2\sqrt{3} \text{tg } \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - 2\sqrt{3} E(k\varphi) \right], \quad \varphi = 2 \arctg \left[\frac{(\frac{3}{2} v_1^2 + \alpha_1^3)^{1/2} - \alpha_1}{V \frac{3}{2} |\alpha_1|} \right]^{1/2}$$

$$\text{sign } v_1 = \text{sign} \left[(x + D_1) \left(\frac{3}{2} v_1^2 + \alpha_1^3 \right)^{1/2} \right], \quad k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sign } \alpha_1 \right)$$

Приближенно формулу (2.2) для той области, где $|v_1^2 / \alpha_1^3| \ll 1$, можно переписать в виде

$$v_1 = \text{sign } \alpha_1 \frac{x + D_1}{V \frac{3}{2}} \left(\frac{1}{4} (x + D_1)^2 + \frac{3}{2} \alpha_1 (x + D_1) + 3\alpha_1^2 \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

Следует отметить также важное для дальнейшего решение исходного уравнения (2.1), когда $\alpha_1 = 0$:

$$v_1 = \frac{1}{18} (x + D_1)^3, \quad u_1 = \frac{1}{6} (x + D_1)^2 \quad (2.4)$$

§ 3. Исследуем зависимость рассматриваемого класса решений от координаты y для плоского случая. Из уравнения (1.3) для u_2 последовательно имеем

$$u_2' \frac{du_2'}{du_2} = u_2^2, \quad u_2'^2 = \frac{2}{3} (u_2^3 - \alpha_2^3), \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{du_2}{V u_2^3 - \alpha_2^3} = \pm (y + D_2) \quad (3.1)$$

где α_2 и D_2 — произвольные постоянные. Интеграл (3.1) может быть представлен при помощи введения функции амплитуды, являющейся обращением эллиптического интеграла 1-го рода в тригонометрической форме:

$$u_2 = \alpha_2 + \sqrt{3} |\alpha_2| \left[\text{tg } \frac{1}{2} \text{am} \left(\frac{V \frac{2}{3} |\alpha_2|}{3^{1/4}} (y + D_2); k \right) \right]^2, \quad k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sign } \alpha_2 \right) \quad (3.2)$$

В случае $\alpha_2 > 0$ имеем $k^2 = 0.067$, т. е. k^2 — величина малая, поэтому для u_2 приближенно получим

$$u_2 \approx \alpha_2 \left[1 + \sqrt{3} \text{tg}^2 12^{-1/4} \sqrt{\alpha_2} (y + D_2) \right] \quad (3.3)$$

В случае $\alpha_2 < 0$ имеем $k^2 = 0.933$, т. е. разность $1 - k^2$ будет малой величиной; поэтому для u_2 приближенно получим

$$u_2 \approx \alpha_2 \left[1 - \sqrt{3} \text{th}^2 12^{-1/4} \sqrt{|\alpha_2|} (y + D_2) \right] \quad (3.4)$$

Последнее представление пригодно лишь в некоторой окрестности точки $y + D_2 = 0$, так как особая точка функции $u_2(y)$ на основании (3.2) в этом случае существует и располагается на конечном расстоянии от точки $y + D_2 = 0$.

Итак, функция $u_2(y)$ обращается в бесконечность, как $(y - y^*)^{-2}$, в точках, удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{am} \left[\frac{\sqrt{2} |\alpha_2|}{3^{1/4}} (y^* + D_2); k \right] = (2i + 1) \pi \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

сохраняет знак в полосе $0 \leq y + D_2 \leq (y^* + D_2)_0$ в случае $\alpha_2 > 0$ и непрерывно меняет знак для случая $\alpha_2 < 0$, причем $u_2|_{y+D_2=0} < 0$.

Следует отметить также решение уравнения (3.1) в случае $\alpha_2 = 0$:

$$u_2 = 6(y + D_2)^{-2}, \quad v_2 = -12(y + D_2)^{-3} \quad (3.5)$$

§ 4. Выясним теперь характер зависимости исследуемого класса течений от координаты y для случая осевой симметрии. Уравнение для определения u_2 имеет вид:

$$u_2'' + \frac{u_2'}{y} = u_2^2 \quad (4.1)$$

Умножив уравнение (4.1) на y , можно записать

$$(u_2 y)' = y u_2^2$$

или, интегрируя в промежутке $y_0 \leq t \leq y$ (возможность чего предполагаем), получим

$$u_2' = \frac{y_0}{y} u_2'(y_0) + \frac{1}{y} \int_{y_0}^y t u_2^2(t) dt \quad (4.2)$$

Пусть $u_2'(y_0) = 0$; будем интересоваться точками $y \geq y_0 > 0$. Интеграл представляет собой статический момент площади, ограниченной кривыми

$$z = u_2^2(t), \quad z = 0, \quad t = y_0, \quad t = y$$

относительно оси $t = 0$; в силу монотонности кривой $u_2 = u_2(t)$, очевидной на основании (4.2), в выражении

$$\int_{y_0}^y t u_2^2(t) dt = y^0 \int_{y_0}^y u_2^2(t) dt$$

величина $y^0 > \frac{1}{2} y$ для любых $y_0 > 0$.

Выражение (4.2) может быть переписано:

$$u_2' = \Theta(y) \int_{y_0}^y u_2^2(t) dt, \quad \frac{1}{2} < \Theta(y) < 1 \quad (4.3)$$

Сопоставим с уравнением (4.3) следующие уравнения:

$$(a) u_*' = \frac{1}{2} \int_{y_0}^y u_*^2(t) dt, \quad (b) u_{**}' = \int_{y_0}^y u_{**}^2(t) dt \quad (4.4)$$

Очевидно, если $u_*(y_0) = u_{**}(y_0) = u_2(y_0)$; $u_*'(y_0) = u_{**}'(y_0) = 0$, то всюду, где действительны уравнения (4.3) и (4.4),

$$u_*(y) < u_2(y) < u_{**}(y)$$

Введя в уравнение (4.4) (а) функцию $\bar{u}(t) = \frac{1}{2} u_*(t)$ и дифференцируя уравнения (4.4) по y , приходим к виду, разобранным в § 3.

Таким образом, приходим к выводу, что исследуемая функция $u_2(y)$, имеющая в некоторой точке $y = y_0$ произвольное значение $u_2(y_0)$ и производную $u_2'(y_0) = 0$, непременно в конечной точке $y = y_1$ примет бесконечное

значение, причем точка $y = y_1$ будет полюсом второго порядка, так как, представляя в окрестности $y = y_1$ функцию $u_2(y)$ в виде $c(y - y_1)^{-n}$, получим из уравнения (4.2) $n = 2$; бесконечность типа $\ln(y - y_1)$ не может существовать в точке $y_1 \neq 0$.

Рассмотрим теперь точки $0 < y < y_0$. Очевидно, что здесь функция $u_2(y)$ также монотонна, имея отрицательную производную. Для функции $u_2(y)$ может быть также дано уравнение (4.3), где $1 < \theta(y) < l < \infty$ для конечных значений y . Поэтому уравнению (4.2) в этом случае следует привести в соответствие уравнения

$$u_*' = \int_{y_0}^y u_{**}^2(t) dt, \quad u_{**}' = l \int_{y_0}^y u_{**}^2(t) dt$$

которые, подобно уравнениям (4.4), сводятся к виду, разобранным в § 3. При этом $u_*(y) < u_2(y) < u_{**}(y)$, если $u_*(y_0) = u_{**}(y_0) = u_2(y_0)$ и $u_*'(y_0) = u_{**}'(y_0) = 0$. Следовательно, если функция $u_*(y)$ обращается в бесконечность в точке $y_2 > 0$, то и искомая функция $u_2(y)$ принимает в точке $y_{10} > y_2$ бесконечное значение (полюс второго порядка, аналогично сказанному выше). Если функция $u_2(y)$ не имеет особенностей вплоть до $y = 0$, то в точке $y = 0$ она обращается в бесконечность, как $c \ln y$, как это видно из уравнения (4.2).

Пусть далее в исходной точке $y = y_0$ производная $u_2'(y_0) \neq 0$ и пусть она для определенности отрицательна; тогда, приводя уравнению (4.2) в соответствие уравнение

$$u_*' = u_*'(y_0) + \omega \int_{y_0}^y u_{**}^2(t) dt \quad (0 < \omega < 1)$$

и рассматривая такое решение этого уравнения, для которого $u_*(y_0) = u_2(y_0)$ и $u_*'(y_0) = u_2'(y_0)$, получим, что $u_2(y) > u_*(y)$, и на основании § 3 существует такая точка $y = y_{00}$, где $u_2'(y_{00}) = 0$. Аналогично и в случае $u_2'(y_0) > 0$. Тем самым рассматриваемый случай сводится к изложенному выше. Таким образом, качественный характер интегральных кривых уравнений § 3 и 4 аналогичен всюду, за исключением окрестности точки $y = 0$.

Построим теперь некоторые решения уравнения (4.1). Заметим прежде всего, что преобразование

$$U(t) = \frac{1}{\alpha^2} u_2(y), \quad t = \frac{y}{\alpha} \quad (4.5)$$

является преобразованием подобия для уравнения (4.1), т. е. уравнением для определения $U(t)$ будет снова уравнение (4.1) с переменной t вместо y . Поэтому любую интегральную кривую, исходящую из точки $y = 0$ с нулевой производной и имеющую полюс в точке $y = y_1$, можно при помощи преобразования (4.5) привести (выбрав $\alpha = y_1$) к интервалу $0 \leq y \leq 1$. Следовательно, таких кривых по крайней мере две: одна, имеющая $u_2(0) > 0$, и другая $u_2(0) < 0$. Будем интересоваться лишь мероморфными решениями уравнения (4.1).

Исследуем окрестность точки $y = 0$. Для этого ищем решение в виде ряда $u_2 = y^p(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots)$. Подставляя искомый ряд в уравнение (4.1) и совершая все обычные, формально необходимые операции, получим, что существуют две возможности:

1) либо $a_0 = 4$, $a_n = 0$ при $n = 1, 2, \dots$, и мы имеем точное решение уравнения (4.1)

$$u_2 = \frac{4}{y^2} \tag{4.6}$$

2) либо решение (4.1) в окрестности оси $y = 0$ не является особым и для него верно представление

$$u_2 = a_0 + \frac{1}{4} a_0^2 y^2 + \frac{1}{32} a_0^3 y^4 + \frac{1}{288} a_0^4 y^6 + \dots \tag{4.7}$$

где a_0 является произвольной постоянной и ряд содержит лишь четные члены.

Исследуем далее поведение функции u_2 в окрестности любой точки $x = \alpha \neq 0$. На основании сказанного выше можно положить $\alpha = 1$. Здесь также могут представиться две возможности:

1) либо точка $y = 1$ не является особой точкой решения уравнения (4.1) и тогда в соответствии с общей теорией решение зависит от двух произвольных параметров [$u_2(1)$ и $u_2'(1)$];

2) либо точка $y = 1$ является полюсом второго порядка, в окрестности которой верно следующее представление:

$$u_2 = (y - 1)^{-2} \left\{ 6 - \frac{6}{5}(y - 1) + \frac{49}{53}(y - 1)^2 - \frac{113}{125}(y - 1)^3 + \frac{4583}{5000}(y - 1)^4 - \right. \\ \left. - \frac{81139}{45000}(y - 1)^5 + \delta \frac{6272}{3.25}(y - 1)^6 \ln |y - 1| + C(y - 1)^6 + \dots \right\} \tag{4.8}$$

Здесь C — произвольный параметр, $\delta = 1$, при $y < 1$ и $\delta = -1$ при $y > 1$.

Выражение (4.8) можно получить, исследуя производные функции $z = u_2(y)(y - 1)^2$ в точке $y = 1$; легко показать, что седьмая производная функции $z(y)$ имеет вид:

Таблица 1

$$z^{VII} = \frac{\beta_{-1}}{y-1} + \beta_0 + \beta_1(y-1) + \dots$$

| y | $u_2(y)$ | y | $u_2(y)$ |
|------|----------|------|----------|
| 0.00 | 12.57 | 0.55 | 34.02 |
| 0.05 | 12.67 | 0.60 | 42.05 |
| 0.10 | 12.97 | 0.65 | 53.86 |
| 0.15 | 13.49 | 0.70 | 72.03 |
| 0.20 | 14.26 | 0.75 | 102.1 |
| 0.25 | 15.30 | 0.80 | 157.2 |
| 0.30 | 16.69 | 0.85 | 275.8 |
| 0.35 | 18.52 | 0.90 | 613.0 |
| 0.40 | 20.92 | 0.95 | 2425 |
| 0.45 | 24.07 | 1.00 | ∞ |
| 0.50 | 28.29 | | |

где β_i — некоторые числа.

В дальнейшем представляется интересным найти решение уравнения (4.1), имеющее в точке $y = 1$ полюс второго порядка и $0 < u_2 < \infty$ в диапазоне значений $0 \leq y \leq 1$. Такое решение было вычислено (см. табл. 1) при помощи срачивания части ряда (4.7), состоящей из восьми первых членов, и представления (4.8) без последнего члена в точке $y = 0,6$.

При этом оказалось, что разница производных в точке $y = 0,6$ слева и справа, отнесенная к производной, составляет 0.5%.

На основании сказанного в этом параграфе следует также, что существуют в интервале $1 \leq y \leq \omega > 1$ по крайней мере две интегральные кривые, которые имеют концы интервала своими полюсами второго порядка и из которых одна положительна в этом интервале, а другая принимает отрицательные значения внутри интервала.

§ 5. Исследуем теперь общий характер полученных течений.

(a₁) Взяв решения (2.4) и (3.5) для плоского потока и положив $D_1 = D_2 = 0$, получим

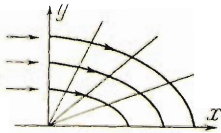
$$u = \left(\frac{x}{y}\right)^2, \quad v = -\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^3 \quad (5.1)$$

Последнее течение является течением разряжения ($x > 0$) от прямолинейной линии перехода, аналогичным течению Прандтля—Мейера.

Отличие констант D_1 и D_2 от нуля не приводит к появлению нового течения; оно является тем же, что и (5.1), но записанным в других координатах.



Фиг. 1



Фиг. 2

(a₂) Взяв решения (2.4) и (4.6) для потока к осевой симметрии и положив $D_1 = 0$, будем иметь

$$u = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2, \quad v = -\frac{4}{9}\left(\frac{x}{y}\right)^3 \quad (5.2)$$

т. е. получим течение разряжения ($x > 0$) от прямолинейной линии перехода для случая осевой симметрии. Отличие постоянной D_1 от нуля также и здесь не приводит к новому течению.

Общий вид линий тока течения в случаях (a₁), (a₂) показан на фиг. 1 и 2.

(b₁), (b₂) Комбинируя решения (2.2), (3.5) и (4.6), получим течения разряжения, начинающиеся от некоторых возмущенных потоков, где на первоначальной линии ($x = 0$) $v = 0$, а u монотонно падает до нуля при $y = \infty$; на базе этих решений можно также построить течение типа фиг. 1 и 2.

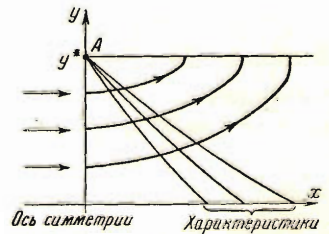
(c₁) Взяв решения (2.4) и (3.2), получим, положив $D_1 = D_2 = 0$

$$u = \frac{x^2}{6} \left[\alpha_2 + \sqrt{3} |\alpha_2| \left\{ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2} |\alpha_2|}{3^{1/4}} y; k \right) \right\}^2 \right], \quad v = \frac{x^3}{18} u_2'(y) \quad (5.3)$$

В случае $\alpha_2 > 0$ получаем либо сверхзвуковое течение, начинающееся от прямолинейной линии перехода (фиг. 3), либо симметричное относительно $x=0$ сверхзвуковое течение, включающее прямолинейную линию перехода. Прямая

$$y = y^* = \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{|\alpha_2|}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

(y^* — полюс второго порядка для функции $u_2(y)$) является границей течения. Величины добавочных скоростей в точке A не однозначны: они имеют различные величины в зависимости от того, по какому направлению мы приближаемся к точке A . Поэтому часть течения фиг. 3, заключенная



Фиг. 3

в соответствующем характеристическом треугольнике S , будет всегда являться частью течения в сопле с прямолинейной линией перехода и с точкой излома образующей в месте перехода, как на фиг. 4.

Для того чтобы найти необходимый треугольник, нужно выделить ту

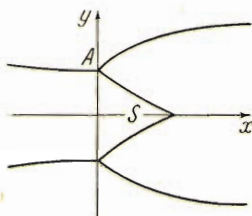
характеристику второго семейства течения на фиг. 3, на которой в точке A обеспечивается необходимый разворот потока. В силу приближенности исходных уравнений углы разворота не могут быть большими.

При помощи решения (5.3) можно также строить течения в окрестности прямолинейной линии перехода сопел, не имеющих излома образующей, а также область в окрестности звуковой линии при истечении равномерного звукового потока в зону пониженного давления.

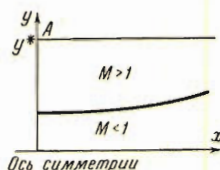
В случае $\alpha_2 < 0$ получаем смешанное течение, либо начинающееся от прямолинейной линии перехода, либо симметричное по аналогии со случаем $\alpha_2 > 0$ и показанное на фиг. 5.

Характер линий тока и поведение потока в окрестности точки A аналогичны, как на фиг. 3.

Имеется дозвуковая зона, прилежащая к оси симметрии. Часть рассмотренного течения



Фиг. 4



Фиг. 5

может, повидимому, встретиться при истечении равномерного звукового потока в зону пониженного давления, где на его пути поставлено некоторое препятствие.

Как в случае $\alpha_2 > 0$, так и в случае $\alpha_2 < 0$ отличие констант D_1, D_2 от нуля не приводит к появлению новых течений.

Следует отметить, что Л. В. Овсянников^[2] получил течения пункта (c_1) как главную часть исследованного им аналогичного точного течения. Однако им не были даны окончательные формулы для этого течения в плоскости xy (5.3). Отметим также, что исследование L -течений в окрестности прямолинейной линии перехода в плоскости xy может быть произведено элементарно. Действительно, мы приходим к рассмотрению главного члена, который дается, как нетрудно убедиться, уравнениями (1.1) и может быть представлен в виде

$$u = x^2 U(y), \quad v = x^3 V(y)$$

поэтому проблема сводится к рассмотренной нами.

(c_2) Рассматривая решения (2.4) и § 4, приходим к следующим типам течений.

Случай 1. Взяв решение (см. § 4) для $u_2(y)$ такое, при котором $u_2(y)$ ограничена и положительна в точке $y = 0$, в точке $y = \alpha$ имеет полюс второго порядка и функция $u_2(y)$ непрерывна в интервале $0 \leq y < \alpha$, получим течение, аналогичное показанному на фиг. 3, с заменой y^* на α .

Оно может быть применено для расчетов осесимметрических сопел с прямолинейной линией перехода, имеющих излом образующей или не имеющих его, а также при расчете истечения газа из круглой трубы.

Случай 2. Взяв решение для $u_2(y)$, имеющее в точках $y = 1$ и $y = \omega > 1$ полюсы второго порядка, положительное и непрерывное в интервале $1 < y < \omega$, приходим к новому течению; прямые $y = 1$ и $y = \omega$ являются его границами.

Часть этого течения (в соответствующем характеристическом треуголь-

нике) может быть использована при проектировании кольцевых осесимметрических сопел с прямолинейной линией перехода и изломом как наружной, так и внутренней образующих, а также при расчете истечения газа из кольцевой трубы.

Случаи 3, 4. Выбрав в качестве $u_2(y)$ следующие решения: 1) то, которое в точке $y = 0$ ограничено и отрицательно, а в точке $y = \alpha$ имеет полюс второго порядка и непрерывно в интервале $0 \leq y < \alpha$; 2) то, которое в точках $y = 1$ и $y = \omega$ имеет полюсы второго порядка, непрерывно в интервале $1 < y < \omega$ и принимает отрицательные значения внутри этого интервала, приходим к смешанным течениям, которые начинаются от прямолинейной линии перехода, в общем сверхзвуковые и имеют дозвуковое ядро.

Эти течения, повидимому, могут встретиться при истечении газа со звуковой скоростью потока из круглой или кольцевой трубы в зону пониженного давления, где на его пути имеется некоторое препятствие.

В пункте (c_2) рассмотрен главный член течения, начинающегося от прямолинейной линии перехода. Действительно, взяв точные уравнения осесимметрического потенциального течения газа и рассматривая течение вблизи прямолинейной линии перехода, где $v = 0$, при помощи оценок, полученных выше, мы придем к уравнениям (1.1) и сведем проблему к уже рассмотренной.

(d_1), (d_2) Комбинируя решения (2.2) и только что рассмотренные § 4, получим новые течения, начинающиеся от возмущенного потока, как и в (b_1), (b_2), и являющиеся течениями в некоторых каналах.

Замечание 1. Можно, отходя от трехмерных уравнений для околосвуковых течений, искать решение их, представимое произведением функцией от x и от y и z . В этом случае зависимость от x получится той же, что и у нас.

Замечание 2. Отходя от точных уравнений для плоских и осесимметрических течений, можно искать решение для потенциала скорости φ в окрестности прямолинейной линии перехода в виде ряда

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \varphi_n(y) x^n$$

Тогда уравнением для $\varphi_n(y)$ будет рассмотренное, а уравнения для $\varphi_i(y)$ ($i = 4, 5, \dots$) будут линейны.

Поступила 20 V 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1954.
2. Овсянников Л. В. Исследование газовых течений с прямой звуковой линией. Тр. ЛК ВВИА, вып. 33, 1950.