Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РЕШЕНИИ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

И. М. Юрьев
(Москва)

Дается новое освещение теории второго приближения, что может быть полезным при решении некоторых нелинейных задач, и предлагается упрощенный способ расчета в сверхзвуковом потоке газа тел вращения с протоком или частей тел вращения на участках контура, не выходящих на ось симметрии. Работа была доложена в декабре 1954 г. в Институте механики АН СССР.

§ 1. Уравнение осесимметричного течения газа относительно потенциала скорости Φ имеет следующий вид:

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\Phi_{xx}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Phi_{rr}-\frac{2uv}{c^2}\Phi_{xr}+\frac{1}{r}\Phi_r=0 \qquad (1.1)$$

Составляющие вектора скорости на координатные оси x, r можно представить в виде

$$u=\Phi_x=w_\infty+\varphi_x{}'=w_\infty+u', \qquad v=\Phi_r=\varphi_r{}'$$

где w_∞ — величина скорости набегающего потока, φ' — дополнительный потенциал к потенциалу невозмущенного потока $w_\infty x$. Скорость звука c равна:

$$c^2=c_\infty{}^2-\frac{1}{2}(\varkappa-1)(w^2-w_\infty{}^2)$$

Известно, что в случае тонкого конуса такие величины, как, например, $\varphi_x{}'$ и $\varphi_r{}'^2$, имеют одинаковый порядок малости.

Будем рассматривать в дальнейшем из тел вращения при сверхзвуковых скоростях достаточно толстые, но слабо искривленные тела с протоком, полубесконечные цилиндры, заканчивающиеся сужением, и, наконец, части тел вращения на участках контура, не выходящих на ось симметрии. В пределе эти тела с протоком дают цилиндрические поверхности, не вызывающие возмущения потока.

Такое исключение из области возмущения, влияющей на тело особой точки $r=0$, позволяет пользоваться обычными оценками порядков малых величин в этой области. Пренебрегая в коэффициентах уравнения (1.1) величинами u'^2, $u'v$, v^2, получим

$$\beta^2\left(1-\frac{4\lambda_\infty\varphi_x}{(\varkappa+1)(1-\lambda_\infty{}^2)(1-\lambda_\infty{}^2/h^2)}\right)\varphi_{xx}+\varphi_{rr}-\frac{4\lambda_\infty\varphi_r}{(\varkappa+1)(1-\lambda_\infty{}^2/h^2)}\varphi_{xr}+\frac{1}{r}\varphi_r=0 \qquad (1.2)$$

$$\left(\varphi a_*=\varphi', \ \beta^2=1-M_\infty{}^2=\frac{1-\lambda_\infty{}^2}{1-\lambda_\infty{}^2/h^2}, \ h^2=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)$$

где a_* — критическая скорость звука, λ — величина относительной скорости, $\varkappa$ — отношение коэффициентов теплоемкостей. Покажем, что уравнение (1.2) с точностью до малых третьего порядка можно преобразовать к линейному виду. Наводящей идеей доказательства является то интуитивное представление, что линеаризированное уравнение в характеристиках самого течения может быть точнее линеаризированного уравнения в характеристиках невозмущенного потока. Зададимся следующей системой уравнений:

$$\beta r_\nu - x_\mu = a\varphi_\mu, \qquad \beta r_\mu + x_\nu = b\varphi_\nu, \qquad \varphi_{\mu\mu} + \varphi_{\nu\nu} + \nu^{-1}\varphi_\nu = 0 \quad (1.3)$$

где a и b — некоторые постоянные величины. В частности, при $a = b = 0$ система $\beta r_\nu - x_\mu = 0$, $\beta r_\mu + x_\nu = 0$ имеет решение $x = \mu$, $\beta r = \nu$, и тогда последнее уравнение системы (1.3) вырождается в обычное линеаризированное уравнение. Вместо системы уравнений (1.3) можно рассматривать систему

$$x = \mu + b\varphi + (a+b)\nu\varphi_\nu, \quad \beta r = \nu(1 + (a+b)\varphi_\mu), \quad \varphi_{\mu\mu} + \varphi_{\nu\nu} + \nu^{-1}\varphi_\nu = 0 \quad (1.4)$$

так как первые два соотношения системы (1.4) являются решением первых двух уравнений системы (1.3).

В случае сверхзвукового течения будем иметь

$$\beta r_\nu - x_\mu = a\varphi_\mu, \quad \beta r_\mu - x_\nu = -\beta\varphi_\nu, \quad \varphi_{\mu\mu} - \varphi_{\nu\nu} - \nu^{-1}\varphi_\nu = 0 \quad (1.5)$$

или

$$x = \mu + b\varphi + (a+b)\nu_\nu\varphi_\nu, \quad \beta r = \nu(1 + (a+b)\varphi_\mu), \quad \varphi_{\mu\mu} - \varphi_{\nu\nu} - \nu^{-1}\varphi_\nu = 0 \quad (1.6)$$

Здесь $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$. Первые два уравнения системы (1.5) имеют тот же вид, что и преобразованная к переменным μ, ν с последующей линеаризацией система уравнений для характеристик уравнений (1.1):

$$\frac{dr}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \alpha)$$

где ϑ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс, α — угол Маха. При этом μ и ν определяются из условия, что

$$\mu(x, r) + \nu(x, r) = \text{const}, \qquad \mu(x, r) - \nu(x, r) = \text{const}$$

вдоль соответствующих характеристик разных семейств. Точная система уравнений осесимметричного течения газа в переменных μ, ν выведена С. А. Христиановичем [1].

В уравнении относительно φ перейдем к независимым переменным x, r. Будем иметь

$$L = \varphi_{\mu\mu} + \varphi_{\nu\nu} + \nu^{-1}\varphi_\nu = (x_{\mu\mu} + x_{\nu\nu})\varphi_x + (r_{\mu\mu} + r_{\nu\nu})\varphi_r + (x_\mu^2 + x_\nu^2)\varphi_{xx} +$$
$$+ (r_\mu^2 + r_\nu^2)\varphi_{rr} + 2(x_\mu r_\mu + x_\nu r_\nu)\varphi_{xr} + \nu^{-1}(x_\nu\varphi_x + r_\nu\varphi_r) \quad (1.7)$$

Если функция φ и производные от нее достаточно малы, то выражения $b\varphi + (a+b)\nu\varphi_\nu$ и $(a+b)\nu\varphi_\mu$ являются, вообще говоря, малыми величинами по сравнению с μ и ν. Таким образом,

$$x_\mu = 1 + \Delta_1, \qquad x_\nu = \Delta_2, \qquad r_\mu = \Delta_3, \qquad r_\nu = \beta^{-1} + \Delta_4$$

где Δ_i малы по сравнению с единицей и β^{-1}. Вычисляя значения производных от x, r по μ, ν и отбрасывая в коэффициентах уравнения (1.7) величины второго порядка малости, получим

$$L \approx (b\varphi_{\nu\nu} - a\varphi_{\mu\mu})\varphi_x + \frac{a+b}{\beta}\varphi_{\mu\nu}\varphi_r + (1 + 2b\varphi_\mu + 2(a+b)\nu\varphi_{\mu\nu})\varphi_{xx} +$$
$$+ \frac{1 + 2(a+b)\varphi_\mu + 2(a+b)\nu\varphi_{\nu\nu}}{\beta^2}\varphi_{rr} + \frac{2b}{\beta}\varphi_\nu\varphi_{xr} +$$
$$+ \frac{(a+2b)\varphi_\nu + (a+b)\nu\varphi_{\nu\nu}}{\nu}\varphi_x + \frac{1 + (a+b)\varphi_\mu + (a+b)\nu\varphi_{\mu\nu}}{\beta\nu}\varphi_r \tag{1.8}$$

С точностью до малых высшего порядка производные φ_μ, φ_ν, $\varphi_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\mu}$, $\varphi_{\nu\nu}$ в уравнении (1.8) можно заменить соответственно на φ_x, $\beta^{-1}\varphi_r$, $\beta^{-1}\varphi_{xr}$, φ_{xx}, $\beta^{-2}\varphi_{rr}$. После группировки с учетом второго уравнения системы (1.4) будем иметь

$$L \approx (1 + (2b - a)\varphi_x)\varphi_{xx} + \frac{1 + (3a+4b)\varphi_x}{\beta^2}\varphi_{rr} + \frac{2b}{\beta^2}\varphi_r\varphi_{xr} +$$
$$+ \frac{1 + (3a+4b)\varphi_x}{\beta^2 r}\varphi_r + \frac{2(a+b)}{\beta^2}(\varphi_r + \beta^2 r\varphi_{xx} + r\varphi_{rr})\varphi_{xr} = 0 \tag{1.9}$$

Последний член выражения (1.9) может быть отброшен, так как $\varphi_r + \beta^2 r\varphi_{xx} + r\varphi_{rr}$ является величиной второго порядка малости. Если разделить еще все коэффициенты уравнения на $1 + (3a+4b)\varphi_x$, то окончательно получим

$$L = \beta^2(1 - 2(2a+b)\varphi_x)\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + 2b\varphi_r\varphi_{xr} + r^{-1}\varphi_r = 0 \tag{1.10}$$

При значениях постоянных

$$a = \frac{(2 - \lambda_\infty^2)\lambda_\infty}{(\varkappa+1)(1 - \lambda_\infty^2)(1 - \lambda_\infty^2/h^2)}, \qquad b = -\frac{2\lambda_\infty}{(\varkappa+1)(1 - \lambda_\infty^2/h^2)} \tag{1.11}$$

уравнение (1.10) совпадает с уравнением (1.2). К (1.11) придем также, исходя от (1.6).

§ 2. Поскольку, однако, задача обтекания ставится в плоскости x, r, то возникает вопрос, какую пользу можно извлечь из знания того, что нелинейное уравнение (1.2) принимает в переменных μ, ν линейный вид.

На контуре обтекаемого газом тела вращения $r = r(x)$ надо удовлетворить следующему краевому условию:

$$\varphi_r = (\lambda_\infty + \varphi_x)r'(x) \tag{2.1}$$

Покажем, что полученный в § 1 результат позволяет свести решение нелинейного уравнения (1.2) с граничным условием (2.1) на теле вращения к решению линейного уравнения в переменных x, r с нелинейным граничным условием. Имеем

$$\varphi_r = \varphi_\mu\mu_r + \varphi_\nu\nu_r \tag{2.2}$$

В правой части (2.2) сохраним малые лишь первого и второго порядков. Производные μ_r и ν_r согласно (1.6) равны:

$$\mu_r = -\frac{x_\nu}{x_\mu r_\nu - x_\nu r_\mu} \approx -\beta x_\nu = -\beta(a+2b)\varphi_\nu - (a+b)\beta\nu\varphi_{\nu\nu}$$
$$\nu_r = -\frac{x_\mu}{x_\mu r_\nu - x_\nu r_\mu} \approx \frac{1}{r_\nu} = \beta(1 - (a+b)(\varphi_\mu + \nu\varphi_{\mu\nu})) \tag{2.3}$$

С точностью до величин третьего порядка малости можно в функциях

$$\frac{\partial\varphi(\mu,\nu)}{\partial\mu}\frac{\partial^2\varphi(\mu,\nu)}{\partial\mu^2},\quad \frac{\partial\varphi(\mu,\nu)}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi(\mu,\nu)}{\partial\nu},\quad \frac{\partial\varphi(\mu,\nu)}{\partial\nu}\frac{\partial^2\varphi(\mu,\nu)}{\partial\mu\partial\nu},\ldots$$

переменные μ, ν заменить на x, βr, т. е. будем иметь соответственно

$$\frac{\partial\varphi(x,\beta r)}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi(x,\beta r)}{\partial x^2},\quad \frac{1}{\beta}\frac{\partial\varphi(x,\beta r)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x,\beta r)}{\partial r},\quad \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\varphi(x,\beta r)}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi(x,\beta r)}{\partial x\partial r}$$

Здесь функция $\varphi(x, \beta r)$ удовлетворяет уже уравнению

$$-\beta^2\varphi_{xx}+\varphi_{rr}+r^{-1}\varphi_r=0 \tag{2.4}$$

Но φ_ν/r_ν является величиной первого порядка малости. Поэтому было бы ошибкой просто заменить φ_ν на $\beta^{-1}\varphi_r$ в равенстве (2.2). С точностью до малых третьего порядка имеем

$$\varphi_\nu(\mu,\nu)=\varphi_\nu(x+\varepsilon_1,\beta r+\varepsilon_2)\approx(\varphi_\nu)_{\substack{\mu=x\\ \nu=\beta r}}+(\varphi_{\mu\nu})_{\substack{\mu=x\\ \nu=\beta r}}\varepsilon_1+(\varphi_{\nu\nu})_{\substack{\mu=x\\ \nu=\beta r}}\varepsilon_2+\ldots=$$

$$=\beta^{-1}\varphi_r(x,\beta r)+\beta^{-1}\varphi_{xr}(x,\beta r)+\beta^{-2}\varphi_{rr}(x,\beta r)\varepsilon_2+\ldots \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=-b\varphi-(a+b)\nu\varphi_\nu\approx-b\varphi-(a+b)r\varphi_r\\ \varepsilon_2&=-\beta(a+b)r\varphi_\mu\approx-\beta(a+b)r\varphi_x\end{aligned} \tag{2.6}$$

Окончательно краевое условие (2.1) для уравнения (1.2) преобразуется в следующее краевое уравнение для уравнения (2.4):

$$\begin{aligned}\lambda_\infty r'(x)=\varphi_r-2\beta^2(a+b)r(x)\varphi_x\varphi_{xx}-(1+\lambda_\infty b)r'(x)\varphi_x-\\ -(b\varphi+2\lambda_\infty(a+b)r(x)r'(x))\varphi_{xr}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Точно так же найдем добавочную составляющую скорости u' во втором приближении при переходе к уравнению (2.4)

$$u'=\varphi_x-(b\varphi+2\lambda_\infty(a+b)r(x)r'(x))\varphi_{xx}-b\varphi_x^2-2(a+b)r(x)\varphi_x\varphi_{xr} \tag{2.8}$$

Отметим, что при разложении в ряд Тейлора

$$\varphi(\mu,\nu)=\varphi(x+\varepsilon_1,\beta r+\varepsilon_2)=\varphi(x,\beta r)+\varphi_x\varepsilon_1+\beta^{-1}\varphi_r\varepsilon_2+\ldots$$

член разложения $\varphi_x\cdot\varepsilon_1+\beta^{-1}\varphi_r\varepsilon_2$ определяет частное решение, имеющееся у Ван-Дайка для уравнения

$$-\beta^2\varphi_{xx}+\varphi_{rr}+r^{-1}\varphi_r=\frac{4\lambda_\infty\varphi_x\varphi_{xx}}{(\varkappa+1)(1-\lambda_\infty^2/h^2)^2}+\frac{4\lambda_\infty\varphi_r\varphi_{xr}}{(\varkappa+1)(1-\lambda_\infty^2/h^2)}$$

что и позволило ему свести задачу обтекания во втором приближении исключительно к вычислениям на границе для уравнения (2.4). Метода получения такого рода далеко не очевидных частных решений работа [2] не содержит.

§ 3. Для расчета тел вращения с протоком и частей тел вращения на участках контура, не выходящих на ось симметрии, относительно проще воспользоваться методом аппроксимации, примененным нами для тел вращения в линеаризированной постановке в работе [3]. Согласно работе [3] величина r^{-1} в уравнении $\beta^2\varphi_{xx}-\varphi_{rr}-r^{-1}\varphi_r$ заменяется функцией

$$r^{-1}\approx\frac{2B\beta}{\operatorname{sh}(B(\beta r+C))} \tag{3.1}$$

где B и C выбираются из условия наилучшего приближения к r^{-1} во всей области возмущения, влияющей на тело. Эта область ограничена контуром тела, характеристикой первого семейства, отделяющей тело от набегающего потока, и характеристикой второго семейства, проходящей через заднюю точку контура.

Пусть длина рассматриваемого тела равна единице и точка $x=0$, $r=r(0)$ является его передней точкой. В работе [3] для вычисления постоянных были предложены следующие формулы:

$$B = 2\ln\frac{r_1 + (0.5 + r_1)(2+\sqrt{3})^2}{r_1 + 0.5 + r_1(2+\sqrt{3})^2}, \qquad C = \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{B} - r_1 - 0.25 \tag{3.2}$$

где

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\beta(r(0) + r(1))$$

При замене (3.1) общее решение для φ имеет вид:

$$\varphi = -B\Phi_1(\xi) + \operatorname{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi+\eta+C)\right)\Phi_1'(\xi) + \\ + \frac{1}{B}\int(1+\operatorname{ch}(B(\xi+\eta+C)))\Phi_2(\eta)\,d\eta - \\ - \frac{1}{B}\operatorname{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi+\eta+C)\right)\int\operatorname{sh}(B(\xi+\eta+C))\Phi_2(\eta)\,d\eta \tag{3.3}$$

где $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ — произвольные функции переменных ξ и η

$$2\xi = -x + \beta r, \qquad 2\eta = x + \beta r \tag{3.4}$$

Из краевого условия $\varphi = \varphi_1(\eta)$ на начальной характеристике $\xi = \xi_0$ была определена функция $\Phi_2(\eta)$:

$$\Phi_2(\eta) = \operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi_0+\eta+C)\right)\varphi_1''(\eta) + B\varphi_1'(\eta) \tag{3.5}$$

Из граничного условия $\lambda_\infty r'(x) = \varphi_r$ было получено

$$\Phi_{1*}' - B\operatorname{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi+\eta(\xi)+C)\right)\Phi_{1*} = -\frac{(\mathrm{hs}B(\xi+\eta(\xi)+C))}{B}\eta'(\xi)\Phi_2(\eta(\xi)) + \\ + \frac{2\lambda_\infty}{\beta^2}\frac{\eta'(\xi)+1}{\eta'(\xi)-1}\operatorname{th}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi+\eta(\xi)+C)\right) \tag{3.6}$$

где

$$\Phi_{1*}(\xi) = \Phi(\xi, \eta(\xi)),\ \Phi(\xi,\eta) = \Phi_1'(\xi) - \frac{1}{B}\int\operatorname{sh}(B(\xi+\eta+C))\Phi_2(\eta)\,d\eta \tag{3.7}$$

а $\eta = \eta(\xi)$ — уравнение контура тела вращения в переменных ξ, η.

В переменных x, r уравнение (3.6) имеет вид:

$$\Phi_1^{*\prime}(x) + \tfrac{1}{2}(1-\beta r'(x))\operatorname{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\beta r(x)+C)\right)\Phi_1^*(x) = \\ = -\frac{\lambda_\infty}{\beta}\frac{(1-\beta r'(x))\,r'(x)}{\operatorname{cth}(^1/_2B(\beta r(x)+C))} - \\ - \frac{1}{2B}(1+\beta r'(x))\operatorname{sh}(B(\beta r(x)+C))\Phi_2\left(\frac{x+\beta r(x)}{2}\right) \tag{3.8}$$

где

$$\Phi_1^*(x) = \Phi_{1*}\left(\tfrac{1}{2}(-x+\beta r(x))\right)$$

Добавочная составляющая скорости возмущения на контуре тела

$$u' = \tfrac{1}{2}(\varphi_\eta - \varphi_\xi) = -\frac{\lambda_\infty}{\beta^2}\frac{\eta'(\xi)+1}{\eta'(\xi)-1} - \frac{B\Phi_{1*}(\xi)}{2\operatorname{sh}^2(^1/_2B(\xi+\eta(\xi)+C))} = \\ = -\frac{\lambda_\infty r'(x)}{\beta} - \frac{B\Phi_1^*(x)}{2\operatorname{sh}^2(^1/_2B(\beta r(x)+C))} \tag{3.9}$$

Таким образом, в нашей приближенной линеаризированной постановке расчет распределения скорости на рассматриваемой части тела вращения сводится у нас к решению линейного дифференциального уравнения первого порядка (3.7). В случае тела с протоком $\Phi_2(\eta) = 0$.

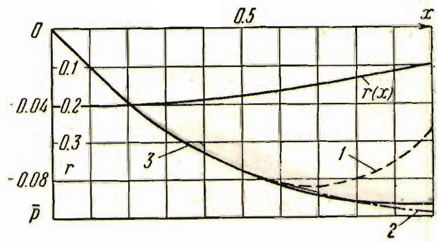
Будем рассматривать такие задачи, где второе приближение существенно, а погрешность за счет аппроксимации в силу ее точности несущественна. Обозначим в формулах (2.7) и (2.8)

$$
\begin{gathered}
-2\beta^2(a+b)\,r(x)\,\varphi_x\varphi_{xx} - (1+\lambda_\infty b)\,r'(x)\,\varphi_x - \\
-(b\varphi + 2\lambda_\infty(a+b)\,r(x)\,r'(x))\,\varphi_{xr} = F_1 \qquad (3.10) \\
-(b\varphi + 2\lambda_\infty(a+b)\,r(x)\,r'(x))\,\varphi_{xx} - b\varphi_x{}^2 - 2(a+b)\,r(x)\,\varphi_x\varphi_{x\eta} = F_2
\end{gathered}
$$

Заменим величины второго порядка малости F_1 и F_2 их соответствующими значениями линеаризированного решения $F_{1л}$ и $F_{2л}$. Для получения второго приближения решаем снова уравнение (2.4) в предположении (3.1) при следующих краевых условиях:

$$\varphi = \varphi_1(\eta) \quad \text{на начальной характеристике}$$

$$\lambda_\infty r'(x) = \varphi_r + F_{1л} \quad \text{на контуре тела вращения}$$



Фиг. 1

Из первого условия найдем, что функция $\Phi_2(\eta)$ из (3.3) снова будет определяться формулой (3.5).

Пусть для искомой функции от ξ индекс 2 означает второе приближение. Из второго условия (3.11) найдем, что во втором приближении функция $\Phi_{2*}(\xi)$ удовлетворяет по аналогии с формулой (3.6) следующему линейному уравнению первого порядка:

$$
\begin{gathered}
\Phi_{2*}'(\xi) - B\,\mathrm{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi + \eta(\xi) + C)\right)\Phi_{2*}(\xi) = \\
= -\frac{1}{B}\,\mathrm{sh}\,(B(\xi + \eta(\xi) + C))\,\eta'(\xi)\,\Phi_2(\eta(\xi)) + \qquad (3.12) \\
+\frac{2\lambda_\infty}{\beta^2}\,\frac{\eta'(\xi)+1}{\eta'(\xi)-1}\,\mathrm{th}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi+\eta(\xi)+C)\right) - \frac{2F_{1л}}{\beta}\,\mathrm{th}\left(\tfrac{1}{2}B(\xi+\eta(\xi)+C)\right)
\end{gathered}
$$

В переменной от x последнее уравнение имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\Phi_2{}^{*\prime}(x) + \tfrac{1}{2}B(1-\beta r'(x))\,\mathrm{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\beta r(x)+C)\right)\Phi_2{}^*(x) = \\
= -\frac{\lambda_\infty}{\beta}\,\frac{(1-\beta r'(x))\,r'(x)}{\mathrm{cth}\,(^1/_2 B(\beta r(x)+C))} + \frac{F_{1л}}{\beta}(1-\beta r'(x))\,\mathrm{th}\left(\tfrac{1}{2}B(\beta r(x)+C)\right) \\
-\frac{1}{2B}\,\mathrm{sh}\,(B(\beta r(x)+C))\,(1+\beta r'(x))\,\Phi_2\left(\tfrac{1}{2}(x+\beta r(x))\right) \qquad (3.13)
\end{gathered}
$$

где

$$\Phi_2{}^*(x) = \Phi_{2*}\left(\tfrac{1}{2}(-x+\beta r(x))\right)$$

Во втором приближении производная φ_x на основании (3.3), (3.7) и (3.13) будет равна

$$\varphi_x = \tfrac{1}{2}(\varphi_\eta - \varphi_\xi) = -\frac{\lambda_\infty}{\beta}r'(x) - \frac{B\,\Phi_2{}^*(x)}{2\,\mathrm{sh}^2\,(^1/_2 B(\beta r(x)+C))} + \frac{F_{1л}}{\beta} \qquad (3.14)$$

Таким образом, согласно (2.8) получим для вычисления добавочной составляющей u' во втором приближении следующую формулу:

$$u_2' = u_1' - \frac{B\Delta\Phi(x)}{2\,\mathrm{sh}^2\,(^1/_2\,B\,(\beta r(x)+C))} + \frac{F_{1л}}{\beta} + F_{2л} \tag{3.15}$$

где u_1' соответствует первому приближению и вычисляется по формуле (3.9); величина $\Delta\Phi(x) = \Phi_2^*(x) - \Phi_1^*(x)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}(\Delta\Phi(x)) + \tfrac{1}{2}B(1-\beta r'(x))\,\mathrm{cth}\left(\tfrac{1}{2}B(\beta r(x)+C)\right)\Delta\Phi(x) = \frac{1-\beta r'(x)}{\beta}\,\mathrm{th}\left(\tfrac{1}{2}B(\beta r(x)+C)\right)F_{1л} \tag{3.16}$$

Для вычисления $F_{1л}$, $F_{2л}$ надо знать согласно формулам (3.10) значения φ_{xx} и φ_{xr} на контуре тела вращения. Вдоль контура имеем

$$\frac{du_л'}{dS} = \frac{\partial x}{\partial S}\varphi_{xx} + \frac{\partial r}{\partial S}\varphi_{xr}, \qquad \frac{\partial v}{ds} = \frac{\partial x}{\partial s}\varphi_{xr} + \frac{\partial r}{\partial s}\varphi_{rr} \qquad (ds = \sqrt{1+r'^2(x)}\,dx) \tag{3.17}$$

Выражая φ_{rr} через $\beta^2\varphi_{xx} - r^{-1}\varphi_r = \beta^2\varphi_{xx} - \lambda_\infty r'(x)/r(x)$, получим

$$\varphi_{xr} = \frac{1}{1-\beta^2 r'^2(x)}\left(\lambda_\infty r''(x) - \beta^2 r'(x)\frac{du_л'}{dx} + \frac{\lambda_\infty r'^2(x)}{r(x)}\right)$$
$$\varphi_{xx} = \frac{1}{1-\beta^2 r'^2(x)}\left(\frac{du_л'}{dx} - \lambda_\infty r'(x)\,r''(x) - \frac{\lambda_\infty r'^3(x)}{r(x)}\right) \tag{3.18}$$

На основании (3.9) имеем

$$\frac{du_л'}{dx} = -\frac{\lambda_\infty}{\beta}r''(x) - \frac{B\,\Phi_1^{*\prime}(x)}{2\,\mathrm{sh}^2\,(^1/_2\,B\,(\beta r(x)+C))} + \frac{B^2\beta\Phi_1^*(x)\,r'(x)}{2\,\mathrm{sh}^2\,(^1/_2\,B\,(\beta r(x)+C))\,\mathrm{th}\,(^1/_2\,B\,(\beta r(x)+C))} \tag{3.19}$$

Дополнительный потенциал φ для формул (3.10) вычисляется так:

$$\varphi = \int_0^x (u_1' + \lambda_\infty r'^2(x))\,dx \tag{3.20}$$

Величина скорости λ и коэффициент давления $\bar{p}$ с точностью до малых второго порядка включительно будут равны:

$$\lambda = \lambda_\infty\left(1 + \frac{u_2'}{\lambda_\infty} + \frac{1}{2}r'^2(x)\right), \qquad \bar{p} = -\frac{2u_2'}{\lambda_\infty} - r'^2(x) + \beta^2\frac{u'^2}{\lambda_\infty^2} \tag{3.21}$$

На фиг. 1 представлено распределение давления на теле вращения $r(x) = 0.2 - 0.1\,x^2$ при $M_\infty = 2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, вычисленное (кривая *1*) по формуле линеаризированной теории, затем по формуле (3.21) (кривая *2*) и методом характеристик (кривая *3*). Здесь $\Phi_2(\eta) = 0$.

Поступила 17 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940.
2. Milton D. Van Dyke. First and second order theory of supersonic flow past bodies of revolution. IAS, № 3, 1951.