

УДАРНАЯ ВОЛНА НА ЗНАЧИТЕЛЬНОМ РАССТОЯНИИ ОТ МЕСТА ВЗРЫВА

С. А. Христианович

(Москва)

Рассмотрим ударную волну в воде на больших расстояниях от места взрыва, где давление на фронте волны не превосходит 250—300 ат. На небольших расстояниях от места взрыва закон распространения ударной волны и ее форма существенно зависят от условий расширения продуктов взрыва в газовом пузыре. Однако по мере увеличения расстояния это влияние становится все меньшим. Возмущения, возникающие в области, прилежащей к месту взрыва, уже не могут догнать ударную волну. Образуется граница, отделяющая ударную волну от остальной области течения.

Таким образом, на больших расстояниях от места взрыва ударная волна постепенно приобретает форму, не зависящую от последующих явлений вне ее границы.

§ 1. Решения уравнений гидродинамики, зависящие только от отношения расстояния к времени. Волны, отвечающие таким решениям, хорошо изучены [1]. Впервые они были исследованы О. Е. Власовым и использованы при построении теории детонации.

Для малых значений давления определение этих волн особенно просто.

При небольших давлениях уравнение состояния для воды можно представить в виде

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (1.1)$$

где p — давление, ρ — плотность, ρ_0 — плотность при давлении, равном нулю, $B = 3045$ кг/см², $n = 7.15$. Уравнения движения для плоской, цилиндрической и сферической волн имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{k u \rho}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где t — время, r — расстояние и u — скорость частиц. Для плоской волны $k = 0$, для цилиндрической $k = 1$ и для сферической $k = 2$.

Скорость распространения звука равна

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \quad \left(a_0 = \sqrt{\frac{Bn}{\rho_0}} \right) \quad (1.3)$$

Для малых значений давления из (1.1) и (1.3) имеем

$$a = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{p}{Bn} \right] \quad (1.4)$$

Уравнения (1.2) и (1.3) легко преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{n-1} a \frac{\partial a}{\partial r} &= 0 \\ \frac{2}{n-1} \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{n-1} u \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{kau}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Принимая за независимые переменные $\beta = r/t$ и $\tau = \ln t$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + (u - \beta) \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{2}{n-1} a \frac{\partial a}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{2}{n-1} \left[\frac{\partial a}{\partial \tau} + (u - \beta) \frac{\partial a}{\partial \beta} \right] + a \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{kau}{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рассмотрим случай малых давлений. Положим

$$\beta = a_0(1 + \delta), \quad a = a_0(1 + \alpha), \quad u = a_0 M \quad (1.7)$$

где α , δ и M — малые величины. Тогда, сохраняя в уравнениях (1.6) только малые величины первого порядка, получим

$$\frac{\partial M}{\partial \delta} - \frac{2}{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \tau} + (\alpha + M - \delta) \frac{\partial M}{\partial \delta} + \frac{kM}{2} = 0 \quad (1.8)$$

Рассмотрим сначала решения, этих уравнений, не зависящие от времени. Найдем решения, для которых $\delta = (a_1 - a_0)/a_0$ и $a = a_1$ при $u = 0$.

Интегрируя, получим для сферической волны

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{n-1}{2} M, \quad \delta - \delta_1 = CM - \frac{n+1}{2} M \ln M \quad (1.9)$$

где

$$\alpha_1 = \delta_1 = \frac{n-1}{2} \frac{p_1}{Bn} \quad (1.10)$$

и C — произвольная постоянная.

Аналогичным образом для цилиндрической волны

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{1}{2} (n-1) M, \quad \delta - \delta_1 = (n+1) M + CM^2 \quad (1.11)$$

и для плоской волны

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{1}{2} (n-1) M, \quad \delta - \delta_1 = \frac{1}{2} (n+1) M \quad (1.12)$$

§ 2. Сферическая ударная волна. Пусть сферическая ударная волна распространяется в покоящейся жидкости. При малых давлениях скорость распространения фронта ударной волны равна

$$N = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p}{Bn} \right] \quad (2.1)$$

и скорость частиц непосредственно за фронтом волны

$$u = a_0 \frac{p}{Bn} \quad (2.2)$$

Из первого уравнения (1.9) и (1.4) следует

$$u = a_0 \frac{p - p_1}{Bn} \quad (2.3)$$

Пусть $p_1 = 0$. Тогда скорость непосредственно за фронтом ударной волны при давлении p в точности равна скорости в сферической волне, отвечающей решению (1.9). С течением времени из-за разности скорости

распространения давления p на фронте ударной волны и в волне (1.9) давление на фронте волны все время уменьшается.

Второе уравнение (1.9) при $p_1 = 0$ можно представить в виде

$$\frac{r}{t} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} \ln \frac{p_0}{p} \right] \quad (2.4)$$

где p_0 — произвольная постоянная.

Найдем закон распространения фронта ударной волны.

Дифференцируя (2.4), имеем

$$dr = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} \ln \frac{p_0}{p} \right] dt + a_0 t \frac{n+1}{2Bn} \left[\ln \frac{p_0}{p} - 1 \right] dp$$

Вместе с тем, на фронте ударной волны

$$dr = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4Bn} p \right] dt$$

Для определения скорости распространения фронта имеем, следовательно, уравнение

$$\frac{1}{2} p dt = p \ln \frac{p_0}{p} dt + t \left[\ln \frac{p_0}{p} - 1 \right] dp \quad (2.5)$$

Откуда

$$t = \frac{C}{p \sqrt{\ln(p_0/p) - 0.5}} \quad (2.6)$$

или, пользуясь (2.4):

$$\frac{r}{r_0} = \frac{D}{p} \frac{1 + 1/2(n+1)(p/Bn) \ln(p_0/p)}{\sqrt{\ln(p_0/p) - 0.5}} \quad (2.7)$$

где r_0 — радиус заряда, D и p_0 — произвольные постоянные. Пользуясь (2.4), получим

$$\delta = \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} \ln \frac{p_0}{p} \quad (2.8)$$

Обозначая $p/p_0 = z$, получим график зависимости z от $x = Bn\delta/(n+1)p_0$, изображенный на фигуре.

При $p = p_0/e$ эпюра давления имеет вертикальную касательную. Полученное решение имеет смысл только при $p < p_0/e$. При $p = 0$ касательная к эпюре давления горизонтальна.

На расстоянии r/r_0 от места взрыва давление на фронте ударной волны определяется уравнением (2.7). Обозначим это давление p_m .

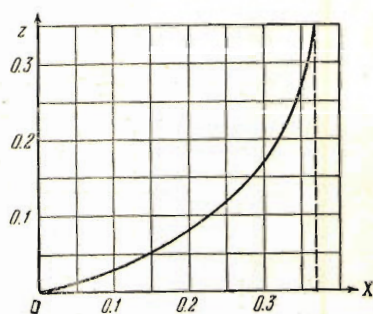
Эпюра давления за фронтом ударной волны с точностью до масштаба будет изображаться отрезком кривой на фигуре для $p < p_m$.

При обработке экспериментальных данных эпюру давления при взрыве сферического заряда принято представлять в виде

$$p = p_m \exp\left(-\frac{\Delta t}{\theta}\right) \quad (2.9)$$

где Δt — время, отсчитанное от момента прихода ударной волны в данную точку пространства, и θ — постоянная времени.

При помощи кривой (2.9) можно достаточно хорошо аппроксимировать кривую (2.8) примерно в интервале $0.35 < p/p_m < 1$.



Для определения постоянных D и p_0 достаточно знать максимальное давление и постоянную времени для одного какого-нибудь относительного расстояния $\bar{r} = r/r_0$ от места взрыва.

Определим время действия ударной волны.

Пользуясь (2.4), получим

$$\Delta t = \frac{r_m - r}{a_0} = t(\delta_m - \delta)$$

Пользуясь для определения t формулами (2.4) и (2.7), получим

$$\Delta t = \frac{n+1}{2} \frac{D}{Bn a_0} r_0 \frac{\ln(p_0/p_m) - (p/p_m) \ln(p_0/p)}{\sqrt{\ln(p_0/p_m) - 0.5}} \quad (2.10)$$

Из (2.9) следует, что θ — время, отвечающее $p_m = \epsilon p$. Из (2.10) имеем, следовательно:

$$\frac{\theta}{r_0} = \frac{n+1}{2} \frac{D(\epsilon-1) \ln(p_0/p_m) - 1}{Bn a_0 \epsilon \sqrt{\ln(p_0/p_m) - 0.5}} \quad (2.11)$$

Для тротила $r_0 = 0.053 \sqrt[3]{q}$, где q — вес заряда в кг и r_0 — радиус заряда в метрах.

Если в формулах (2.7) и (2.11) положить $p_0 = 17000$ атм, $D = 16200$, то эти формулы дают значения p_m и θ , в зависимости от \bar{r} весьма близкие к экспериментальным данным, приведенным в [2] для $p < 250$ ат.

Имеем

$$\bar{r} = \frac{16200}{p} \frac{1 + 1.87 \cdot 10^{-4} p \ln(17000/p)}{\sqrt{\ln(17000/p) - 0.5}} \quad (2.12)$$

где p выражено в атмосферах или приближенно

$$p = \frac{16200}{\bar{r}} \frac{1 + 4(\ln \bar{r})^{1/2} \bar{r}}{\sqrt{1.15 \ln \bar{r} - 0.5}} \quad (2.13)$$

Для постоянной времени

$$\frac{\theta}{r_0} = 0.74 \frac{1.73 \ln(1700/p_m) - 1}{\sqrt{\ln(1700/p_m) - 0.5}} \quad (2.14)$$

где θ выражено в миллисекундах, а r_0 в метрах.

В табл. 1 приведены значения p_m и θ , вычисленные по формулам (2.13) и (2.14) и определенные по данным [2].

Совпадение получается хо-

рошим примерно до значений \bar{r} порядка 40¹. При меньших значениях \bar{r} , нельзя пользоваться формулой (1.1) сохраняя только первый член разложения.

Формула (2.7) на больших расстояниях от места взрыва дает асимптотический закон падения давления с расстоянием, полученный Л. Д. Ландау [3].

¹ Определение постоянных в формулах (2.12) и (2.14) и сравнение с данными [2] выполнены В. В. Селивановым

Таблица 1

\bar{r}	Расчет		по Коулу	
	p , кг/см ²	$\frac{a_0}{r_0} \theta$	p , кг/см ²	$\frac{a_0}{r_0} \theta$
30	364	3.5	315	3.3
40	250	3.6	228	3.5
50	188	3.8	177	3.8
60	150	3.9	144	3.9
90	91.0	4.1	91.0	4.2
120	65.0	4.2	65.7	4.6
180	40.5	4.4	41.6	4.8
240	29.2	4.6	30.0	5.1

§ 3. Воздушная ударная волна. Для сферического взрыва в воздухе на больших расстояниях от места взрыва справедливы соотношения, аналогичные тем, которые получены выше для взрыва в воде. Полагая

$$p = p_0 + \Delta p$$

получим для малых значений $\Delta p/p_0$, пользуясь уравнением адиабаты, следующую зависимость перепада давления Δp от плотности:

$$\Delta p = p_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa - 1 \right] \quad (3.1)$$

Эта зависимость совершенно аналогична (1.1). Таким образом, в полученных выше формулах для ударной волны в воде следует лишь заменить B на p_0 , n на κ и p на Δp , чтобы получить соответствующие формулы для взрыва в воздухе.

Существенным различием между взрывом в воде и воздухе является невозможность получить при взрыве в воде значительные отрицательные давления, в то время как при взрыве в воздухе Δp становится отрицательным на некотором расстоянии от фронта ударной волны.

Изложенные выше соображения позволяют при воздушном взрыве исследовать лишь фазу положительных давлений за фронтом волны. Уравнения, аналогичные (2.1), (2.8) и (2.7), будут

$$u = a_0 \frac{\Delta p}{\kappa p_0} \quad (\kappa = 1.4 \text{ для воздуха}) \quad \left(a_0 = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \right) \quad (3.2)$$

$$\delta = \frac{\kappa H}{2} \frac{\Delta p}{p_0 \kappa} \ln \frac{\Delta p_0}{\Delta p}, \quad \bar{r} = \frac{D}{\Delta p} \frac{1 + \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{\Delta p}{p_0} \ln \frac{\Delta p_0}{\Delta p}}{\sqrt{\ln \frac{\Delta p_0}{\Delta p} - 0.5}} \quad (3.3)$$

где D и Δp_0 — произвольные постоянные.

Для времени действия положительной фазы давления имеем

$$\Delta t_m = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{D r_0}{p_0 a_0} \frac{\ln(\Delta p_0 / \Delta p_m)}{\sqrt{\ln(\Delta p_0 / \Delta p_m) - 0.5}} \quad (3.4)$$

Пользуясь этими формулами, можно определить значения $\Delta p_0/p_0$ и D/p_0 . Для тротила

$$\frac{\Delta p_0}{p_0} \approx 0.8, \quad \frac{D}{p_0} \approx 23.4$$

Формулу (3.4) приближенно можно представить в виде

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{23.4}{\bar{r}} \frac{1 + (20/\bar{r}) \ln 0.034 \bar{r}}{\sqrt{\ln [0.034 \bar{r} \sqrt{\ln 0.034 \bar{r}}] - 0.5}}$$

а формулу (3.4) в виде

$$\Delta t_0 \frac{\Delta p_m}{r_0} = 0.029 \frac{\ln(0.8 p_0 / \Delta p_m)}{\sqrt{\ln(0.8 p_0 / \Delta p_m) - 0.5}}$$

Эти формулы дают достаточно хорошее приближение для значений

$$\frac{\Delta p}{p_0} < 0.15$$

§ 4. Цилиндрические ударные волны. Для цилиндрической ударной волны, возникающей при взрыве длинного цилиндрического заряда, имеем, пользуясь (1.11), при $p_1 = 0$:

$$u = a_0 \frac{p}{Bn}, \quad \frac{r}{t} = a_0 \left[1 + (n+1) \frac{p}{Bn} \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) \right] \quad (4.1)$$

где p_0 — произвольная постоянная. Пользуясь (1.7), получим

$$\delta = (n+1) \frac{p}{Bn} \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) \quad (4.2)$$

Дифференцируя (3.2), имеем

$$dr = a_0 \left[1 + (n+1) \frac{p}{Bn} \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) \right] dt + a_0 t \frac{n+1}{Bn} \left[1 - 2 \frac{p}{p_0} \right] dp \quad (4.3)$$

Для определения распространения фронта ударной волны, пользуясь (2.1), получим следующее уравнение:

$$\frac{p}{4} dt = p \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) dt + t \left(1 - 2 \frac{p}{p_0} \right) dp \quad (4.4)$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$t = \frac{Dr_0}{(p/p_0)^{1/2} [1 - 1/3 (p/p_0)]^{1/2}} \quad (4.5)$$

Пользуясь (3.2), имеем, следовательно,

$$\bar{r} = D \frac{1 + (n+1)(p/Bn)(1 - p/p_0)}{(p/p_0)^{1/2} [1 - 1/3 (p/p_0)]^{1/2}} \quad (4.6)$$

где D и p_p — произвольные постоянные.

Формула (4.6) на очень больших расстояниях от места взрыва дает тот же закон падения давления на фронте ударной волны с расстоянием, что и асимптотическая формула Л. Д. Ландау [3]. Постоянные D и p_0 могут быть определены для каждого взрывчатого вещества по значению максимального давления в ударной волне и времени действия на одном каком-нибудь расстоянии от места взрыва.

§ 5. Фаза разрежения. В воздушной ударной волне, вслед за фазой сжатия, следует фаза разрежения, для которой $\Delta p < 0$. В области отрицательных значений Δp уже нельзя считать, что волна стремится к какой-то определенной предельной волне, не зависящей от условий в месте взрыва. Поэтому при исследовании поведения волны на больших расстояниях от места взрыва можно рассмотреть следующую задачу. Пусть в момент $t = t_0$ известна форма волны, т. е. зависимость

$$\delta = \delta_0(M_0)$$

в интервале

$$M_0' < M < 0$$

Как будет изменяться форма волны с течением времени, считая, что из центра взрыва не распространяется новая ударная волна? Рассмотрим случай сферической волны. При $\alpha = \frac{n-1}{2} M$ второе уравнение (1.8) примет вид

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} + \left(\frac{n+1}{2} M - \delta \right) \frac{\partial M}{\partial \delta} + M = 0 \quad (5.1)$$

искомый интеграл этого уравнения легко находится. Получим

$$\delta = \frac{n+1}{2} M \ln \frac{t}{t_0} + \frac{t_0}{t} \delta_0 \left[\frac{Mt}{t_0} \right] \quad (5.2)$$

Причем уравнение характеристик будет

$$Mt = M_0 t_0 \quad (5.3)$$

Волна будет, следовательно, в момент t определена в интервале

$$\frac{M_0' t_0}{t} < M < M_0$$

Угол наклона касательной к эпюре давления определится из уравнения

$$\frac{\partial \delta}{\partial M} = \frac{n+1}{2} \left[\ln \frac{t}{t_0} - 1 \right] + \delta_0' \left[\frac{Mt}{t_0} \right] \quad (5.4)$$

В частности, если при \bar{M}_0 имел место минимум давления так, что $\delta_0' [\bar{M}_0] = \infty$, то дальнейшее изменение минимального давления будет определяться соотношением

$$M_{\min} = \frac{\bar{M}_0 t_0}{t}$$

Угол наклона касательной к эпюре давления в точке $M = 0$ будет слабо убывать с течением времени.

Пользуясь интегралом (5.2), можно так же оценить быстроту стремления волны к предельной волне, форма которой зависит только от $2/t$.

Поступила 25 V 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1954.
2. Коул (Cole). Подводные взрывы. ИЛ, 1952.
3. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.