Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ НА КОНТУРЕ СТЕНКИ

В. В. Соколовский
(Москва)

В предлагаемой работе исследовано плоское предельное равновесие связной среды, ограниченной криволинейной стенкой, которое сопровождается некоторой кривой разрыва. Контактные напряжения определены численно, а во многих случаях даны в простой замкнутой форме.

§ 1. Стенка в связной среде. Рассмотрим сначала связную среду, которая наряду со сцеплением имеет внутреннее трение, и определим давление такой среды на криволинейную стенку.

Плоское предельное равновесие связной среды с объемным весом γ, коэффициентом сцепления k и углом внутреннего трения ρ описывается дифференциальными уравнениями равновесия (ось y направлена вниз)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma \tag{1.1}$$

и условием предельного состояния

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{\sin^2 \rho}{4}(\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2, \qquad H = k \operatorname{ctg} \rho \tag{1.2}$$

причем для компонент напряжения принято правило знаков, обычное в статике сыпучей среды [1].

Эту систему уравнений удобно преобразовать путем перехода от компонент напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} к новым переменным σ и φ по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma(1 \pm \sin \rho \cos 2\varphi) - H, \qquad \tau_{xy} = \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \tag{1.3}$$

в которых φ есть угол между наибольшим главным нормальным напряжением и осью x. Внося в дифференциальные уравнения равновесия (1.1) выражения (1.3), найдем

$$(1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \sin \rho \left[\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0$$

$$\sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \sin \rho \left[\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = \gamma$$

Полученная основная система уравнений принадлежит к гиперболическому типу и имеет два вещественных семейства характеристик, которые определяются известными дифференциальными уравнениями:

$$dy = dx \operatorname{tg}(\varphi \mp \mu), \qquad d\sigma \mp 2\sigma \operatorname{tg} \rho \, d\varphi = \gamma (dy \mp \operatorname{tg} \rho \, dx) \tag{1.4}$$

Характеристики на плоскости x и y образуют два изогональных семейства линий, пересекающихся под углами $2\mu = \pi/2 - \rho$. Они наклонены к оси x под углами $\varphi \mp \mu$ и совпадают с линиями скольжения.

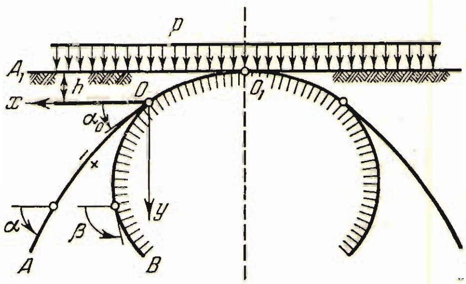
Займемся определением контактных напряжений на контуре стенки, предполагая, что вдоль горизонтальной границы задано равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_y = p$ (фиг. 1).

При этом необходимо отдельно рассматривать области A_1O_1Ox, xOA и AOB. Области xOA и AOB разделены кривой разрыва OA, на которой хотя и сохраняется равновесие, но нет полной непрерывности напряжений.

В областях A_1O_1Ox и xOA возникают простейшие поля напряжений, определяемые величинами

$$\sigma = \sigma(y) = \frac{\gamma y + q + H}{1 + \sin\rho}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (q = p + \gamma h) \tag{1.5}$$



Фиг. 1

или компонентами напряжения

$$\sigma_x + H = (\gamma y + q + H)\frac{1 - \sin\rho}{1 + \sin\rho}$$

$$\sigma_y = \gamma y + q, \quad \tau_{xy} = 0$$

и сеткой характеристик в виде двух семейств параллельных прямых:

$$y = \pm x \operatorname{ctg}\mu + \text{const}$$

Остановимся теперь на граничных условиях вдоль кривых OA и OB, обозначая через t касательную, а через n нормаль к рассматриваемой кривой. Компоненты напряжения σ_t, σ_n и τ_{tn} могут быть выражены через новые переменные σ и ψ по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t\\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \sigma(1 \pm \sin\rho\cos 2\psi) - H, \quad \tau_{tn} = \sigma\sin\rho\sin 2\psi \tag{1.6}$$

в которых ψ есть угол между наибольшим главным нормальным направлением и осью t. Из сопоставления (1.3) и (1.6) ясно, что $\varphi - \psi$ представляет собой угол между осями x и t.

Условимся через α и β обозначать углы между осью x и касательными к кривым OA и OB, а через α_0 и β_0 — их значения в точке O.

Прежде всего заметим, что вдоль некоторой дуги O_1O контура стенки на основании (1.5) и (1.6) при $\psi = \pi/2 - \beta$ имеют место

$$\sigma_n = \sigma(y)(1 + \sin\rho\cos 2\beta) - H, \quad \tau_{tn} = \sigma(y)\sin\rho\sin 2\beta$$

Будем иметь в виду, что вдоль кривой OA компоненты напряжения σ_n и τ_{tn} должны быть непрерывны, а компонента σ_t разрывна. Следовательно, из (1.5) и (1.6) при $\psi = \varphi - \alpha$ получим

$$\sigma[1 - \sin\rho\cos 2(\varphi - \alpha)] = \sigma(y)(1 + \sin\rho\cos 2\alpha)$$

$$\sigma\sin 2(\varphi - \alpha) = \sigma(y)\sin 2\alpha$$

Отсюда после простых преобразований можно найти

$$\sin(2\alpha - \varphi) = \sin\rho\sin\varphi, \quad 0 \leqslant 2\alpha - \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

и, кроме того,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \sigma = \sigma(y)\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2(\varphi - \alpha)} \tag{1.7}$$

Отметим, что точно такие же условия вдоль кривой разрыва уже применялись ранее [1] при определении формулы устойчивого полусвода.

Будем считать, что вдоль кривой OB, которая является контуром стенки, между компонентами напряжения σ_n и τ_{tn} имеет место соотношение

$$\tau_{tn} = (\sigma_n + H) \operatorname{tg} \delta, \quad \delta \leqslant \rho$$

Поэтому вследствие (1.6) при $\psi = \varphi - \beta$ должно быть

$$\sin \rho \sin 2(\varphi - \beta) = [1 - \sin \rho \cos 2(\varphi - \beta)] \operatorname{tg} \delta$$

Отсюда

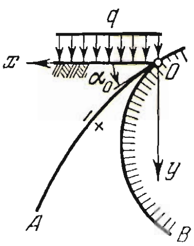
$$\sin [2(\varphi - \beta) + \delta] = \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \quad 0 \leqslant 2(\varphi - \beta) + \delta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{1.8}$$

Отметим наиболее интересные частные случаи контурного условия;

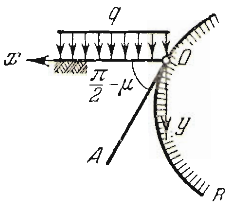
$$\delta = 0, \quad \delta = \rho$$

когда, соответственно

$$\varphi = \beta, \quad \varphi = \beta + \mu$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Точка O контура стенки должна быть выбрана так, чтобы компоненты σ_n и τ_{tn} были непрерывны; кривая разрыва OA и контур OB имеют общую касательную, наклоненную к оси x под углом $\alpha_0 = \beta_0$, причем

$$\sin (2\alpha_0 - \delta) = \frac{\sin \delta}{\sin \rho}, \qquad 0 \leqslant 2\alpha_0 - \delta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{1.9}$$

В области AOB поле напряжений уже не будет простейшим и должно быть найдено путем численного решения уравнений характеристик (1.4) по граничным условиям (1.7) и (1.8) вдоль кривых OA и OB (фиг. 2).

Значение $\sigma = \sigma_0$ в точке O может быть выражено через q. Действительно, на основании (1.7) при $y = 0$ найдем

$$\sigma_0 = \frac{q + H}{1 + \sin \rho} \, \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2(\alpha_0 - \delta)} \tag{1.10}$$

Особенно интересен частный случай $\delta = \rho$, когда

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \sigma_l^+ = \sigma_l^-$$

а кривая разрыва переходит в прямую характеристику OA (фиг. 3).

§ 2. Некоторые приближенные решения. Рассмотрим узкий слой вдоль выпуклого контура стенки и получим приближенные интегралы основных уравнений предельного равновесия в двух частных случаях: $\delta = 0$ и $\delta = \rho$.

Выберем за ортогональные криволинейные координаты соответственно длину s дуги контура стенки и длину n нормали, отсчитанной от контура (фиг. 4), так что $OM = s$ и $MN = -n$, причем $n < 0$.

Задавая форму контура и радиус кривизны уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad R = R(s) = ds / d\beta$$

легко установить зависимости

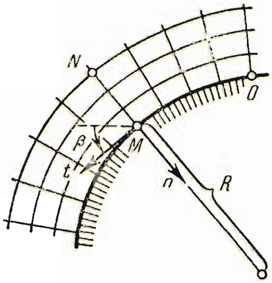
$$x = x(s) - n \sin\beta, \quad y = y(s) + n\cos\beta$$

а также коэффициент Ламе

$$g = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{n}{R(s)}$$

Дифференциальные уравнения равновесия в принятых криволинейных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_t}{\partial s} + g\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial n} - \frac{2\tau_{tn}}{R} = \gamma g \sin\beta \\ &\frac{\partial\tau_{tn}}{\partial s} + g\frac{\partial\sigma_n}{\partial n} + \frac{\sigma_t - \sigma_n}{R} = \gamma g\cos\beta \end{aligned} \qquad (2.1)$$



Фиг. 4

а компоненты напряжения можно выразить через σ и ψ по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t\\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \sigma(1 \pm \sin\rho\cos 2\psi) - H$$

$$\tau_{tn} = \sigma\sin\rho\sin 2\psi, \quad \psi = \varphi - \beta \qquad (2.2)$$

в которых ψ — угол наклона наибольшего главного нормального напряжения к оси t. Таким образом, основная система теперь будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} &(1 + \sin\rho\cos 2\psi)\frac{\partial\sigma}{\partial s} + \sin\rho\sin 2\psi g\frac{\partial\sigma}{\partial n} - \\ &- 2\sigma\sin\rho\left[\sin 2\psi\frac{\partial\varphi}{\partial s} - \cos 2\psi g\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] = \gamma g\sin\beta \end{aligned} \qquad (2.3)$$

$$\sin\rho\sin 2\psi\frac{\partial\sigma}{\partial s} + (1 - \sin\rho\cos 2\psi) g\frac{\partial\sigma}{\partial n} + 2\sigma\sin\rho\left[\cos 2\psi\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \sin 2\psi g\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] = \gamma g\cos\beta$$

или в результате простых преобразований

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial s} \mp 2\sigma\,\mathrm{tg}\,\rho\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right] + \mathrm{tg}(\psi \mp \mu) g\left[\frac{\partial\sigma}{\partial n} \mp 2\sigma\,\mathrm{tg}\,\rho\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \gamma\frac{\cos(\beta\mp\rho)}{\cos\rho}\right] = \gamma g\frac{\sin(\beta\mp\rho)}{\cos\rho} \qquad (2.4)$$

Покажем сначала, как построить приближенное решение вблизи контура стенки в частном случае $\delta = 0$, когда на самом контуре $\sigma = \sigma(s)$ и $\psi = 0$. С этой целью положим

$$\sigma = \sigma(s) + S, \quad \psi = \Psi, \quad g = 1 - n / R$$

и будем считать, что S, Ψ и n малы. Тогда на основании (2.2) приближенно

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t\\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = (\sigma(s) + S)(1 \pm \sin\rho) - H, \qquad \tau_{tn} = 2\sigma(s)\sin\rho\Psi$$

Внесем σ, ψ и g в уравнение (2.3), а затем оценим порядок различных членов и отбросим те из них, которые малы по сравнению с остальными.

Приближенно получим

$$2\sigma(s)\sin\rho\frac{\partial\Psi}{\partial n}=\gamma\sin\beta-\sigma'(s)(1+\sin\rho)$$

$$(1-\sin\rho)\frac{\partial S}{\partial n}=\gamma\cos\beta-\frac{2}{R}\sigma(s)\sin\rho$$

Эти уравнения должны быть проинтегрированы с учетом граничных условий $S=\Psi=0$ при $n=0$ в виде

$$2\sigma(s)\sin\rho\,\Psi=[\gamma\sin\beta-\sigma'(s)(1+\sin\rho)]\,n$$

$$(1-\sin\rho)S=\left[\gamma\cos\beta-\frac{2}{R}\sigma(s)\sin\rho\right]n \tag{2.5}$$

Дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\varphi\mp\mu)\quad\text{или}\quad\frac{dn}{ds}=g\operatorname{tg}(\psi\mp\mu)$$

после подстановки ψ и g приближенно дают

$$\frac{dn}{ds}=\mp\operatorname{tg}\mu\left(1-\frac{n}{R}\right)+\frac{\Psi}{\cos^2\mu} \tag{2.6}$$

Теперь нетрудно получить компоненты напряжения

$$\sigma_n+H=\sigma(s)(1-\sin\rho)+\left[\gamma\cos\beta-\frac{2}{R}\sigma(s)\sin\rho\right]n$$

$$\tau_{tn}=[\gamma\sin\beta-\sigma'(s)(1+\sin\rho)]\,n$$

а вместе с тем и компоненту

$$\sigma_t+H=\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}(\sigma_n+H)$$

Предыдущие формулы могут быть использованы также, если контур стенки есть прямая, наклоненная под углом β к оси x; при этом следует считать, что $R\to\infty$.

Покажем теперь, как найти приближенное решение вблизи контура стенки в другом частном случае $\delta=\rho$, когда на этом контуре $\sigma=\sigma(s)$ и $\psi=\mu$. Положим

$$\sigma=\sigma(s)+S,\qquad\psi=\mu-\Psi,\qquad g=1-n/R$$

и будем опять-таки считать, что S, Ψ и n малы.

Подставим σ, ψ и g в уравнения (2.4), а затем оценим порядок различных членов и отбросим те из них, которые малы по сравнению с остальными. Приближенно найдем

$$\frac{\partial S}{\partial n}-2\sigma(s)\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\Psi}{\partial n}=0$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial n}+2\sigma(s)\operatorname{tg}\rho\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right]\Psi=\sigma'(s)-\gamma\frac{\sin(\beta-\rho)}{\cos\rho}-\frac{2}{R}\sigma(s)\operatorname{tg}\rho$$

Первое уравнение вместе с граничными условиями $S=\Psi=0$ при $n=0$ имеет интеграл

$$S=2\sigma(s)\operatorname{tg}\rho\Psi \tag{2.7}$$

а второе может быть преобразовано таким образом:

$$\frac{\partial\Psi^2}{\partial n}=\frac{\operatorname{ctg}\rho}{2\sigma(s)}\left(\sigma'(s)-\gamma\frac{\sin(\beta-\rho)}{\cos\rho}\right)-\frac{1}{R}$$

Оно должно быть проинтегрировано с учетом граничного условия $\Psi = 0$ при $n = 0$ в виде

$$\Psi^2 = \left[\frac{\operatorname{ctg}\rho}{2\sigma(s)}\left(\sigma'(s) - \gamma\frac{\sin(\beta-\rho)}{\cos\rho}\right) - \frac{1}{R}\right]n \qquad (2.8)$$

Дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dn}{ds} = g\operatorname{tg}(\psi \mp \mu)$$

после подстановки ψ и g приближенно дают

$$\frac{dn}{\partial s} = -\Psi, \qquad \frac{dn}{ds} = \operatorname{ctg}\rho\left(1 - \frac{n}{R} - \frac{2\Psi}{\sin 2\rho}\right)$$

Полученные интегралы могут быть применены также, если контур стенки есть прямая, наклоненная под углом β к оси x; при этом нужно считать, что $R \to \infty$. Интеграл (2.7) принимает следующий вид:

$$S = 2\sigma(s)\operatorname{tg}\rho\Psi$$

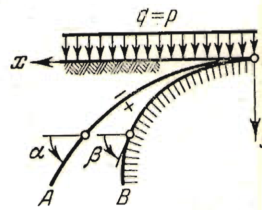
а интеграл (2.8) после простых преобразований напишется так:

$$\Psi^2 = \frac{\operatorname{ctg}\rho}{2\sigma(s)}\left[\sigma'(s) - \frac{\gamma\sin(\beta-\rho)}{\cos\rho}\right]n$$

Последнее выражение несколько упрощается при отсутствии собственного веса, когда $\gamma = 0$, а угол β выпадает из рассмотрения.

Остановимся на последнем интеграле в частном случае идеально сыпучей среды ($k = 0$), предполагая, что в рассматриваемой задаче отсутствует характерная длина l. Так как при этом величины

$$\sigma'(s) = \sigma'(l\bar{s}), \qquad \frac{\sigma(s)}{n} = \frac{\sigma(l\bar{s})}{l\bar{n}}$$



Фиг. 5

в которых приняты обозначения $s = l\bar{s}$, $n = l\bar{n}$, не должны зависеть от l, то произвольную функцию $\sigma(s)$ можно представить в виде

$$\sigma(s) = \gamma\sigma_0 s$$

так что

$$\Psi^2 = -\frac{\operatorname{ctg}\rho}{2}\left[1 - \frac{\sin(\beta-\rho)}{\sigma_0\cos\rho}\right]\frac{n}{s}$$

Это соотношение было получено Т. Карманом [3] как интеграл системы уравнений предельного равновесия для весового клина из идеально сыпучей среды, в которой величины всех компонент напряжения пропорциональны расстояниям от вершины клина.

Остановимся подробнее на частном случае $\delta = 0$, когда $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ и $q = p$, а контур стенки имеет в точке O горизонтальную касательную, и построим приближенное решение в окрестности этой точки O (фиг. 5).

Уравнения контура стенки могут быть при малых s приближенно выражены в виде

$$x = x(s) = s, \qquad y = y(s) = \frac{s^2}{2R_0} \qquad \text{или} \qquad y = \frac{x^2}{2R_0}$$

а формулы перехода от прямолинейных x и y к криволинейным координатам s и n представлены так:

$$s = x, \quad n = y - \frac{x^2}{2R_0}, \quad R_0 = R(0)$$

Искомое приближенное решение около точки O может быть найдено при помощи интегралов (2.5). Имея в виду, что

$$\sigma(0) = \frac{p+H}{1-\sin\rho}$$

приближенно найдем

$$(1-\sin\rho)\,S = \left[\gamma - \frac{2(p+H)\sin\rho}{R_0(1-\sin\rho)}\right]n, \qquad \Psi = -\frac{\sigma'(0)\cos^2\rho}{2(p+H)\sin\rho}\,n$$

Условия (1.7) вдоль кривой OA могут быть также приближенно написаны следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = (1+\sin\rho)\frac{\beta}{2}, \qquad (1-\sin\rho)\,\sigma = \gamma y + (p+H)(1-\sin\rho\,\beta^2)$$

Внося вместо β его приближенное значение $\beta = x/R_0$, получим

$$\frac{dy}{dx} = (1+\sin\rho)\frac{x}{2R_0}$$

которое вместе с граничными данными $y=0$ при $x=0$ устанавливает, что кривая OA есть парабола

$$y = (1+\sin\rho)\frac{x^2}{4R_0} \quad \text{или} \quad -n = (1-\sin\rho)\frac{s^2}{4R_0} \tag{2.9}$$

Приведенные интегралы и условия вдоль кривой OA определяют функцию $\sigma(s)$ следующим образом:

$$(1-\sin\rho)\,\sigma(s) = p + H + \left[\gamma - \frac{3}{R_0}(p+H)\sin\rho\right]\frac{s^2}{2R_0}$$

Теперь легко видеть, что $\sigma'(0)=0$ и с прежней степенью точности

$$(1-\sin\rho)\,S = \left[\gamma - \frac{2(p+H)\sin\rho}{R_0(1-\sin\rho)}\right]n, \qquad \Psi = 0$$

а характеристиками — линиями скольжения — служат

$$n = R_0 + C\exp\left(\pm\operatorname{tg}\mu\,\frac{s}{R_0}\right)$$

Нетрудно также определить компоненты напряжения σ_n и τ_{tn} в непосредственной близости от стенки:

$$\sigma_n = \gamma y + p - \frac{3}{R_0}(p+H)\sin\rho\left[\frac{s^2}{2R_0} + \frac{2n}{3(1-\sin\rho)}\right], \qquad \tau_{tn} = 0$$

а также компоненту σ_n на самом контуре:

$$\sigma_n = p + \left[\gamma - \frac{3}{R_0}(p+H)\sin\rho\right]\frac{s^2}{2R_0} \tag{2.10}$$

Отсюда нетрудно установить, что при фиксированных p и k компонента σ_n возрастает или убывает с увеличением угла внутреннего трения ρ в зависимости от того, будет ли $p < k\operatorname{tg}\rho$ или $p > k\operatorname{tg}\rho$, а при $p = k = 0$ компонента

$$\sigma_n = \frac{\gamma s^2}{2R_0}$$

вовсе не зависит от ρ.

Вернемся теперь от криволинейных координат s и n к прямолинейным координатам x и y. Функции σ и φ определяются приближенными формулами

$$\sigma = \frac{\gamma y + p + H}{1-\sin\rho} - \frac{2(p+H)\sin\rho}{R_0(1-\sin\rho)^2}\left[y + (1-3\sin\rho)\frac{x^2}{4R_0}\right], \qquad \varphi = \frac{x}{R_0}$$

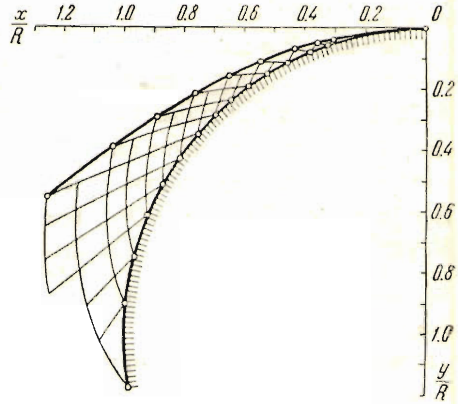
которые, конечно, справедливы только в небольшой окрестности точки O.

Обратим внимание, что все предыдущие рассуждения в полной мере справедливы и для идеально сыпучей среды, т. е. когда $k = H = 0$. Однако упрощение предыдущих формул при этом незначительно.

В качестве примера рассмотрена круговая стенка радиуса R для

$$\rho = \pi/6, \ \delta = 0 \ \text{и} \ p + H = 5\gamma R$$

Вблизи от точки O применены предыдущие приближенные формулы, а вдали от нее использованы обычные [1] методы численного интегрирования уравнений (1.4). Найдены безразмерные координаты x/R и y/R кривой OA:



Фиг. 6

$x/R =$ 0.00	0.20	0.31	0.43	0.55	0.65	0.76	0.89	1.04	1.26
$y/R =$ 0.00	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.21	0.29	0.38	0.55

и значения безразмерной величины

$$N = \frac{\sigma_n + H}{\gamma R}$$

для различных значений безразмерной длины s/R кривой OB:

$s/R =$ 0.00	0.21	0.33	0.39	0.48	0.55	0.63	0.70
$N =$ 5.00	4.86	4.67	4.55	4.35	4.16	3.97	3.78
$s/R =$ 0.77	0.86	0.95	1.06	1.17	1.32	1.47	1.74
$N =$ 3.59	3.35	3.12	2.85	2.60	2.29	1.99	1.54

а также построена сетка характеристик — линий скольжения (фиг. 6).

§ 3. Стенка в идеально связной среде. Обратимся теперь к так называемой идеально связной среде, которая обладает сцеплением, но лишена внутреннего трения, и определим давление такой среды на криволинейную стенку.

Плоское предельное равновесие идеально сыпучей среды с объемным весом γ и коэффициентом сцепления k описывается теми же дифференциальными уравнениями равновесия (1.1) и условием предельного состояния

$$\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}{}^2 = k^2$$

Такую систему уравнений удобно изучать при помощи перехода к новым переменным σ и φ, связанным с компонентами напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} следующим образом:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \sigma \pm k\cos 2\varphi, \qquad \tau_{xy} = k \sin 2\varphi \tag{3.1}$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1) выражения (3.1), найдем

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\left[\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + 2k\left[\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = \gamma$$

Эта система также принадлежит к гиперболическому типу, а ее характеристики даются такими уравнениями:

$$dy = dx \operatorname{tg}\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{\sigma - \gamma y}{2k} \mp \varphi = \text{const} \tag{3.2}$$

Характеристики на плоскости координат x и y составляют теперь два ортогональных семейства. Они наклонены к оси x под углами $\varphi \mp \pi/4$ и опять-таки совпадают с линиями скольжения.

Займемся нахождением контактных напряжений на контуре стенки, считая, что вдоль горизонтальной границы задано равномерно распределенное нормальное давление $\sigma_y = p$.

В областях A_1O_1Ox и xOA образуются простейшие поля напряжений, даваемые величинами

$$\sigma = \gamma y + q - k, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad (q = p + \gamma h) \tag{3.3}$$

или компонентами напряжения

$$\sigma_x = \gamma y + q - 2k, \quad \sigma_y = \gamma y + q, \quad \tau_{xy} = 0$$

и сеткой характеристик в виде двух ортогональных семейств параллельных прямых

$$y = \pm x + \text{const}$$

Остановимся теперь на граничных условиях вдоль кривых OA и OB. Компоненты напряжения могут быть представлены по формулам

$$\left.\begin{matrix}\sigma_t \\ \sigma_n\end{matrix}\right\} = \sigma \pm k \cos 2\psi, \quad \tau_{tn} = k \sin 2\psi \tag{3.4}$$

где ψ имеет обычный смысл, так что $\varphi - \psi$ есть угол между осями x и t.

Условимся попрежнему через α и β обозначать углы между осью x и касательными к кривым OA и OB, а через α_0 и β_0 — их значения в точке O.

Заметим, что вдоль некоторой дуги O_1O контура стенки вследствие (3.3) и (3.4) при $\psi = \pi/2 - \beta$ имеют место

$$\sigma_n = \gamma y + q - k(1 - \cos 2\beta), \quad \tau_{tn} = k \sin 2\beta$$

Будем иметь в виду, что вдоль кривой OA компоненты напряжения σ_n и τ_{tn} непрерывны, а компонента σ_t имеет конечный разрыв. Поэтому из уравнений (3.3) и (3.4) при $\psi = \varphi - \alpha$ получим

$$\frac{\sigma}{k} - \cos 2(\varphi - \alpha) = \frac{\gamma y + q}{k} - 1 + \cos 2\alpha$$

$$\sin 2(\varphi - \alpha) = \sin 2\alpha$$

Отсюда после простых преобразований можно найти

$$\frac{dy}{d\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \varphi = 2\alpha, \quad \sigma = \gamma y + q + k(2\cos 2\alpha - 1) \tag{3.5}$$

Будем считать, что вдоль кривой OB, которая является контуром стенки, компонента напряжения

$$\tau_{tn} = t \qquad (0 \leqslant t \leqslant k)$$

Поэтому вследствие уравнений (3.3) при $\psi = \varphi - \beta$ должно быть

$$\sin 2(\varphi - \beta) = \frac{t}{k}, \qquad 0 \leqslant 2(\varphi - \beta) \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{3.6}$$

Точку O следует выбрать так, чтобы компоненты σ_n и τ_{tn} были непрерывны. Легко показать, что кривая разрыва OA и контур стенки OB имеют общую касательную, наклоненную к оси x под углом $\alpha_0 = \beta_0$, причем

$$\sin\, 2\alpha_0 = \frac{t}{k}\,, \qquad 0 \leqslant 2\alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$$

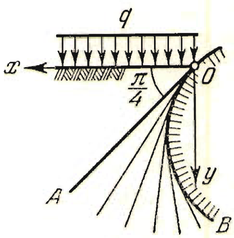
В области AOB поле напряжений уже не будет простейшим и должно быть найдено путем численного решения уравнений характеристик (3.2) по граничным условиям (3.5) и (3.6) вдоль кривых OA и OB.

Значение $\sigma = \sigma_0$ в точке O может быть выражено через q. В самом деле, приравнивая величины σ, взятые при $y = 0$, по формулам (3.5) и (3.6), найдем

$$\sigma_0 = q + k\,(2\cos 2\alpha_0 - 1)$$

Особенно простое решение имеет место в частном случае $t = k$, когда

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \sigma_t^{+} = \sigma_t^{-}$$



Фиг. 7

а кривая разрыва становится прямой характеристикой OA (фиг. 7). При этом функции σ и φ в области AOB при помощи обозначений $x(s) = x_1(\beta)$, $y(s) = y_1(\beta)$, $\bar\varphi = \varphi - \pi/4$ могут быть представлены в виде

$$\sigma = \gamma y + q - k\left(1 - \frac{\pi}{2} + 2\bar\varphi\right)$$

$$y = y_1(\bar\varphi) + [x - x_1(\bar\varphi)]\operatorname{tg}\bar\varphi \tag{3.7}$$

а компонента напряжения σ_n на контуре стенки дана так:

$$\sigma_n = \gamma y + q - k\left(1 - \frac{\pi}{2} + 2\beta\right) \tag{3.8}$$

Характеристиками — линиями скольжения — здесь служат касательные прямые к контуру стенки и ортогональные к ним кривые.

Остановимся, наконец, на частном случае $t = 0$, когда $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ и $q = p$, а контур стенки имеет в точке O горизонтальную касательную, и приведем приближенное решение вблизи этой точки O.

Кривая OA вместо (2.9) определяется теперь следующим образом:

$$y = \frac{x^2}{4R_0} \qquad \text{или} \qquad -n = \frac{s^2}{4R_0} \tag{3.9}$$

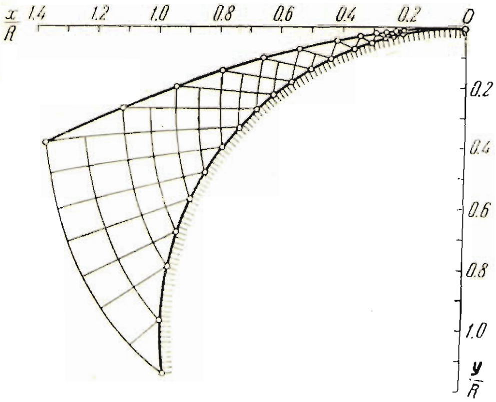
а компонента напряжения σ_n на контуре стенки вместо (2.10) будет

$$\sigma_n = p + \left[\gamma - \frac{3k}{R_0}\right]\frac{s^2}{2R_0} \tag{3.10}$$

Функции σ и φ даются приближенными формулами

$$\sigma = \gamma y + p + k - \frac{2k}{R_0}\left[y + \frac{x^2}{4R_0}\right], \quad \varphi = \frac{x}{R_0}$$

которые справедливы около точки O.



Фиг. 8

Все приведенные выше формулы могут быть получены непосредственно из соответствующих формул § 2 заменой σ на $\sigma + H$, H на $k\,\mathrm{ctg}\,\rho$ и предельного перехода $\rho \to 0$ и $\delta \to 0$.

В качестве примера рассмотрена круговая стенка радиуса R для $\delta = 0$ и $k = \gamma R$.

Около точки O использованы предыдущие приближенные формулы, а вдали от нее — обычные методы численного интегрирования уравнений (3.2).

Получены безразмерные координаты x/R и y/R кривой OA:

$x/R =$ 0.00	0.20	0.29	0.42	0.54	0.66	0.79	0.94	1.12	1.37
$y/R =$ 0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.14	0.20	0.27	0.38

и значения безразмерной величины

$$N = \frac{\sigma_n - p}{\gamma R}$$

для значений безразмерной длины s/R кривой OB:

$s/R =$ 0.00	0.21	0.31	0.46	0.53	0.61	0.68	0.75
$-N =$ 0.00	0.04	0.09	0.18	0.24	0.30	0.36	0.41
$s/R =$ 0.84	0.92	1.02	1.12	1.24	1.35	1.57	1.71
$-N =$ 0.49	0.56	0.65	0.73	0.83	0.93	1.09	1.25

а также построена сетка характеристик — линии скольжения (фиг. 8).

Сопоставление результатов вычислений в примерах § 1 и 3 дает представление о влиянии внутреннего трения на величины контактных напряжений вдоль контура стенки.

Поступила 21 VI 1956

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. первое. Изд. АН СССР, 1942. Изд. второе. Гостехиздат, 1954.
2. Соколовский В. В. О формах устойчивых полусводов и сводов. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
3. Karman T. Ueber elastische Grenzzustände. Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongress für technische Mechanik, Zürich, 1927.