Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО В ПЛАНЕ ШТАМПА ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

В работе дано точное решение следующей смешанной задачи теории упругости для полупространства ($z \geqslant 0$): в области $z = 0$, $r < a$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) заданы перемещения u, v и w, а в области $z = 0$, $r > a$ — напряжения σ_z, τ_{zx}, τ_{yz}.

В качестве приложения рассмотрена контактная задача для случая, когда круговой в плане жесткий штамп, сцепленный с упругим полупространством, подвергается действию произвольной системы внешних сил.

В. И. Моссаковский в работах [1, 2] предложил метод приведения этих смешанных задач теории потенциала для полупространства к плоской задаче линейного сопряжения двух аналитических функций. Фактическое проведение вычислений оказывается при этом весьма затруднительным, в связи с чем в работах Моссаковского доведено до конца только рассмотрение случая загружения штампа осевой силой. Кроме того, решение Моссаковского относится лишь к тому частному случаю, когда разложения заданных значений перемещений и напряжений в ряды Фурье по полярному углу содержат конечное число членов.

Существенное упрощение, которое удалось внести в решение указанных задач в настоящей работе, обусловлено двумя обстоятельствами: во-первых, использование представления решений уравнений теории упругости в форме Папковича—Нейбера позволило, распорядившись выбором четвертой гармонической функции, упростить формулировку краевых задач; во-вторых, и это главное, при решении задачи для круговой области оказалось плодотворным использование тороидальных координат, допускающее применение интегрального разложения Мелера—Фока. Это дало возможность представить распределение напряжений на поверхности контакта в форме легко табулируемых квадратур и получить в замкнутом и притом весьма простом виде соотношения между приложенными к штампу силами и его перемещениями.

§ 1. Сведение смешанной задачи к краевым задачам для гармонических функций. В настоящей работе мы будем пользоваться известными выражениями упругих перемещений через четыре гармонические функции Папковича — Нейбера:

$$2\mu u = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \qquad 2\mu v = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2$$

$$2\mu w = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_3 \tag{1.1}$$

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3, \qquad \Delta\Phi_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Соответствующие формулы для напряжений σ_z, τ_{zx}, τ_{yz} таковы:

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}[2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_4] + 2\nu\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} + z\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2}\right)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - x\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - y\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - z\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right] + 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \tag{1.2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4 - x\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - y\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - z\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right] + 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}$$

где введена гармоническая функция $\Phi_4 = \partial\Phi_0 / \partial z$.

Для решения поставленной во введении к работе смешанной задачи введем тороидальные координаты α, β, φ $(0 \leqslant \alpha < \infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ при помощи соотношения $r + iz = a\,\mathrm{th}\,(\alpha + i\beta)/2$, из которого следуют связи

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \qquad \frac{z}{a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \tag{1.3}$$

При этом часть плоскости $z = 0$, $r < a$ будет координатной поверхностью $\beta = 0$, а часть плоскости $z = 0$, $r > a$ — поверхностью $\beta = \pi$.

Граничные условия рассматриваемой смешанной задачи могут быть теперь записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} &[u]_{\beta=0} = u_0(\alpha, \varphi), && [v]_{\beta=0} = v_0(\alpha, \varphi), && [w]_{\beta=0} = w_0(\alpha, \varphi) \\ &[\sigma_z]_{\beta=\pi} = \sigma_0(\alpha, \varphi), && [\tau_{zx}]_{\beta=\pi} = \tau_{x0}(\alpha, \varphi), && [\tau_{yz}]_{\beta=\pi} = \tau_{y0}(\alpha, \varphi) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $u_0, v_0, \ldots, \tau_{y0}$ — заданные функции.

Пользуясь наличием в решении Папковича—Нейбера четырех функций. можно дополнить условия (1.4) еще двумя произвольными зависимостями. В качестве первой из них зададим при $\beta = 0$ значение F в виде некоторой плоской гармонической функции

$$[F]_{\beta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^n e^{in\varphi} \tag{1.5}$$

где F_n — неизвестные постоянные [1].

Кроме того, удобно положить

$$[(1 - 2\nu)\,\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=\pi} = \left(x\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + y\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)_{\beta=\pi} \tag{1.6}$$

Принятые соотношения (1.5) — (1.6) немедленно приводят к следующим раздельным краевым задачам для функций Φ_1 и Φ_2:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad 4(1 - \nu)[\Phi_1]_{\beta=0} = 2\mu u_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\beta=0}, \quad 2(1 - \nu)\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right]_{\beta=\pi} = \tau_{x0} \tag{1.7}$$

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad 4(1 - \nu)[\Phi_2]_{\beta=0} = 2\mu v_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\beta=0}, \quad 2(1 - \nu)\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right]_{\beta=\pi} = \tau_{y0} \tag{1.8}$$

Если же функции Φ_1 и Φ_2 найдены, то для выполнения оставшихся граничных условий и зависимостей (1.5) — (1.6) функции Φ_3 и Φ_4 должны быть найдены в результате решения следующей краевой задачи:

$$\Delta\Phi_3 = 0, \qquad \Delta\Phi_4 = 0$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right]_{\beta=0} = \frac{\mu}{2(1 - \nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(xu_0 + yv_0)\Big|_{\beta=0} = F^{(1)}(\alpha, \varphi)$$

$$[(3 - 4\nu)\,\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=0} = 2\mu w_0 + \left[x\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + y\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right]_{\beta=0} = F^{(2)}(\alpha, \varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[2(1 - \nu)\,\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=\pi} = \sigma_0 + \left[x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\right]_{\beta=\pi} - 2\nu\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right]_{\beta=\pi} = F^{(3)}(\alpha, \varphi)$$

$$[(1 - 2\nu)\,\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=\pi} = \frac{1}{2(1 - \nu)}[x\tau_{x0} + y\tau_{y0}]_{\beta=\pi} = F^{(4)}(\alpha, \varphi) \tag{1.9}$$

---

[1] Постоянная F_0 несущественна, так как входящая в F функция Φ_0 вообще определяется с точностью до аддитивной константы.

Первое из краевых условий (1.9) получено путем применения двумерного оператора Лапласа к соотношению

$$[\Phi_0]_{\beta=0} = \frac{\mu}{2(\nu-1)}(xu_0 + yv_0)\Big|_{\beta=0} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{n}{4(\nu-1)}\right]F_n r^n e^{in\varphi} \quad (1.10)$$

вытекающему из условия (1.5).

Таким образом, если определить теперь функцию Φ_0 по формуле

$$\Phi_0 = \int_{\infty}^{z} \Phi_4 \, dz \quad (1.11)$$

то ее значение при $\beta = 0$ может отличаться от правой части (1.10) на плоскую гармоническую функцию. В § 3 будет показано, что условию (1.10) можно удовлетворить соответствующим выбором неопределенных коэффициентов F_n.

§ 2. Интегральное разложение Мелера—Фока. В данной работе мы постоянно будем сталкиваться с необходимостью разложения заданной функции $f(x)$ в интеграл по вещественным функциям Лежандра, а именно

$$f(x) = \int_0^{\infty} f^m(\tau)\, P^m_{-1/2+i\tau}(x)\, d\tau \qquad (1 < x < \infty,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (2.1)$$

При определенных предположениях относительно функции $f(x)$ коэффициенты этого разложения могут быть найдены при помощи формулы обращения [1]

$$f^m(\tau) = (-1)^m \tau \operatorname{th} \pi\tau \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)} \int_1^{\infty} f(x)\, P^m_{-1/2+i\tau}(x)\, dx \quad (2.2)$$

Для случая $m = 0$ такие формулы были впервые даны Мелером [3] и в дальнейшем получили строгое обоснование в работах В. А. Фока [4] и Н. Н. Лебедева [5].

Что касается общего случая произвольного m, то, насколько нам известно, класс функций, для которых указанное разложение справедливо, не установлен с достаточной определенностью. Последнее обстоятельство, однако, с точки зрения настоящего исследования не представляется существенным, так как во всех конкретных случаях применения формулы (2.2) справедливость соответствующих разложений может быть непосредственно проверена.

Приложение интегрального разложения Мелера—Фока в контактной задаче теории упругости, данное в § 4—5 настоящей работы, связано с частным случаем $m = 1$, когда разложение ведется по функциям

$$P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{d}{d\alpha} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$$

При этом многие конкретные интегральные разложения легко получаются при помощи формулы [6]

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)}} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\beta\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \qquad (|\beta| \leqslant \pi) \quad (2.3)$$

и различных ее следствий.

---

[1] Формула (2.2) сообщена нам Н. Н. Лебедевым.

Приведем также два интегральных представления функций Лежандра [6]:

$$P_{-{}^1/_2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{ch}\pi\tau\int\limits_0^\infty\frac{\cos\tau s\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}}\tag{2.4}$$

$$P_{-{}^1/_2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{cth}\pi\tau\int\limits_\alpha^\infty\frac{\sin\tau s\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}\tag{2.5}$$

неоднократно используемые в дальнейшем изложении.

§ 3. Решение основной краевой задачи. Для решения краевой задачи (1.9)[1] воспользуемся следующими частными решениями уравнения Лапласа в тороидальных координатах [6]:

$$\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\,e^{\pm\beta\tau}P_{-{}^1/_2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\,e^{im\varphi}$$

и представим функции Φ_3 и Φ_4 в виде разложений:

$$\Phi_{3,4}(\alpha,\beta,\varphi)=\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty[A_{3,4}{}^m(\tau)\operatorname{ch}\beta\tau+B_{3,4}{}^m(\tau)\operatorname{sh}\beta\tau]\,P_{-{}^1/_2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau\tag{3.1}$$

Тогда, подставляя (3.1) в (1.9) и заменяя операции

$$\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{\beta=0}\quad\text{на}\quad\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=0},\qquad\frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{\beta=\pi}\quad\text{на}\quad-\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\pi}$$

где $h=a/(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)$ — коэффициент Ламе, получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty\tau B_4{}^m(\tau)\,P_{-{}^1/_2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=\frac{aF^{(1)}(\alpha,\varphi)}{(\operatorname{ch}\alpha+1)^{3/2}}=f_1(\alpha,\varphi)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty[(3-4\nu)A_3{}^m(\tau)-A_4{}^m(\tau)]\,P_{-{}^1/_2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=\frac{F^{(2)}(\alpha,\varphi)}{(\operatorname{ch}\alpha+1)^{1/2}}=f_2(\alpha,\varphi)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty\tau\,\{2(1-\nu)[A_3{}^m(\tau)\operatorname{sh}\pi\tau+B_3{}^m(\tau)\operatorname{ch}\pi\tau]-$$

$$-[A_4{}^m(\tau)\operatorname{sh}\pi\tau+B_4{}^m(\tau)\operatorname{ch}\pi\tau]\}\,P_{-{}^1/_2+i\tau}^{m}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=-\frac{aF^{(3)}(\alpha,\varphi)}{(\operatorname{ch}\alpha-1)^{3/2}}=f_3(\alpha,\varphi)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int\limits_0^\infty\{(1-2\nu)[A_3{}^m(\tau)\operatorname{ch}\pi\tau+B_3{}^m(\tau)\operatorname{sh}\pi\tau]-$$

$$-[A_4{}^m(\tau)\operatorname{ch}\pi\tau+B_4{}^m(\tau)\operatorname{sh}\pi\tau]\}\,P_{-{}^1/_2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=\frac{F^{(4)}(\alpha,\varphi)}{(\operatorname{ch}\alpha-1)^{1/2}}=f_4(\alpha,\varphi)\tag{3.2}$$

Если выражения, стоящие в правых частях (3.2), можно представить в виде разложений типа (3.1), то, обозначая через $f_k{}^m(\tau)$ $(k=1,2,3,4)$ коэффициенты этих разложений, получим для искомых величин $A_i{}^m(\tau)$

---

[1] Решения более простых краевых задач (1.7) — (1.8), по нашему мнению, также целесообразнее всего получать указанным методом.

($i=3, 4$) следующую систему уравнений:

$$B_4{}^m = \frac{1}{\tau} f_1{}^m, \qquad (3-4\nu) A_3{}^m - A_4{}^m = f_2{}^m$$

$$2(1-\nu)(A_3{}^m \operatorname{sh} \pi\tau + B_3{}^m \operatorname{ch} \pi\tau) - (A_4{}^m \operatorname{sh} \pi\tau + B_4{}^m \operatorname{ch} \pi\tau) = \frac{1}{\tau} f_3{}^m$$

$$(1-2\nu)(A_3{}^m \operatorname{ch} \pi\tau + B_3{}^m \operatorname{sh} \pi\tau) - (A_4{}^m \operatorname{ch} \pi\tau + B_4{}^m \operatorname{sh} \pi\tau) = f_4{}^m \tag{3.3}$$

На основании (2.2), а также обычной теоремы обращения Фурье, коэффициенты $f_k{}^m$ могут быть, вообще говоря, найдены по формуле (3.4)

$$f_k{}^m(\tau) = \frac{(-1)^m}{2\pi} \tau \operatorname{th} \pi\tau \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)} \int\limits_0^{2\pi} e^{-im\varphi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} f_k(\alpha, \varphi) P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha \, d\alpha$$

Заметим, однако, что в конкретных задачах часто бывает удобнее использовать известные представления некоторых функций в виде интегралов типа Мелера — Фока.

Обратимся теперь к нахождению коэффициентов F_n из условия (1.10). Обозначим через $\Phi_i{}^{(0)}$ ($i = 1, 2, 4$) те части функций Φ_i, которые происходят от наличия в правых частях (1.7) — (1.9) членов, связанных с коэффициентами F_n. Из (1.7) — (1.8) следует, что

$$\Phi_1{}^{(0)} = \frac{1}{i} \Phi_2{}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} \Phi_1{}^{(n)}(r, z) e^{in\varphi}$$

после чего соответствующие члены в (1.9) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}(x\Phi_1{}^{(0)} + y\Phi_2{}^{(0)})\Big|_{\beta=0} = \sum_{n=1}^{\infty} r \frac{\partial \Phi_1{}^{(n-1)}(r, z)}{\partial z}\Big|_{\beta=0} F_n e^{in\varphi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x\Phi_1{}^{(0)} + y\Phi_1{}^{(0)})\Big|_{\beta=\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} r \frac{\partial^2 \Phi_1{}^{(n-1)}(r, z)}{\partial z^2}\Big|_{\beta=\pi} F_n e^{in\varphi} \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1{}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2{}^{(0)}}{\partial y}\right)_{\beta=\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial \Phi_1{}^{(n-1)}(r, z)}{\partial r} - \frac{n-1}{r} \Phi_1{}^{(n-1)}(r, z)\right]_{\beta=\pi} F_n e^{in\varphi}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Phi_4{}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \Phi_4{}^{(n)}(r, z) e^{in\varphi}, \qquad \text{или} \qquad \left[\int\limits_{\infty}^{z} \Phi_4{}^{(0)} dz\right]_{\beta=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n F_n r^n e^{in\varphi}$$

где ξ_n — известные числа. Полагая теперь $\Phi_4 = \Phi_4{}^{(0)} + \Phi_4{}^{(1)}$, получим

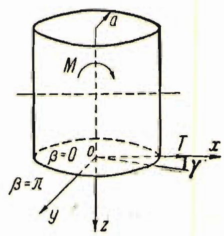
$$\int\limits_{\infty}^{z} \Phi_4{}^{(1)} dz\Big|_{\beta=0} = \frac{\mu}{2(\nu-1)}(xu_0 + yv_0)\Big|_{\beta=0} + \sum_{n=0}^{\infty} G_n r^n e^{in\varphi} \tag{3.6}$$

где G_n — известные величины. Очевидно, что для выполнения условия (1.10) достаточно определить коэффициенты F_n следующим образом:

$$F_n = \frac{G_n}{n/4(\nu-1) + 1 - \xi_n} \tag{3.7}$$

на чем и заканчивается общее решение поставленной задачи.

§ 4. Приложение к контактной задаче. В качестве приложения полученных общих результатов, рассмотрим следующую контактную задачу: к жесткому штампу с плоским круговым основанием радиуса a, сцепленному с упругим полупространством $z \geqslant 0$, приложены произвольные внешние силы. Требуется найти напряжения в полупространстве, а также связи между перемещениями штампа и внешними усилиями. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда внешняя нагрузка сводится к силе, действующей в плоскости основания штампа (в направлении оси Ox), и к паре, расположенной в плоскости осевого сечения штампа (xoz)[1], и будем поначалу считать заданными перемещение u_0 штампа в направлении действия силы и угол поворота γ штампа вокруг оси oy (фиг. 1). В дальнейшем (§ 5) величины u_0 и γ будут выражены через заданные значения силы T и момента M.



Фиг. 1

Таким образом, в общих граничных условиях (1.4) следует принять $u_0 = \text{const}$, $v_0 = 0$, $w_0 = \gamma x$, $\sigma_0 = \tau_{0x} = \tau_{0y} = 0$.

Если положить теперь

$$[F]_{\beta=0} = [F_1 x]_{\beta=0} + \text{const} \tag{4.1}$$

то из уравнений (1.7) — (1.9) вытекает, что $\Phi_2 \equiv 0$, $\Phi_1 \equiv \Phi_1(\alpha, \beta)$ — осесимметричная функция, а Φ_3 и Φ_4 зависят от φ посредством множителя $\cos\varphi$.

Для решения краевой задачи (1.7)

$$\Delta\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_1|_{\beta=0} = A_1, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{\beta=\pi} = 0 \tag{4.2}$$

где введено обозначение

$$A_1 = \frac{2\mu u_0 + F_1}{4(1-\nu)} \tag{4.3}$$

положим

$$\Phi_1 = A_1 \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \int_0^\infty M(\tau) \frac{\operatorname{ch}(\pi-\beta)\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{4.4}$$

Воспользовавшись разложением (2.3), сразу находим $M = \sqrt{2}\,/\operatorname{ch}\pi\tau$, после чего функция Φ_1 представляется в виде квадратуры:

$$\Phi_1 = A_1 \sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi-\beta)\tau}{\operatorname{ch}^2 \pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{4.5}$$

Подставляя в (4.5) интегральное представление (2.4) и изменяя порядок интегрирования, можно прийти к выражению Φ_1:

$$\Phi_1 = \frac{2A_1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}{1-\cos\beta}} \tag{4.6}$$

Переходя к решению основной краевой задачи (1.9)

$$\begin{gathered}
\left[\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}\right]_{\beta=0} = 0, \qquad [(3-4\nu)\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=0} = \left(2\mu\gamma + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)x\,\bigg|_{\beta=0} \\
\frac{\partial}{\partial z}[2(1-\nu)\Phi_3 - \Phi_3]_{\beta=\pi} = \left[x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} - 2\nu\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right]_{\beta=\pi} \\
[(1-2\nu)\Phi_3 - \Phi_4]_{\beta=\pi} = 0
\end{gathered} \tag{4.7}$$

заметим прежде всего, что стоящие в правых частях функции

---

[1] Вместе с более простым случаем осевой силы [1, 2], а также известным решением Рейсснера—Сагоцци[7] для случая крутящего момента этим исчерпываются любые системы внешних сил, приложенных к штампу.

$[r\partial\Phi_1/\partial z]_{\beta=0}$ и $[r\partial^2\Phi_1/\partial z^2]_{\beta=\pi}$, умноженные, как это следует из (3.2), первая на $(\operatorname{ch}\alpha+1)^{-1/2}$, а вторая на $(\operatorname{ch}\alpha-1)^{-3/2}$, не могут быть разложены в интегралы Мелера—Фока, так как при $\alpha\to\infty$ они не стремятся к нулю. Поэтому положим

$$\Phi_3 = \varphi_3(\alpha, \beta)\cos\varphi, \qquad \Phi_4 = [\psi(\alpha, \beta) + \varphi_4(\alpha, \beta)]\cos\varphi \tag{4.8}$$

где функция ψ специально предназначена для ликвидации указанных особых членов в правых частях (4.7). Воспользуемся частным решением уравнения Лапласа $\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\operatorname{sh}\alpha\sin{}^3/_2\beta\cos\varphi$ и будем искать функцию ψ в виде

$$\psi = A\int_{\infty}^{z}\operatorname{sh}\alpha\sin\frac{3\beta}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\,dz \tag{4.9}$$

Выкладки показывают, что для выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi + r\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)_{\beta=\pi} = 0$$

достаточно положить $A = -A_1/\pi a\sqrt{2}$. Наряду с этим, выражение

$$\left(\psi + r\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)_{\beta=0} = \frac{2A_1}{\pi}\,\frac{1-\operatorname{ch}{}^1/_2\alpha}{\operatorname{sh}{}^1/_2\alpha}$$

уже удовлетворяет соответствующим условиям при $\alpha\to\infty$.

Заметим, что функция ψ может быть представлена в замкнутом виде:

$$\psi = B_1\frac{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}{\operatorname{sh}\alpha}\left[\frac{(\operatorname{ch}\alpha+1)\cos{}^1/_2\beta}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}} - 1\right], \qquad B_1 = \frac{2A_1}{\pi} \tag{4.10}$$

Учитывая равенства $[\partial\psi/\partial z]_{\beta=0} = 0$ и $[\psi]_{\beta=\pi} = -B_1\operatorname{th}{}^1/_2\alpha$, приходим к следующим граничным условиям для функций φ_3 и φ_4:

$$\left[\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\right]_{\beta=0} = 0, \qquad [(3-4\nu)\varphi_3 - \varphi_4]_{\beta=0} = 2\mu\gamma\, a\operatorname{th}{}^1/_2\alpha + B_1\frac{1-\operatorname{ch}{}^1/_2\alpha}{\operatorname{sh}{}^1/_2\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[2(1-\nu)\varphi_3 - \varphi_4]_{\beta=\pi} = \frac{\sqrt{2}\nu}{a}B_1\frac{\operatorname{ch}\alpha-1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}} \tag{4.11}$$

$$[(1-2\nu)\varphi_3 - \varphi_4]_{\beta=\pi} = -B_1\operatorname{th}{}^1/_2\alpha$$

Так как в данном случае $m=1$, то следует искать φ_3 и φ_4 в форме

$$\varphi_{3,4} = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\int_0^\infty(A_{3,4}\operatorname{ch}\beta\tau + B_{3,4}\operatorname{sh}\beta\tau)\,P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в (4.11), получим систему уравнений, аналогичную (3.3) ($B_4=0$):

$$\begin{aligned}&(3-4\nu)A_3 - A_4 = M_2\\ &2(1-\nu)(A_3\operatorname{sh}\pi\tau + B_3\operatorname{ch}\pi\tau) - A_4\operatorname{sh}\pi\tau = \frac{M_3}{\tau}\\ &(1-2\nu)(A_3\operatorname{ch}\pi\tau + B_3\operatorname{sh}\pi\tau) - A_4\operatorname{ch}\pi\tau = M_4\end{aligned} \tag{4.13}$$

Коэффициент M_3 нами вычислялся по формуле обращения, а коэффициенты M_2 и M_4 определялись непосредственно при помощи различных следствий формулы (2.3).

Опуская выкладки, приводим окончательные значения:

$$M_2 = -\frac{4\sqrt{2}\mu\gamma a}{\operatorname{ch}\pi\tau} + \frac{B_1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{1}{\tau^2 + {}^1/_4}$$

$$M_3 = B_1\nu\sqrt{2}\frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\tau^2 + {}^1/_4}, \qquad M_4 = \frac{B_1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\tau^2 + {}^1/_4} \tag{4.14}$$

В результате решения системы (4.13) величины A_3 и B_3 легко выражаются через значение A_4: (4.15)

$$A_4 = \sqrt{2}\,\frac{8(\nu-1)(1-2\nu)(\tau^2+{}^1/_4)\mu\gamma a - B_1[2(1-\nu)^2 + (3-4\nu)(1-2\nu+2\nu^2)\operatorname{sh}^2\pi\tau]}{(3-4\nu)(\tau^2+{}^1/_4)\operatorname{ch}\pi\tau(\operatorname{sh}^2\pi\tau + \varkappa^2)}$$

причем введено обозначение

$$\varkappa = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \tag{4.16}$$

Как указывалось в § 3, для полного решения задачи необходимо так выбрать не определенный пока еще коэффициент A_1, чтобы было выполнено соотношение (4.1):

$$\Phi_0|_{\beta=0} = (F_1 - A_1)x|_{\beta=0} + \text{const} \tag{4.17}$$

Так как функция $\Phi_4 = \partial\Phi_0/\partial z$ уже найдена, то остается вычислить значение интеграла

$$\left[\int\limits_{\infty}^{z}\Phi_4\,dz\right]_{\beta=0}$$

которое в силу условия $[\partial\Phi_4/\partial z]_{\beta=0} = 0$ должно оказаться равным $[Kx]_{\beta=0} + \text{const}$, $K = \text{const}$. После некоторых выкладок и использования значения интеграла

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau^2 + {}^1/_4)(\operatorname{sh}^2\pi\tau + \varkappa^2)} = \frac{\pi}{\varkappa\sqrt{\varkappa^2-1}}\left(\operatorname{cth}\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right), \qquad \varkappa = \operatorname{ch}\vartheta \tag{4.18}$$

находим

$$K = \frac{1}{\pi(3-4\nu)}\left\{\frac{4(\nu-1)(1-2\nu)\vartheta}{\varkappa\sqrt{\varkappa^2-1}}\mu a\gamma + \right.$$

$$\left. + B_1[2(1-\nu)^2(1-2\nu)^2 J - \pi(3-4\nu)(1-2\nu+2\nu^2)]\right\} \tag{4.19}$$

Приравнивая, на основании (4.17), значение K величине $F_1 - A_1$, а также учитывая (4.3) и связь $B_1 = 2A_1/\pi$, находим окончательно

$$A_1 = \mu\frac{u_0 - \gamma a\vartheta/\pi}{(1-\nu)[1+(1-2\nu)/\vartheta]}, \qquad \operatorname{ch}\vartheta = \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{3-4\nu}} \tag{4.20}$$

§ 5. Определение связей между перемещениями штампа и приложенными к нему усилиями. Полученное нами решение содержит величину u_0 поступательного перемещения штампа, а также угол поворота γ. Для того чтобы выразить эти неизвестные величины через заданную силу T и момент M, составим выражения для нормальных и касательных напряжений в основании штампа ($\beta = 0$) и применим условия статики

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}[\sigma_z]_{\beta=0}\,r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = -M, \qquad \int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\tau_{zx}|_{\beta=0}\,r\,dr\,d\varphi = -T \tag{5.1}$$

Из (1.2) находим

$$\sigma_z|_{\beta=0} = 2(1-\nu)\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\Big|_{\beta=0}\cos\varphi$$
$$\tau_{zx}|_{\beta=0} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos^2\varphi + \frac{\Phi}{r}\sin^2\varphi + 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right]\Big|_{\beta=0} \tag{5.2}$$

где

$$\Phi = (1-2\nu)\varphi_3 - \varphi_4 - \psi - r\,\partial\Phi_1/\partial z \tag{5.3}$$

Эти выражения представляют собой квадратуры, содержащие нетабулированные функции Лежандра $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$. В частности, для нормальных напряжений имеем

$$\sigma_z|_{\beta=0} = \frac{2(1-\nu)}{a}\left(\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}\right)^3\cos\varphi\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty \tau B_3\,P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \tag{5.4}$$

$$B_3 = \frac{4\sqrt{2}(\tau^2+1/4)\,\mu\gamma a - B_1\sqrt{2}(1-\nu)(1-2\nu)}{(3-4\nu)(\tau^2+1/4)(\operatorname{sh}^2\pi\tau+\varkappa^2)}\operatorname{sh}\pi\tau \tag{5.5}$$

Однако использование интегральных представлений для функций Лежандра позволяет преобразовать формулы для напряжений в однократные квадратуры от элементарных функций.

На основании (2.4) — (2.5) будем иметь после перестановки порядка интегрирования, использования формул

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\pi\tau\cos\tau s}{\operatorname{sh}^2\pi\tau+\varkappa^2}\,d\tau = \frac{\cos(\vartheta s/\pi)}{2\varkappa\operatorname{ch}{}^1/{}_2 s}, \qquad \operatorname{ch}\vartheta = \varkappa \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\pi\tau\operatorname{sh}\pi\tau\sin\tau s}{(\tau^2+1/4)(\operatorname{sh}^2\pi\tau+\varkappa^2)}\,d\tau = \operatorname{ch}\frac{s}{2}\int_s^\infty\frac{\cos(\vartheta u/\pi)}{e^u-1}\,du - \frac{\pi}{2\vartheta}e^{-1/2 s}\sin\frac{\vartheta}{\pi}s \tag{5.7}$$

и некоторых выкладок следующее выражение для нормального напряжения на площадке контакта:

$$\sigma_z\Big|_{\beta=0} = \frac{8\sqrt{2}(1-\nu)}{\pi a(3-4\nu)}\operatorname{ch}^3\frac{\alpha}{2}\left[\frac{\pi B_1}{2\vartheta}(1-\nu)(1-2\nu)\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}{}^1/{}_2u\sin(\vartheta u/\pi)}{\left(\sqrt{\operatorname{ch}u+\operatorname{ch}\alpha}\right)^3}\,du - \right.$$
$$\left. - \frac{2\mu\gamma a}{\varkappa}\frac{d}{d\alpha}\int_\alpha^\infty\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}\,d\left(\frac{\cos(\vartheta s/\pi)}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2 s}\right)\right] \tag{5.8}$$

Применение к (5.8) первого условия статики (5.1) после вычисления квадратур

$$\int_0^\infty\operatorname{sh}\frac{u}{2}\sin\frac{\vartheta}{\pi}u\,du\int_0^\infty\frac{\operatorname{th}^3{}^1/{}_2\alpha\operatorname{ch}{}^1/{}_2\alpha\,d\alpha}{\left(\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{ch}u}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2}\,\vartheta^2}{\pi\operatorname{ch}\vartheta\operatorname{sh}\vartheta} \tag{5.9}$$

$$\int_0^\infty\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}\left[\frac{d}{d\alpha}\int_\alpha^\infty\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}\,d\left(\frac{\cos\vartheta s/\pi}{\operatorname{ch}{}^1/{}_2 s}\right)\right]d\alpha = \frac{2\sqrt{2}\,\vartheta(\vartheta^2+\pi^2)}{3\pi^2\operatorname{sh}\vartheta} \tag{5.10}$$

приводит к следующему соотношению:

$$8a^2\vartheta\left[\frac{1-\nu}{\pi}A_1 - \frac{2}{3}\frac{\mu\gamma\alpha}{1-2\nu}\left(1+\frac{\vartheta^2}{\pi^2}\right)\right] = -M \tag{5.11}$$

Касательные напряжения $\tau_{zx}|_{\beta=0}$ также могут быть выражены квадратурами типа (5.8). Опуская эти выкладки, составим главный вектор, пользуясь непосредственно формулой (5.2):

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \tau_{xz}|_{\beta=0}\, r\, dr\, d\varphi = \pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial r}(r\Phi)|_{\beta=0}\, dr + 4\pi(1-\nu)\int_0^a \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\Big|_{\beta=0} r\, dr =$$

$$= 2\pi a \left\{ \operatorname{th}\tfrac{1}{2}\alpha \left[(\nu-1)\varphi_3|_{\beta=0} + \mu a\gamma \operatorname{th}\tfrac{1}{2}\alpha\right]\right\}_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} - 4a(1-\nu)A_1 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}{}^1/_2\,\alpha d\alpha}{\operatorname{ch}^2{}^1/_2\,\alpha}$$

где

$$\varphi_3|_{\beta=0} = \sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1}\int_0^\infty A_3(\tau)\, P^{\,1}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau$$

Пользуясь асимптотическими представлениями

$$P^{\,1}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\approx} -\tfrac{1}{2}\operatorname{sh}\alpha\left(\tau^2 + \tfrac{1}{4}\right) \tag{5.12}$$

$$P^{\,1}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{\approx} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1/2\alpha}\left[\cos\tau\alpha \operatorname{Re}\frac{\Gamma(i\tau)}{\Gamma(-1/2+i\tau)} - \sin\tau\alpha \operatorname{Im}\frac{\Gamma(i\tau)}{\Gamma(-1/2+i\tau)}\right]$$

можно показать, что $[\varphi_3]_{\beta=0}\to 0$ при $\alpha\to 0$ и $[\varphi_3]_{\beta=0}\to {}^1/_4\sqrt{2}A_3(0)$ при $\alpha\to\infty$.

Учитывая еще, что

$$A_3(0) = -\frac{2\sqrt{2}}{1-\nu}\mu\gamma a$$

находим окончательно из второго условия статики

$$8a(1-\nu)A_1 = T \tag{5.13}$$

Теперь из (5.11) и (5.13), учитывая (4.20), находим выражения для поступательного перемещения u_0 штампа и угла поворота γ:

$$\mu a u_0 = \left(\frac{1}{8} + \frac{1-2\nu}{8\pi\theta} + c\theta\right)T + c\frac{M}{a}, \qquad \mu a^2\gamma = cT + \frac{c}{\theta}\frac{M}{a} \tag{5.14}$$

где

$$c = \frac{3(1-2\nu)}{16\pi(1+\theta^2)}, \qquad \theta = \frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu) \tag{5.15}$$

Из выражений (5.15) следует, что сила, приложенная к основанию штампа, вызывает не только перемещение штампа, но и некоторый поворот. Если же к штампу приложена пара сил с главным моментом, направленным параллельно основанию штампа, то под ее действием штамп не только повернется, но получит некоторое поступательное перемещение.

Поступила 28 III 1956

Ленинградский физико-технический институт АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Моссаковский. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
2. В. И. Моссаковский. Некоторые пространственные контактные задачи теории упругости. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва, 1955.
3. F. G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel-und Cylinderfunktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsverteilung. Mathematische Annalen, B. XVIII, S. 161—194, 1881.
4. В. А. Фок. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком. ДАН СССР, т. XXXIX, № 7, 1943.
5. Н. Н. Лебедев. Некоторые интегральные преобразования математической физики. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Ленинград. 1951.
6. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва. 1953.
7. E. Reissner, H. Sagocci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. Journal of applied Physics, т. 15, № 9, 1944.