Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВТОРОЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ РАЗРЫВЕ

О. С. Рыжов, Г. И. Таганов

(Москва)

Решение задачи о сильном взрыве в предположении, что энтропия частицы после прохождения через нее ударной волны остается постоянной, т. е. в предположении нулевой теплопроводности газа, опубликовано Л. И. Седовым [1, 2] в 1946 г. и позднее Тейлором [3] в 1950 г.

В настоящей работе содержится решение задачи о сильном взрыве в предположении, что температура газа меняется со временем, но постоянна во всем объеме возмущенного газа для каждого данного момента. Как и в работах [1, 2, 3], газ считается совершенным, т. е. подчиняющимся уравнению состояния Клапейрона, а выделение энергии считается происшедшим в точке. Это течение оказывается возможным лишь при непрерывном подводе энергии к фронту волны.

В проведении расчетов для данной работы принимала участие А. Н. Никитина.

Уравнения для одномерного сферического неустановившегося движения будут в предположении о бесконечной теплопроводности в зоне возмущенного движения иметь вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho v}{\partial r} + 2\frac{\rho v}{r} = 0, \qquad \frac{p}{\rho} = F(t) \tag{1}$$

где v — скорость частицы, ρ — плотность, p — давление, t — время, r — расстояние до точки взрыва.

Среди определяющих задачу постоянных величин имеются лишь две с независимыми размерностями: E — величина, пропорциональная выделившейся при взрыве энергии E_0, и ρ_0 — начальная плотность газа. Но в таком случае задача по-прежнему будет автомодельной и вид функции F легко определяется:

$$F(t) = kt^{-6/5} \tag{2}$$

В этой формуле величина коэффициента k подлежит определению, размерность же его выражается через размерности E и ρ_0 соотношением

$$[k] = \frac{L^2}{T^{4/5}} = \frac{[E^{2/5}]}{[\rho_0{}^{2/5}]}$$

Для искомых скорости, плотности и давления верны следующие равенства [4]:

$$v = \frac{r}{t}V(\lambda), \qquad \rho = \rho_0 R(\lambda), \qquad p = \frac{\rho_0 r^2}{t^2}P(\lambda) \tag{3}$$

где λ — единственная в этой задаче безразмерная переменная комбинация:

$$\lambda = \frac{E}{\rho_0}\frac{t^2}{r^5} \tag{4}$$

Подставляя в два первых уравнения системы (1) значения скорости, плотности и давления, определяемые формулами (3), получим [4]

$$\lambda\left[(5V-2)\frac{dV}{d\lambda} + \frac{5}{R}\frac{dP}{d\lambda}\right] = V^2 - V + 2\frac{P}{R}, \qquad \lambda\left[5\frac{dV}{d\lambda} + (5V-2)\frac{1}{R}\frac{dR}{d\lambda}\right] = 3V \tag{5}$$

Используя соотношение (2) и производя замену независимой переменной λ по формуле

$$\lambda = \frac{1}{(\sqrt{k_0}\,\zeta)^5} \tag{6}$$

уравнения (5) можно преобразовать к следующему простому виду:

$$\frac{dV}{d\zeta} = -\frac{5V}{\zeta}\,\frac{(V-1)(5V-2)\zeta^2-15}{(5V-2)^2\zeta^2-25}, \qquad \frac{d\ln R}{d\zeta} = -\frac{5(3V+\zeta dV/d\zeta)}{\zeta(5V-2)} \tag{7}$$

В формуле (6) безразмерная постоянная k_0 определяется равенством

$$k_0 = k\left(\frac{\rho_0}{E}\right)^{2/5} \tag{8}$$

Основная трудность заключается в интегрировании первого уравнения (7); если оно проинтегрировано, то второе уравнение (7) решается квадратурой.

Рассмотрим теперь условия, которым должно удовлетворять решение на границе области возмущенного движения. В задаче о сильном взрыве в постановке Седова—Тейлора этой границей является ударная волна. Для того чтобы и в нашем случае границей возмущенного движения служила ударная волна, необходим непрерывный подвод энергии к ее фронту. При этом при переходе через фронт волны, скорость которой мы обозначим через c, соотношения [4]

$$\rho_1(v_1-c) = \rho_2(v_2-c), \qquad \rho_1(v_1-c)^2+\rho_1 = \rho_2(v_2-c)^2+p_2 \tag{9}$$

выражающие законы сохранения массы и количества движения, остаются справедливыми. В уравнение же, выражающее закон сохранения энергии, надо добавить член, определяющий величину поглощенной на фронте единицей массы энергии Q, после чего оно примет вид:

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1-1}\,\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}(v_1-c)^2 = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_2-1}\,\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{1}{2}(v_2-c)^2-Q \tag{10}$$

где $\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v, а индексы 1 и 2 относятся к величинам по разные стороны поверхности разрыва.

Систему уравнений (9), (10) с учетом того, что давлением перед фронтом ударной волны можно пренебречь по сравнению с давлением за ее фронтом и что $v_1=0$, $\varkappa_2=\varkappa$, а $\rho_1=\rho_0$, можно представить еще в таком виде:

$$v_2 = \frac{1}{\alpha\varkappa+1}\,c, \qquad \rho_2 = \frac{\alpha\varkappa+1}{\alpha\varkappa}\,\rho_0, \qquad p_2 = \frac{1}{\alpha\varkappa+1}\,\rho_0 c \tag{11}$$

где α равно квадрату числа Маха за ударной волной в системе координат, связанной с волной. Численное значение α в этих формулах зависит от величины Q в равенстве (10), оно подлежит определению в дальнейшем. Легко показать, что α во всяком случае не превосходит единицы и не меньше $(\varkappa-1)/2\varkappa$.

Для ударной волны координата r_2 является функцией времени t, поэтому [4]

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_0\lambda_2}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{12}$$

где $\lambda_2=\text{const}$. Отсюда для скорости ударной волны получим [4]

$$c = \frac{2}{5}\left(\frac{E}{\rho_0\lambda_2}\right)^{1/5} t^{-3/5} \tag{13}$$

Используя последнее равенство, отношение давления к плотности на фронте ударной волны можно записать в виде

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{4}{25}\,\frac{\alpha\varkappa}{(\alpha\varkappa+1)^2}\left(\frac{E}{\rho_0\lambda_2}\right)^{2/5} t^{-6/5} \tag{14}$$

Переходя в формуле (14) от постоянной λ_2 на фронте ударной волны к постоянной ζ_2 при помощи соотношения (6) и используя равенство (8), получим численное значение ξ_2 на ударной волне в зависимости от величины α:

$$\zeta_2 = \frac{5(\alpha\varkappa+1)}{2\sqrt{\alpha\varkappa}} \tag{15}$$

Замена в формулах (11) величин скорости, плотности и давления газа за ударной волной через безразмерные функции V, R и P, определяемые равенствами (3), дает

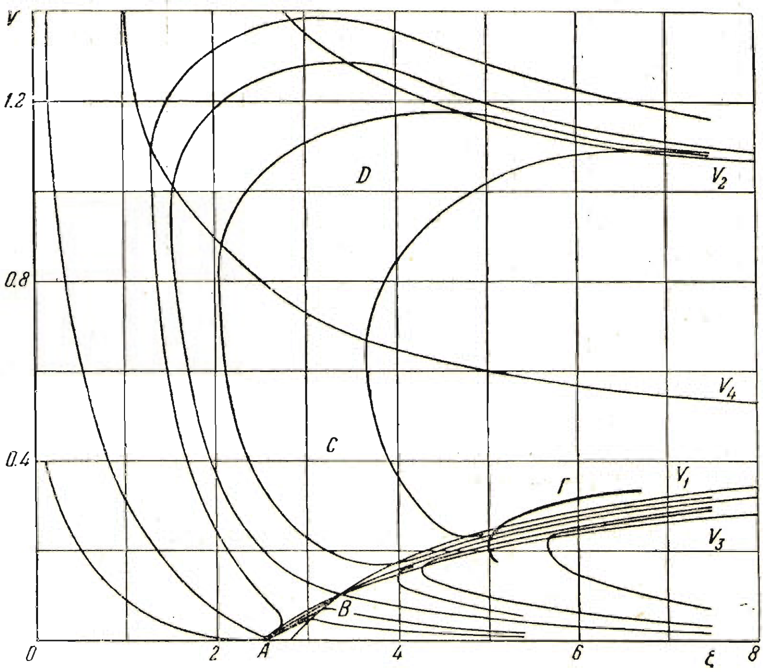
$$V_2 = \frac{2}{5(\alpha\varkappa+1)}, \qquad R_2 = \frac{\alpha\varkappa+1}{\alpha\varkappa}, \qquad P_2 = \frac{4}{25(\alpha\varkappa+1)} \tag{16}$$

Формулы (15) и (16) определяют начальные значения, при которых должна быть проинтегрирована система уравнений (7).

Перейдем теперь к исследованию первого уравнения этой системы. Общая картина поля его интегральных кривых в квадранте $V > 0$, $\zeta > 0$ представлена на фиг. 1, где виден характер особых точек: $O\,(0,0)$, $A\,(0,\ {}^5/_2)$, $B\,({}^1/_{10},\ {}^{10}/_3)$, $C\,({}^2/_5,\ \infty)$ $D\,(1,\ \infty)$, $E\,(\infty,\ 0)$, $F\,(0,\ \infty)$. На кривых

$$V_1 = 0.7 - \sqrt{0.09 + 3/\zeta^2}, \qquad V_2 = 0.7 + \sqrt{0.09 + 3/\zeta^2}$$

производная $dV/d\zeta$ обращается в нуль, на кривых $V_3 = 0.4 - 1/\zeta$ и $V_4 = 0.4 + 1/\zeta$ она терпит разрыв, поэтому при движении от фронта ударной волны к центру симметрии переход через две последие кривые невозможен.



Фиг. 1

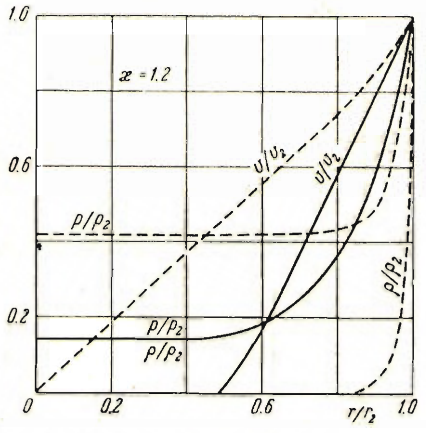
Центру симметрии соответствует особая точка O, бесконечно удаленной точке — точка F. В центр симметрии можно попасть только в том случае, если начальные данные лежат в криволинейном треугольнике ABF, стороны которого образованы гиперболой $V = 0.4 - \zeta^{-1}$, сепаратрисой, проходящей через точку B и имеющей в ней отрицательный наклон, и осью ζ.

Кроме того, движение может быть продолжено до центра симметрии еще и в том случае, когда начальными данными являются точки сепаратрисы, проходящей через вершину B треугольника ABF и имеющей в ней положительный наклон. Отсюда следует, что в рассматриваемой нами задаче начальные значения V и ζ определяются пересечением сепаратрисы с положительным наклоном в B и кривой Γ, заданной в параметрической форме и представляющей собой граничные условия на фронте:

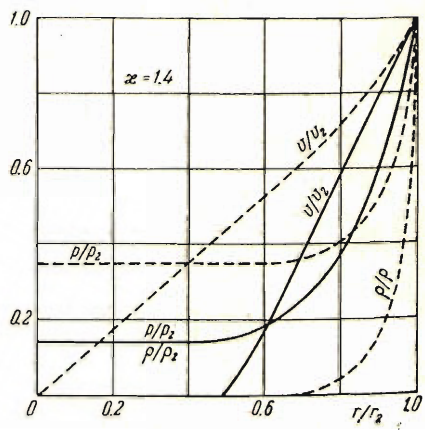
$$V_2 = \frac{2}{5\,(\alpha\varkappa + 1)}, \qquad \zeta_2 = \frac{5\,(\alpha\varkappa + 1)}{2\sqrt{\alpha\varkappa}} \tag{17}$$

Решение уравнения (7) строилось при помощи численных методов. Результаты расчетов для $\varkappa = 1.2$ и $\varkappa = 1.4$ приведены на фиг. 2 и 3 сплошными линиями, где дано также сравнение полученного решения с решением Седова—Тейлора. Все характеристики движения газа представлены в безразмерной форме, поэтому они, естественно, не зависят ни от энергии заряда E_0, ни от пропорциональной ей величины E.

Из полученного решения видно, что течение возмущенного газа за фронтом рассматриваемой волны напоминает течение, возникающее при сферической детонации, а именно: за фронтом волны следует волна разрежения, в которой скорость падает от значения v_2 за ударной волной до нуля в расширяющемся ядре покоящегося газа, причем в состояние покоя газ переходит слабым разрывом. Однако между рассматриваемым течением и течением, возникающим при сферической детонации, имеется и одно существенное различие, состоящее в том, что скорость частиц газа за фронтом рассматриваемой волны меньше скорости звука, т. е. изучаемое течение не следует так называемому правилу Жуге, которому подчиняется классическая детонация.



Фиг. 2



Фиг. 3

Размерные характеристики рассматриваемого течения зависят от постоянной E, которая выражается через значение E_0 формулой (18)

$$E_0 = \beta(\varkappa) E$$

Найдем значение коэффициента β в последнем равенстве.

Для этого заметим прежде всего, что в принятой постановке задачи энергия заряда равна полной энергии возмущенного газа. Для полной энергии имеем[4]

$$E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\rho v}{2} 4\pi r^2\, dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\varkappa - 1} 4\pi r^2\, dr$$

Переходя здесь к безразмерным величинам, получим

$$E_0 = \frac{2\pi}{5} E \int_{\lambda_0}^{\infty} RV^2 \frac{d\lambda}{\lambda^2} + \frac{4\pi}{5(\varkappa - 1)} E \int_{\lambda_2}^{\infty} P \frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{19}$$

Деля равенство (19) на E и переходя от переменной λ к переменной ζ, имеем

$$\beta = 2\pi k_0^{5/2} \left[\int_0^{\zeta_2} RV^2 \zeta^4\, d\zeta + \frac{1}{\varkappa - 1} \int_0^{\zeta_2} P\zeta^4\, d\zeta \right] \tag{20}$$

Придавая λ_2, как и в работах [1, 2], численное значение, равное единице, из равенства (6) можно найти постоянную k_0, после чего по формуле (20) определяется величина $\beta(\varkappa)$. Для $\varkappa = 1.2$ она оказалась равной 0.90; для $\varkappa = 1.4$ значение равно 0.48. Соответствующие значения в решении Седова—Тейлора равны 1.64 и 0.85.

Поступила 3 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. ДАН СССР, т. LII, № 1, 1946.
2. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
3. Taylor G. Proceedings of the Royal Society, 201, № 1065, 1950.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1954.