

ОБ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДЕ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. А. Гриб, А. Г. Рябинин, С. А. Христанович

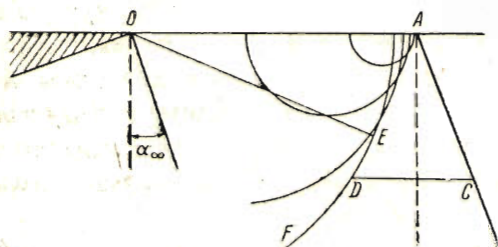
(Москва)

§ 1. Введение. 1. В работе рассматривается отражение плоской ударной волны бесконечной протяженности от свободной поверхности воды, учитывая в первом приближении зависимость скорости распространения ударной волны и скорости звука от величины давления.

В акустическом приближении скорость распространения ударной волны и скорость звука считаются постоянными, равными между собой. Скорость частиц воды за фронтом ударной волны считается пренебрежимо малой по сравнению со скоростью звука.

Пусть плоская ударная волна падает в момент $t = 0$ в точке O (фиг. 1) на свободную поверхность. Угол падения этой волны, т. е. угол, составленный плоскостью волны с перпендикуляром к свободной поверхности, пусть равен α_∞ .

В акустическом приближении получим следующую картину явления отражения. Точка A пересечения фронта ударной волны со свободной



Фиг. 1

поверхностью будет перемещаться вдоль свободной поверхности со скоростью $a_0 / \cos \alpha_\infty$, где a_0 — скорость звука.

В каждой точке свободной поверхности в момент прохождения фронта ударной волны возникает волна понижения давления, на фронте которой давление мгновенно падает до нуля.

Фронт каждой из этих волн расположен на поверхности кругового цилиндра, ось которого в момент возникновения волны совпадает с линией пересечения поверхности воды с фронтом ударной волны.

Огибающая фронтов цилиндрических волн (фиг. 1) образует фронт отраженной волны AE . В точке E этот фронт переходит в окружность EF — фронт первой волны повышения давления, возникающей в точке O .

Пусть β — угол отражения, т. е. угол, образованный плоскостью отраженной волны AE с перпендикуляром к свободной поверхности. Имеем

$$\cos \beta = \frac{OE}{OA} = \cos \alpha_\infty$$

Следовательно, $\beta = \alpha_\infty$. Время τ , в течение которого в точке C , расположенной на глубине h , давление будет равно давлению в ударной

волне, приближенно равно

$$\tau = \frac{CD}{a_0} = \frac{2h}{a_0} \alpha_\infty \quad (1.1)$$

Если заряд взорван на глубине H , то на достаточно большом расстоянии R от точки взрыва имеем

$$\alpha_\infty \approx H/R \quad (1.2)$$

и время действия ударной волны равно

$$\tau = \frac{2h}{a_0} \frac{H}{R} \quad (1.3)$$

2. В действительности скорость распространения звука и скорость ударной волны в воде зависят от величины давления. Это приводит при малых углах падения к существенному изменению картины отражения.

Пусть N — скорость распространения фронта ударной волны в воде с начальным давлением p_1 , плотностью ρ_1 и скоростью u_1 , совпадающей с направлением распространения волны.

Уравнения сохранения массы и изменения количества движения на фронте ударной волны, как известно, будут

$$\rho(N - u) = \rho_1(N - u_1), \quad p - p_1 = \rho_1(N - u_1)(u - u_1) \quad (1.4)$$

Откуда

$$N = u_1 + \sqrt{\frac{p - p_1}{\rho - \rho_1} \frac{\rho}{\rho_1}}, \quad u = u_1 + (N - u_1) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right) \quad (1.5)$$

Уравнение состояния для воды при относительно небольших давлениях можно представить в виде

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (B = 3045 \text{ кг/см}, \quad n = 7.15) \quad (1.6)$$

Скорость звука, следовательно, равна

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(n-1)/2} \quad \left(a_0 = \sqrt{\frac{Bn}{\rho_0}} \right) \quad (1.7)$$

где a_0 — скорость звука при нулевом давлении ($a_0 \approx 1500$ м/сек).

3. В дальнейшем будем считать, что давление на фронте ударной волны не превосходит 1000 ат , и будем учитывать изменение скорости распространения ударной волны и скорости звука в зависимости от давления с точностью до первой степени отношения p/Bn . Из (1.6) имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{p}{Bn} - \frac{n-1}{2} \left(\frac{p}{Bn} \right)^2 \quad (1.8)$$

Для скорости звука, скорости распространения фронта ударной волны и скорости частиц за фронтом ударной волны, пользуясь (1.8), (1.7) и (1.5), получим

$$a = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{p}{Bn} \right] \quad (1.9)$$

$$N = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p}{Bn} + \frac{n-3}{4} \frac{p_1}{Bn} \right] + u_1, \quad u = a_0 \frac{p - p_1}{Bn} + u_1 \quad (1.10)$$

При распространении ударной волны в покоящейся воде нулевого давления имеем, следовательно,

$$N = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p}{Bn} \right], \quad u = a_0 \frac{p}{Bn} \quad (1.11)$$

4. Пусть невесомая жидкость, имеющая давление p_1 , занимает полубесконечную трубу. В момент $t = 0$ разрушим стенку на конце трубы. Вдоль трубы побежит волна понижения давления, определяемая уравнениями, совершенно аналогичными тем, которые были получены Риманом для газа. Если r — расстояние от конца трубы, то

$$\frac{r}{t} = a + u, \quad u = a_0 \frac{p - p_1}{Bn} \quad (1.12)$$

Пусть давление в пространстве, куда вытекает вода, постоянно. Например, это давление все время равно нулю.

Фронт волны распространяется в трубе со скоростью

$$a_1 = a_0 [1 + 1/2(n - 1) p_1 / Bn]$$

а граница волны, на которой давление равно нулю, со скоростью

$$a_0 + u = a_0 [1 - p_1 / Bn]$$

Отношение длины волны к расстоянию от конца трубы постоянно и равно

$$\frac{n + 1}{2} \frac{p_1}{Bn} \quad (1.13)$$

Узкая область, занятая волной понижения давления, быстро перемещается вдоль трубы, увеличиваясь пропорционально расстоянию от конца трубы.

5. Пусть пространство вне некоторой сферы или бесконечного кругового цилиндра заполнено невесомой жидкостью с давлением p_1 . Если разрушить в момент $t = 0$ поверхность сферы или цилиндра и затем поддерживать вне границы волны понижения давления некоторое постоянное давление p_* , то получим течение, аналогичное рассмотренному выше течению в трубе. Для того чтобы это течение все время не нарушалось волнами, идущими от границы, на которой давление равно p_* , эта граница должна распространяться относительно частиц жидкости со скоростью звука.

Для сферической волны при бесконечно малой начальной сфере получим уравнение волны понижения давления, на границе которой, движущейся относительно частиц жидкости со скоростью звука, давление равно p_* , в виде

$$\frac{r}{t} = a + u - a_0 \frac{n + 1}{2} \frac{p_1}{Bn} \left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \ln \frac{1 - p_*/p_1}{1 - p/p_1} \quad \left(u = a_0 \frac{p - p_1}{Bn}\right) \quad (1.14)$$

где r — расстояние от центра начальной сферы. Эта волна незначительно отличается от волны Римана.

Для цилиндрической волны

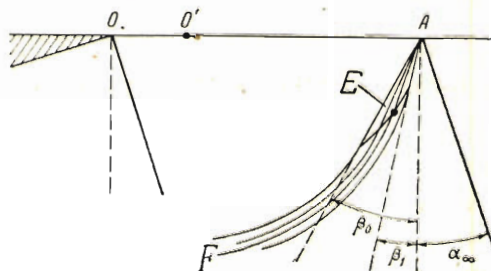
$$\frac{r}{t} = a + u - a_0 \frac{n + 1}{2} \frac{p_1}{Bn} \left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \left(1 - \frac{p - p_1}{p_* - p_1}\right) \left(u = a_0 \frac{p - p_1}{Bn}\right) \quad (1.15)$$

При решении задачи об отражении ударной волны в воде от свободной поверхности будем сначала приближенно считать, что цилиндрические волны понижения давления, распространяющиеся от поверхности в невозмущенной среде, определяются уравнениями (1.12), а затем приведем решение той же задачи, пользуясь более точным уравнением (1.15).

§ 2. Регулярное отражение. 1. Рассмотрим явление отражения ударной волны от свободной поверхности, считая, что уравнение волны понижения давления определяется уравнениями (1.12).

Пусть давление в ударной волне равно p_1 ; скорость частиц за ударной волной будет равна $u_1 = a_0 p_1 / Bn$. Эта скорость направлена перпендикулярно фронту волны. Горизонтальная составляющая этой скорости равна $u \cos \alpha_\infty$, а вертикальная $u \sin \alpha_\infty$. В дальнейшем будем считать угол α_∞ малым, так что будем полагать $u \cos \alpha_\infty \approx u$ и $u \sin \alpha_\infty \approx 0$.

На фиг. 2 изображена картина отражения ударной волны от свободной поверхности при достаточно большом значении угла α_∞ . Волна понижения давления, возникающая в момент $t = 0$ в точке O (фиг. 2), определяется в неподвижной жидкости уравнениями (1.12). Эта волна будет переноситься потоком жидкости параллельно свободной поверхности со скоростью u_1 , так что расстояние между точкой O и центром этой волны O' в момент t будет равно $u_1 t$ (фиг. 2). Скорость распространения фронта волны понижения давления в направлении свободной поверхности будет



Фиг. 2

$$a + u + u_1 = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{2} \frac{p_1}{Bn} \right]$$

Угол падения ударной волны, при котором скорость перемещения точки пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью равна скорости фронта волны понижения давления в направлении свободной поверхности, назовем критическим углом α_* . Имеем

$$\frac{N}{\cos \alpha_\infty} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{\alpha_\infty^2}{2} \right]$$

Отсюда

$$\alpha_* = \sqrt{\frac{n+1}{2Bn} p_1} \tag{2.1}$$

Если угол падения α_∞ будет больше, чем α_* , волны понижения давления, идущие от свободной поверхности, не будут нарушать фронта ударной волны и отражение будет регулярным.

2. Пусть $\alpha_\infty > \alpha_*$. Так как угол отражения имеет тот же порядок, что α_∞ , то проекцию скорости за ударной волной на направление радиуса цилиндрической волны понижения давления вблизи свободной поверхности можно считать равной u_1 . Тогда для абсолютной скорости распространения давления p в волне понижения давления имеем

$$a + u + u_1 = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{2} \frac{p_1}{Bn} \right]$$

От каждой точки свободной поверхности распространяются волны понижения давления. Огибающая фронтов, отвечающих давлению p , будет

составлять с перпендикуляром к свободной поверхности угол β , определяемый уравнением

$$\cos \beta = \left(1 + \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn}\right) / \left(1 + \frac{n+1}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{\alpha_\infty^2}{2}\right)$$

Отсюда

$$\beta = \alpha_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{p}{p_1}\right)} \quad (2.2)$$

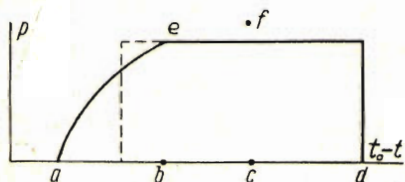
Для огибающей фронтов с давлением $p = p_1$ получим

$$\beta_1 = \alpha_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^2} \quad (2.3)$$

а для фронта с нулевым давлением

$$\beta_0 = \alpha_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^2} \quad (2.4)$$

В точке E , для которой угол $AO'E$ (фиг. 2) равен β , огибающая AE , на которой давление равно p , переходит в дугу окружности EF с центром в точке O' . На дуге EF давление также равно p . Точки E расположены на некоторой параболе.



Фиг. 3

В какой-нибудь точке C на глубине h изменение давления с течением времени будет иметь вид, изображенный на фиг. 3. Отношение

$$\frac{ac}{cd} = \frac{\beta_0}{\alpha_\infty} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^2}$$

а отношение

$$\frac{ab}{2cd} = \frac{(\alpha_* / \alpha_\infty)^2}{\sqrt{1 + (\alpha_* / \alpha_\infty)^2} + \sqrt{1 - (\alpha_* / \alpha_\infty)^2}}$$

Кривая ae есть парабола с вершиной в точке f , причем

$$cf = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^2\right]$$

При значениях α_∞ / α_* достаточно больших $ac \approx cd$ и $ab / 2cd$ близко к нулю, так что картина отражения не отличается от той, которая получается в акустическом приближении.

Если приближенно заменить каждую из цилиндрических волн конической давления прерывным фронтом, то для угла отражения, пользуясь (1.10), получим

$$\cos \beta = \frac{1 + \frac{n-3}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{u_1}{a_0}}{1 + \frac{n+1}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{\alpha_\infty^2}{2}} \approx 1 - \frac{\alpha_\infty^2}{2}$$

Отсюда $\beta = \alpha_\infty$.

Поэтому время действия ударной волны при регулярном отражении и α_∞ значительно большем α_* с большой точностью можно определить, поль-

зуюсь формулой (1.1), полученной при акустическом приближении. Эпюра давления, соответствующая акустическому приближению, показана на фиг. 3 пунктиром.

4. Покажем, что определенное выше течение за фронтом ударной волны совпадает с известным течением, возникающим при обтекании сверхзвуковым потоком вершины угла.

Поместим начало равномерно движущейся вместе с волной системы координат в точке A (фиг. 2). В этой системе координат течение вблизи угла A будет установившимся. Пусть θ — полярный угол, отсчитываемый от направления свободной поверхности по ходу стрелки часов, ϑ — угол, составленный вектором скорости со свободной поверхностью, отсчитываемой в том же направлении, w — величина скорости.

Решение уравнений гидродинамики, отвечающее обтеканию вершины угла сверхзвуковым потоком, будет

$$\sin(\vartheta - \theta) = \frac{a}{w} \quad (2.5)$$

$$d\vartheta = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - (n-1)/(n+1)\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \left(\lambda = \frac{w}{a_*}\right) \quad (2.6)$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{n-1} = \frac{a_*^2(n+1)}{2(n-1)} \quad (2.7)$$

Из (2.7) имеем

$$\left(\frac{a}{w}\right)^2 = \frac{n+1}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{n-1}{2} \quad (2.8)$$

Вычислим величину a_* . За фронтом ударной волны величина скорости набегающего потока равна

$$w_1 = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{\alpha_\infty^2}{2} - \frac{p_1}{Bn} \right] \quad (2.9)$$

и скорость звука равна

$$a_1 = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{p_1}{Bn} \right]$$

Тогда, пользуясь (2.7), получим

$$a_* = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{n-1}{2(n+1)} \alpha_\infty^2 \right] \quad (2.10)$$

Из (2.7) имеем также

$$\left(\frac{a}{a_*}\right)^2 = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} \lambda^2 \quad (2.11)$$

В рассматриваемой системе координат скорость потока отличается от скорости звука на малые величины — порядка p/Bn . Положим поэтому

$$\lambda = 1 + \delta$$

где δ — малая величина. Из (2.11) имеем

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{p_1}{Bn} + \frac{\alpha_\infty^2}{n+1} - \frac{p}{Bn} \quad (2.12)$$

Пользуясь (2.8), имеем также

$$\frac{a}{w} = 1 - \frac{n+1}{2} \delta$$

Углы θ и ϑ можно представить в виде

$$\theta = \frac{1}{2} \pi + \beta, \quad \vartheta = \pi + \Delta\vartheta$$

где β и $\Delta\vartheta$ — малые величины. Из (2.6) имеем

$$d\Delta\vartheta = (n+1)\sqrt{\delta}d\delta$$

Таким образом, $\Delta\vartheta$ есть величина порядка $\delta\sqrt{\delta}$.

Из (2.5) имеем $\beta = \sqrt{n+1}\sqrt{\delta} + \Delta\vartheta$ и, следовательно,

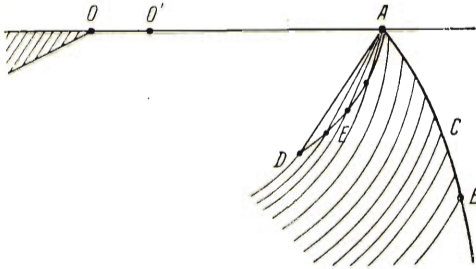
$$\beta \approx \sqrt{n+1}\sqrt{\delta}$$

Пользуясь (2.12), получим

$$\beta^2 = \alpha_\infty^2 + \frac{n+1}{2} \frac{p_1}{Bn} - (n+1) \frac{p}{Bn} \quad \text{или} \quad \beta = \alpha_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_*}{\alpha_\infty}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{p}{p_1}\right)}$$

Эта формула совпадает с формулой (2.2).

§ 3 Нерегулярное отражение. 1. Если угол падения волны α_∞ меньше критического угла, фронт волны понижения давления догоняет фронт ударной волны. В той части фронта ударной волны, которая нарушена волной понижения давления, давление падает и фронт волны искривляется.



Фиг. 4

На фиг. 4 изображена картина отражения ударной волны при $\alpha_\infty < \alpha_*$.

Определим прежде всего точку пересечения B фронта ударной волны с фронтом волны понижения давления, возникшей в точке O в момент $t = 0$. Рас-

положим начало координат в точке O и пусть ось Ox совпадает со свободной поверхностью. Направим ось Oy вертикально вверх. Уравнение фронта волны понижения давления, считая приближенно скорость за фронтом ударной волны направленной параллельно свободной поверхности, будет

$$(x - u_1 t)^2 + y^2 = a_0^2 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{p_1}{Bn} \right]^2 t^2 \quad (3.1)$$

Положим

$$x = a_0 t [1 + X], \quad y = a_0 t Y \quad (3.2)$$

В новых переменных картина движения не должна изменяться с течением времени.

Уравнение (3.1) примет вид:

$$\left(1 + X - \frac{p_1}{Bn} \right)^2 + Y^2 = \left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{p_1}{Bn} \right)^2 \quad (3.3)$$

Вблизи свободной поверхности величина X мала. Сохраняя в уравнении (3.3) только величины первого порядка малости, получим

$$X + \frac{Y^2}{2} = \frac{n+1}{2} \frac{p_1}{Bn} = \alpha_*^2 \quad (3.4)$$

Уравнение фронта ударной волны будет

$$x + \alpha_\infty y = a_0 t \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p_1}{Bn} + \frac{\alpha_\infty^3}{2} \right]$$

или в переменных X и Y

$$X + \alpha_\infty Y = \frac{1}{2}(\alpha_*^2 + \alpha_\infty^2) \quad (3.5)$$

Координаты точки пересечения B фронта ударной волны и фронта волны понижения давления будут, следовательно,

$$Y_B = -(\alpha_* - \alpha_\infty), \quad X_B = \frac{\alpha_*^2 + \alpha_\infty^2}{2} + \alpha_\infty(\alpha_* - \alpha_\infty) \quad (3.6)$$

Точка B движется по прямой, проходящей через точку O и наклоненной к свободной поверхности под малым углом $\alpha_* - \alpha_\infty$.

2. Искривленный фронт ударной волны непосредственно сопрягается с волной понижения давления, возникшей в момент $t = 0$ в точке O . В точке этого фронта C , где давление равно p , скорость за фронтом ударной волны равна $a_0 p / Bn$ и направлена перпендикулярно фронту. При принятой точности рассмотрения следует считать, что эта скорость имеет горизонтальное направление. На фронте волны понижения давления в точке C скорость течения также равна по величине $a_0 p / Bn$ и направлена по радиусу $O'C$ (фиг. 4). Но угол $A'O'C$ меньше, чем $\alpha_* - \alpha_\infty$, и, следовательно, эту скорость также следует считать направленной горизонтально. Таким образом, скорость частиц за фронтом ударной волны в точке, где давление равно p , равна скорости частиц в волне понижения давления.

Уравнение фронта волны понижения давления, на котором давление равно p , будет

$$\left(x - a_0 t \frac{p_1}{Bn}\right)^2 + y^2 = a_0^2 t^2 \left[1 + \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} - \frac{p_1}{Bn}\right]^2$$

или в переменных X, Y , сохраняя лишь величины первого порядка малости:

$$X + \frac{Y^2}{2} = \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} \quad (3.7)$$

Скорость точки ударного фронта в направлении, параллельном оси OX , будет

$$\frac{N}{\cos \alpha} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p}{Bn} + \frac{\alpha^2}{2}\right] \quad (3.8)$$

Пусть

$$X = X(Y) \quad (3.9)$$

есть уравнение искривленного фронта ударной волны. Имеем

$$x = a_0 t \left[1 + X \left(\frac{y}{a_0 t}\right)\right]$$

Скорость точки фронта параллельно свободной поверхности будет

$$\frac{dx}{dt} = a_0 \left[1 + X - Y \frac{dX}{dY}\right] \quad (3.10)$$

Сравнивая с (3.8) и принимая во внимание, что $\alpha = -dX/dY$, имеем

$$X - Y \frac{dX}{dY} = \frac{n+1}{4} \frac{p}{Bn} + \frac{1}{2} \left(\frac{dX}{dY}\right)^2 \quad (3.11)$$

Исключая из уравнений (3.7) и (3.11) давление, получим дифференциальное уравнение фронта волны в виде

$$\left(\frac{dX}{dY}\right)^2 + 2Y \frac{dX}{dY} + \frac{Y^2}{2} - X = 0 \quad (3.12)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$X = c^2 + cY - \frac{Y^2}{4} \quad (3.13)$$

Интегральная кривая, проходящая через точку B (3.6), будет

$$X = \left[\frac{\alpha_* + \alpha_\infty}{2} \right]^2 - \frac{\alpha_* + \alpha_\infty}{2} Y - \frac{Y^2}{4} \quad (3.14)$$

Пользуясь (3.7), получим

$$\left[\frac{\alpha_* + \alpha_\infty}{2} - \frac{Y}{2} \right]^2 = \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} \quad (3.15)$$

В точке B имеем $p = p_1$. Следовательно,

$$\frac{p}{p_1} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} - \frac{Y}{\alpha_*} \right]^2 \quad (3.16)$$

В точке A' на свободной поверхности давление p' равно

$$p' = \frac{p_1}{4} \left[1 + \frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} \right]^2 \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) удобно представить в виде

$$p = p' \left[1 + \frac{\alpha_* - \alpha_\infty}{\alpha_* + \alpha_\infty} \frac{Y}{Y_B} \right]^2 \quad (3.18)$$

Определим разность ω горизонтальных скоростей точек ненарушенного и искривленного фронтов ударной волны. Пользуясь (3.10), получим

$$\frac{\omega}{a_0} = \frac{Y_B^2}{4} \left[1 - \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

3. В момент $t = 0$ в точке O давление на фронте ударной волны на свободной поверхности мгновенно падает до значения p' . Затем давление в точке A' остается неизменным. В каждой точке свободной поверхности, кроме точки O , возникает волна понижения давления, в которой давление падает от значения p' до нуля.

Рассмотрим распространение всех фронтов волн с давлением $p = \text{const}$ при $p < p'$, возникающих вблизи каждой точки свободной поверхности. Фронты этих волн движутся медленнее, чем точка A' , вдоль свободной поверхности. Поэтому фронты этих волн имеют огибающую AE (фиг. 4).

Угол наклона β прямой AE к перпендикуляру к свободной поверхности определяется из уравнения

$$\cos \beta = \frac{a + u}{a' + u'}$$

и будет, следовательно,

$$\beta = \sqrt{\frac{n+1}{Bn} (p' - p)} \quad (3.20)$$

Точка E на конце отрезка прямой AE расположена на фронте волны с давлением p , принадлежащем волне понижения давления, возникшей в точке O . Координаты точки E будут, следовательно,

$$Y_E = - \sqrt{\frac{n+1}{Bn} (p' - p)}, \quad X_E = - \frac{Y_E^2}{2} + \frac{n+1}{2} \frac{p}{Bn} \quad (3.21)$$

Геометрическим местом точек E , соответствующих различным давлениям p , будет, следовательно, парабола

$$X + Y^2 = \frac{1}{4}(\alpha_* + \alpha_\infty)^2 \quad (3.22)$$

Парабола (3.22) заканчивается точкой D , которая отвечает границе волны с давлением $p = 0$. Координаты этой точки будут

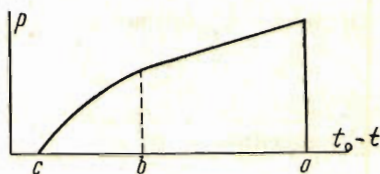
$$Y_D = -\frac{\alpha_* + \alpha_\infty}{\sqrt{2}} \quad X_D = \frac{-(\alpha_* + \alpha_\infty)^2}{4} \quad (3.23)$$

Как было показано в § 2, течение, определенное в области, ограниченной параболой $A'ED$ и прямой $A'D$, есть известное течение, возникающее при обтекании вершины угла сверхзвуковым потоком.

4. Эпюра давления, которая будет записана индикатором давления на глубине $h = -a_0 t Y$, будет состоять из области с линейным падением давления в соответствии с (3.7) и области падения по параболическому закону.

Эпюра давления будет иметь вид, изображенный на фиг. 5.

Максимальное давление в точке $X = X_a$ отвечает давлению на фронте ударной волны и определяется формулой (3.18). Значение X_a определяется из уравнения (3.14). Абсцисса X_b отвечает точке, лежащей на параболе (3.22), так что



Фиг. 5

$$X_b = \frac{(\alpha_* + \alpha_\infty)^2}{4} - Y^2 \quad (3.24)$$

Соответствующее давление определяется из (3.7) и равно

$$\alpha_*^2 \frac{p_b}{p_1} = \frac{(\alpha_* + \alpha_\infty)^2}{4} - \frac{Y^2}{2} \quad (3.25)$$

Пользуясь формулой (3.20), определим значение X_c . В этой точке давление равно нулю. Имеем

$$X_c = \frac{(\alpha_* + \alpha_\infty)^2}{4} + Y \frac{\alpha_* + \alpha_\infty}{\sqrt{2}} \quad (3.26)$$

При $Y \rightarrow 0$ отношение $(X_a - X_b)/(X_a - X_c)$ стремится к 0.415. Взаимное расположение точек B и D по глубине зависит от отношения α_∞/α_* . При

$$\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

точки B и D расположены на одной глубине. При очень малых значениях угла α_∞ точка B расположена на большей глубине, чем точка D , и эпюра давления на глубине от $|Y_D| a_0 t$ до $|Y_B| a_0 t$ будет треугольной. При $|Y| > |Y_B|$ эпюра давления будет иметь вид трапеции. Давление на фронте ударной волны при этом равно p_1 .

5. Время действия ударной волны на глубине h при $|Y| < |Y_B|$ и $|Y| < |Y_D|$ равно

$$\tau = \frac{h}{a_0} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) (\alpha_* + \alpha_\infty) - \frac{h}{4R} \right] \quad (3.27)$$

где $R = a_0 t$. Максимальное значение h/R равно $\alpha_* - \alpha_\infty$. Поэтому приближенно можно считать

$$\tau = 1.2 \frac{h}{a_0} (\alpha_* + \alpha_\infty) \quad (3.28)$$

Время действия ударной волны при $\alpha_\infty \rightarrow 0$ не стремится к нулю, как это следует из акустической теории, а стремится к значению $\tau = 1.2 (h/a_0) \alpha_*$. При приближении угла α_∞ к критическому углу τ стремится к значению, определяемому акустической теорией.

При больших глубинах погружения индикатора давление на фронте волны равно p_1 , а время действия ударной волны будет

$$\tau = 1.2 \frac{h}{a_0} \left[\alpha_\infty + \frac{1}{2} \frac{h}{R} \right] \quad (3.29)$$

6. Вычислим импульс ударной волны на глубине h . Импульс J равен

$$J = \int_t^{t+\tau} p dt = \frac{1}{a_0} \int p dx \quad \text{или} \quad J = t \int p dX$$

где J — площадь, ограниченная кривой давления на фиг. 5.

Производя вычисления при $|Y| < |Y_B|$, $|Y| < |Y_D|$, получим

$$J = \frac{p_1 t}{2\alpha_*^2} \left[-(\alpha_* + \alpha_\infty)^3 \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right) Y + \frac{(\alpha_* + \alpha_\infty)^2}{8} Y^2 - \frac{\alpha_* + \alpha_\infty}{4} Y^3 + \frac{7}{48} Y^4 \right] \quad (3.30)$$

При малых значениях α_∞/α_* импульс J не зависит от величины этого отношения и близок к

$$J_0 = \frac{p_1 t}{2\alpha_*^2} \left[-\alpha_*^3 \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right) Y + \frac{\alpha_*^2}{8} Y^2 - \frac{\alpha_*}{4} Y^3 + \frac{7}{48} Y^4 \right]$$

Аналогичным образом можно вычислить импульс при $|Y| > |Y_B|$.

§ 4. Цилиндрические волны. 1. Цилиндрическая волна понижения давления лишь приближенно может быть заменена волной Римана.

В действительности уравнениям гидродинамики удовлетворяет волна понижения давления, определяемая (1.15).

В уравнениях (1.15) можно также считать, что p_* слабо изменяется в зависимости от величины Y , при этом уравнения гидродинамики будут удовлетворены с принятой в данной работе точностью.

В точке пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью A' , давление определяется из условия равенства скорости распространения фронта ударной волны вдоль свободной поверхности и скорости фронта волны понижения давления, возникающего в этой точке. В точке A' поэтому всегда

$$\alpha' = \sqrt{\frac{n+1}{2Bn}} p'$$

Следовательно, в этой точке $p_* = p'$. Пользуясь первым уравнением (3.21), получим для p_* следующий закон изменения с глубиной

$$p_* = p' - \frac{Bn}{n+1} Y^2 \quad (4.1)$$

В точке D , где давление равно нулю, должно быть $p_* = 0$.

2. Найдем уравнение фронта ударной волны. Пользуясь (1.15) и приближенно считая $p_* = p'$, получим вместо (3.7)

$$X + \frac{Y^2}{2} = \alpha_*^2 \left\{ \xi + (\xi - 1) \left[1 - \frac{\xi - 1}{\xi' - 1} \right] \right\} \quad \left(\xi = \frac{p}{p_1}, \xi' = \frac{p'}{p_1} \right) \quad (4.2)$$

Исключая из уравнений (4.2) и (3.14) переменную ξ , получим дифференциальное уравнение фронта волны в виде

$$\left(\frac{dX}{dY} + Y \right)^2 = 2 \left(X + \frac{Y^2}{2} \right) - \alpha_*^2 \left[\xi' + \sqrt{\frac{1 - \xi'}{\alpha_*^2} \left(X + \frac{Y^2}{2} \right) - \xi' (1 - \xi')} \right] \quad (4.3)$$

Полагая

$$X + \frac{1}{2} Y^2 = z$$

имеем

$$\frac{dz}{dY} = - \sqrt{2z - \alpha_*^2 \left(\xi' + \sqrt{\frac{1 - \xi'}{\alpha_*^2} z - \xi' (1 - \xi')} \right)} \quad (4.4)$$

Интегрируя при условии $Y = 0$ при $z = \alpha_*^2 \xi'$, получим

$$- \frac{Y}{\alpha_*} = \sqrt{\frac{2}{\alpha_*^2} z} - \sqrt{\left(\frac{z}{\alpha_*^2} - \xi' \right) (1 - \xi') - \xi' - \sqrt{\xi'}} - \\ - \sqrt{\frac{1 - \xi'}{8}} \ln \frac{V \xi' - V^{1/8} (1 - \xi')}{V \left(\frac{2}{\alpha_*^2} z - V \left(\frac{z}{\alpha_*^2} - \xi' \right) (1 - \xi') - \xi' - V^{1/8} (1 - \xi') + V \frac{2}{\alpha_*^2} z - \xi' \right)} \quad (4.5)$$

3. Пользуясь (4.2), определим изменение давления вдоль фронта ударной волны. Имеем

$$- \frac{Y}{\alpha_*} = \sqrt{\frac{2}{1 - \xi'}} (\xi - \xi')^2 - (\xi - \xi') + \xi' - \sqrt{\xi'} - \\ - \sqrt{\frac{1 - \xi'}{8}} \ln \frac{V \xi' - V^{1/8} (1 - \xi')}{V \frac{2}{1 - \xi'} (\xi - \xi')^2 - (\xi - \xi') + \xi' + \sqrt{\frac{2}{1 - \xi'}} (\xi - \xi') - \sqrt{\frac{1 - \xi'}{8}}} \quad (4.6)$$

Значение ξ' на свободной поверхности найдем из условия, что фронт волны проходит через точку B (3.6). В этой точке при $\xi = 1$ $Y = -(\alpha_* - \alpha_\infty)$. Из (4.6) имеем

$$\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} = \sqrt{\xi'} - \sqrt{\frac{1 - \xi'}{8}} \ln \frac{3 + 2V \sqrt{2/(1 - \xi')}}{2V \sqrt{2\xi'/(1 - \xi')} - 1} \quad (4.7)$$

Зависимость (4.7) приближенно можно представить в виде

$$\frac{p'}{p_1} = 0.32 + 0.68 \left(\frac{\alpha_\infty}{\alpha_*} \right)^{1.31} \quad (4.8)$$

Изменение давления вдоль фронта (4.5) приближенно равно

$$\frac{p}{p_1} = \frac{p'}{p_1} \sqrt[3]{1 - \frac{Y |1 - \xi'^3|}{(\alpha_* - \alpha_\infty) \xi'^3}} \quad (4.9)$$

4. Эюра давления, которая будет записана индикатором на глубине $h = -a_0 t Y$, состоит из двух участков, на каждом из которых падение

давления происходит по параболическому закону. На первом участке, прилежащем к максимальному давлению, изменение давления будет близко к линейному. Время действия ударной волны, вычисленное при помощи полученного более точного решения, практически не отличается от времени действия, определяемого по формуле (3.27).

§ 5. Взрыв сферического заряда. При взрыве сферического заряда в безграничной массе жидкости давление на фронте ударной волны уменьшается с расстоянием по закону ^[1]

$$p_1 = \frac{147000}{(R/R_0)^{1.13}} \quad (5.1)$$

где R_0 — радиус заряда тротила. В формуле (5.1) давление выражено в кг/см^2 . Формула (5.1) справедлива при $p_1 < 1000 \text{ кг/см}^2$. Пусть заряд взорван на глубине H от свободной поверхности. На большом расстоянии R от места взрыва $\alpha_\infty = H/R$.

Для каждого расстояния R имеется критическая глубина погружения заряда H_* . Если взрыв произведен на глубине $H < H_*$, то на данном расстоянии R/R_0 отражение волны от свободной поверхности будет нерегулярным. Пользуясь формулами (2.1) и (5.1), получим

$$\frac{H_*}{R_0} = 1.67 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{0.44} \quad (5.2)$$

При взрыве сферического заряда уже не будут справедливы простые формулы, полученные выше для отражения от свободной поверхности безграничной плоской волны.

Изложенная выше теория может служить лишь для качественного объяснения явлений, наблюдаемых при взрыве сферического заряда.

Поступила 15 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Р. Подводные взрывы. ИЛ, 1950.