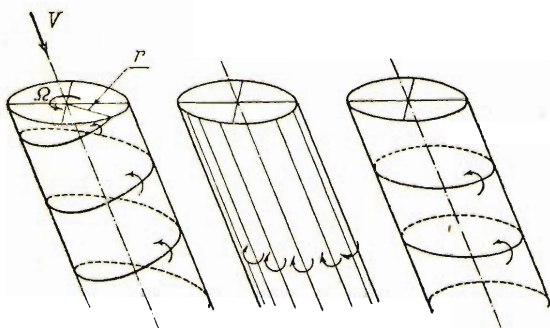


ТЕОРИЯ НЕСУЩЕГО ВИНТА ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ АТАКИ¹

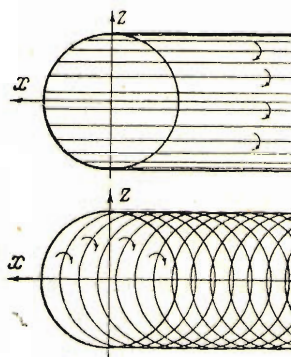
А. П. Проскураков

(Москва)

Как известно, Г. И. Майкапар в 1947 году [1] распространил вихревую теорию Н. Е. Жуковского на случай обтекания несущего винта при произвольном угле атаки. При этом пренебрегалось наличием горизонтальных и вертикальных шарниров у лопастей, а следовательно, и движением лопастей относительно этих шарниров. Свободные вихри, сбегаящие с лопастей на радиусе r , были заменены, аналогично тому как это сделано в теории Н. Е. Жуковского, вихревым слоем, расположенным по поверхности наклонного цилиндра с основанием в виде круга радиуса r . Этот вихревой слой был представлен в виде двух слоев: слоя прямолинейных вихрей, направленных по образующим цилиндра, и слоя круговых вихрей, параллельных основанию цилиндра (фиг. 1). Направление циркуляции скорости вокруг вихрей указано стрелками.



Фиг. 1



Фиг. 2

Погонная интенсивность прямолинейных вихрей на единицу длины окружности основания и погонная интенсивность круговых вихрей на единицу длины образующей цилиндра соответственно равны

$$\gamma_{пр} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi r}, \quad \gamma_{кр} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \quad (1)$$

где $\Delta\Gamma$ —суммарная циркуляция вихрей, сбегаящих с лопастей на радиусе r , а e —отношение скорости полета V к угловой скорости несущего винта Ω .

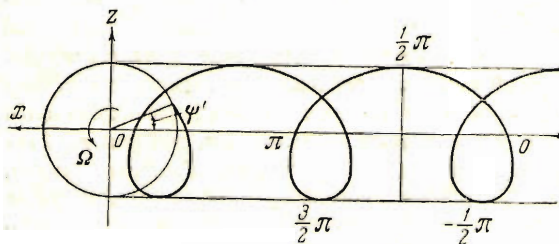
В 1949 году А. И. Слудкий, исходя из формул Г. И. Майкапара, рассмотрел частный случай работы несущего винта при нулевом угле атаки. В этом случае цилиндрический вихревой слой, сбегаящий с лопастей на радиусе r , обращается в плоский, состоящий из слоя продольных прямолинейных вихрей и из слоя круговых вихрей (фиг. 2).

¹ Доложено в несколько сокращенном виде на семинаре по аэрогидромеханике в Институте механики АН СССР 8 июня 1953 года.

В 1950 году Л. С. Вильдгрубе была сделана попытка рассмотреть самостоятельно тот же случай работы несущего винта при нулевом угле атаки, не опираясь на формулы Г. И. Майкапара. При этом рассматривался плоский вихревой слой, состоящий из трохоидаальных вихрей. Работа оказалась ошибочной, так как Л. С. Вильдгрубе, пытаясь заменить указанный вихревой слой двумя слоями из продольных и поперечных прямолинейных вихрей, не справился с этой задачей.

В настоящей работе рассматривается обтекание несущего винта только при нулевом угле атаки, причем формулы для индуктивной скорости выводятся для всего пространства. В целях полноты изложения в работе дается также анализ вихревой пелены внутри диска несущего винта и за несущим винтом.

1. Анализ плоской вихревой пелены. Предположим, что число лопастей несущего винта бесконечно велико и что лопасти вращаются с постоянной угловой скоростью Ω относительно оси винта. Несущий винт обтекается потоком несжимаемой жидкости под нулевым углом атаки.



Фиг. 3

Опусканием вихревой пелены, сходящей с несущего винта за счет индуктивных скоростей, пренебрегаем. Будем считать, что циркуляция скорости вокруг данного сечения лопасти не зависит от азимутального положения лопасти.

Рассмотрим при этих предположениях плоскую вихревую пелену, сбегающую с лопастей на радиусе r (фиг. 3). Эта вихревая пелена состоит из элементарных трохоидаальных вихрей, каждый из которых имеет начало на окружности радиуса r . Напишем уравнения семейства этих вихрей. Возьмем правую систему координат, оси которых Ox и Oz расположим так, как показано на фиг. 3, а ось Oy направим вверх. В параметрической форме уравнения этого семейства будут:

$$x = e(\psi - \psi') - r \cos \psi, \quad z = r \sin \psi \quad (2)$$

Угол ψ' служит параметром данного семейства кривых и определяет собой тот элементарный вихрь, который сбегаёт с лопасти в данный момент при азимуте, равном ψ' . Этот угол отсчитывается от отрицательной оси Ox в направлении правого вращения. Будем считать, что ψ' изменяется в пределах: $-\frac{1}{2}\pi \leq \psi' < \frac{3}{2}\pi$.

Все кривые данного семейства одинаковы по форме, но сдвинуты относительно друг друга в направлении отрицательной оси Ox . Параметр e в данном случае можно представить в следующем виде:

$$e = \mu R \quad \left(\mu = \frac{V \cos \alpha}{\Omega R} \right) \quad (3)$$

где μ — характеристика режима работы несущего винта, а α — угол атаки несущего винта, равный в данном случае нулю.

В дальнейшем будем рассматривать только тот случай, когда $r > e$. При этом форма вихрей будет именно такая, как на фиг. 3.

Угловой коэффициент касательной к произвольной вихревой линии равен

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{dz}{dx} = \frac{r \cos \psi}{e + r \sin \psi} \quad (4)$$

Из этой формулы вытекает соотношение

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\psi=\pi-\psi^*} = -\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\psi=\psi^*} \quad (5)$$

Произвольную вихревую линию можно разбить по длине на бесконечное число одинаковых по форме кусков, каждый из которых соответствует изменению ψ на 2π . Это разбиение удобно провести так, как показано на фиг. 3. Каждый такой кусок вихревой линии имеет, согласно формуле (5), ось симметрии, параллельную оси Oz .

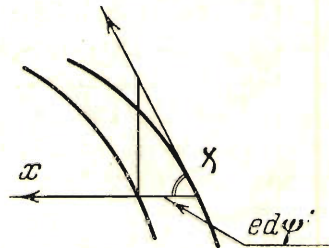
Величина ψ изменяется в пределах: $-\infty < \psi \leq \psi'$. Вместо величины ψ удобно ввести величину $\psi_n = \psi + 2\pi n$, где n — целое положительное число или нуль. Число n можно подобрать так, что для каждого куска кривой величина ψ_n будет изменяться в пределах: $-\frac{1}{2}\pi \leq \psi_n < \frac{3}{2}\pi$.

Изменению ψ_n от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$ соответствует правая половина (кривая первого вида), а изменению ψ_n от $\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{3}{2}\pi$ соответствует левая половина куска кривой (кривая второго вида).

Плоская вихревая пелена для нулевого угла атаки может быть получена из пространственной вихревой пелены для некоторого угла атаки путем непрерывного деформирования наклонного цилиндра. При этом образующие цилиндра, поворачиваясь относительно верхнего основания цилиндра, совмещаются с плоскостью этого основания. Таким образом, плоскую вихревую пелену можно рассматривать, как состоящую из двух слоев: из верхнего и нижнего слоя. При этом верхний слой состоит из криволинейных вихрей первого вида, а нижний слой из вихрей второго вида. Следовательно, внутренность круга радиуса r заполнена только криволинейными вихрями второго вида, а полоса вне этого круга заполнена всюду криволинейными вихрями обоих видов.

Элементарный вихрь, сбегающий с элемента ds окружности радиуса r , имеет циркуляцию

$$d\Phi = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi r} ds = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi} d\psi' \quad (6)$$



Фиг. 4

Расстояние вдоль оси Ox между двумя линиями, параметры которых отличаются на $d\psi'$, равно по абсолютной величине $ed\psi'$, а расстояние вдоль оси Oz равно $|\operatorname{tg} \chi| ed\psi'$ (фиг. 4).

Погонную интенсивность продольных и поперечных прямолинейных вихрей обозначим через γ_1 и γ_2 соответственно. Один штрих вверху у этих величин будет обозначать, что погонная интенсивность относится к верхнему слою (кривые первого вида), а два штриха — к нижнему слою вихрей (кривые второго вида). Получим

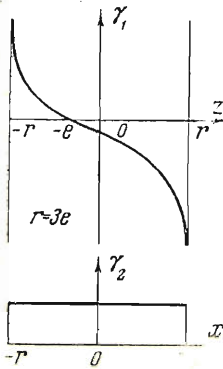
$$\begin{aligned} \gamma_1' &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{e + r \sin \psi_n}{r \cos \psi_n}, & \gamma_2' &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e}, & -\frac{1}{2}\pi &\leq \psi_n < \frac{1}{2}\pi \\ \gamma_1'' &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{e + r \sin \psi_n}{r \cos \psi_n}, & \gamma_2'' &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e}, & \frac{1}{2}\pi &\leq \psi_n < \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Заметим, что γ_1' и γ_1'' равны между собой и отличаются только формой записи. Итак, интенсивность продольных и поперечных вихрей внутри круга радиуса r определяется формулами

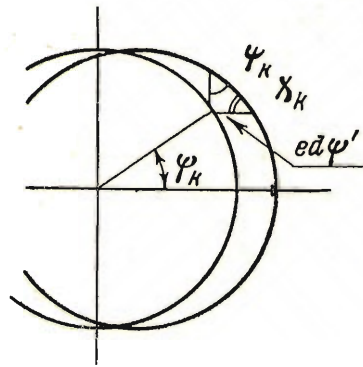
$$\gamma_1 = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{z+e}{\sqrt{r^2-z^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \quad (7)$$

Эти величины даны на фиг. 5 при $r = 3e$.

В полосе вне круга интенсивность γ_1 удваивается, а γ_2 обращается в нуль.



Фиг. 5



Фиг. 6

Можно получить те же результаты, исходя из вихревой пелены по схеме Г. И. Майкапара. Как уже упоминалось, плоская вихревая пелена по этой схеме может быть представлена состоящей из слоя продольных прямолинейных вихрей и из слоя круговых вихрей (фиг. 2). Обозначим погонную интенсивность продольных вихрей первого слоя через γ_{11} . В этом слое расстояние между двумя вихрями, сбегаящими с концов элемента дуги окружности радиуса r , равно $|\cos \psi'| ds$. Учитывая направление вихрей и опуская значок «штрих» у ψ , получим

$$\gamma_{11}' = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi r \cos \psi}, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \psi < \frac{1}{2}\pi$$

$$\gamma_{11}'' = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi r \cos \psi}, \quad \frac{1}{2}\pi \leq \psi < \frac{3}{2}\pi$$

Итак, внутри круга радиуса r имеем

$$\gamma_{11} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2-z^2}} \quad (8)$$

В полосе за кругом интенсивность γ_{11} удваивается.

Теперь разложим второй слой из круговых вихрей на два слоя продольных и поперечных прямолинейных вихрей. Погонную интенсивность продольных вихрей, полученных таким способом, будем обозначать через γ_{12} . Для погонной интенсивности поперечных вихрей сохраним прежнее обозначение γ_2 .

На основании фиг. 6 для круговых вихрей имеем $\chi_k + \psi_k = 1/2\pi$ и, следовательно, $\text{tg } \chi_k = \text{ctg } \psi_k$.

Расстояние вдоль оси Ox между двумя соседними круговыми вихрями равно по абсолютной величине $ed\psi'$, а расстояние вдоль оси Oz равно $|\operatorname{ctg} \psi_k| ed\psi'$. Заметим при этом, что задние полуокружности образуют верхний слой, а передние полуокружности — нижний слой вихревой пелены. Получим

$$\begin{aligned} \gamma_{12}' &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \operatorname{tg} \psi_k, & \gamma_2' &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e}, & -\frac{1}{2}\pi &\leq \psi_k < \frac{1}{2}\pi \\ \gamma_{12}'' &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \operatorname{tg} \psi_k, & \gamma_2'' &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e}, & \frac{1}{2}\pi &\leq \psi_k < \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Итак, внутри круга радиуса r имеем

$$\gamma_{12} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \quad (9)$$

В полосе вне круга погонная интенсивность γ_{12} удваивается, а γ_2 обращается в нуль.

Легко видеть, что

$$\gamma_{11} + \gamma_{12} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{z + e}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \gamma_1 \quad (10)$$

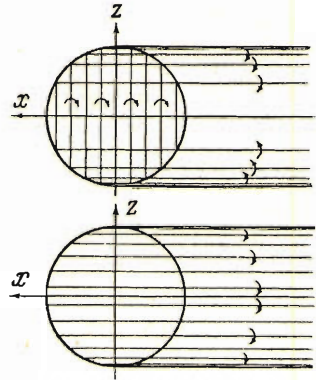
Таким образом, погонная интенсивность продольных и поперечных прямолинейных вихрей, полученных из двух слоев продольных и круговых вихрей, такая же, как у прямолинейных вихрей, полученных из слоя трохoidalных вихрей. Этим подтверждается, что вихревая пелена по схеме Г. И. Майкапара эквивалентна вихревой пелене из трохoidalных вихрей.

Из формул (9) следует, что система круговых вихрей преобразуется в систему П-образных вихрей. Получаем простое и весьма наглядное представление для вихревой пелены, сбегаящей с лопастей на радиусе, равном r . Эта пелена состоит из двух систем вихрей: из системы П-образных вихрей и из системы продольных прямолинейных вихрей (фиг. 7). Вихри первой системы можно рассматривать как замкнутые. Вихри второй системы сбегают с окружности радиуса r , приобретая на ней свою циркуляцию.

Система П-образных вихрей легко может быть построена, основываясь на равномерности распределения поперечных вихрей, являющихся основанием П-образных вихрей. Заметим, что вне круга продольные вихри от двух П-образных вихрей, у которых поперечные вихри расположены симметрично относительно поперечного диаметра, сливаются друг с другом.

Система продольных прямолинейных вихрей также легко может быть построена, учитывая равномерность распределения этих вихрей по окружности.

При изменении направления вращения несущего винта П-образные вихри первой вихревой системы не изменяют своего направления, а изменяют направление только продольные вихри, входящие во вторую вихревую систему.



Фиг. 7

Поле индуктивных скоростей от системы П-образных вихрей симметрично относительно плоскости xOy , а от системы продольных вихрей — антисимметрично относительно той же плоскости.

Следовательно, для полного определения поля индуктивных скоростей достаточно вычислить их только в полупространстве справа или слева от плоскости xOy .

Интересно отметить, что масса воздуха, протекающего через внутренность круга радиуса r под действием второй вихревой системы, равна нулю. Следовательно, подъемная сила, соответствующая этой вихревой системе, также равна нулю.

2. Общая формула для индуктивной скорости. Перейдем к определению скоростей, индуцируемых вихревой пеленой, сбегаящей с лопастей на радиусе, равном r . При этом будем интересоваться только проекцией индуктивной скорости на ось Oy .

Пользуясь представлением вихревой пелены в виде двух слоев из продольных и поперечных прямолинейных вихрей, можно легко получить общую формулу для индуктивной скорости.

Для этого воспользуемся формулами для индуктивной скорости от одиночных вихревых шнуров, лежащих в плоскости xOz и параллельных осям Ox и Oz соответственно [2]:

$$v_{y1} = \frac{\Gamma_1}{4\pi} \int_{L_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi, \quad v_{y2} = -\frac{\Gamma_2}{4\pi} \int_{L_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\zeta \quad (11)$$

где Γ_1 и Γ_2 — соответствующие циркуляции этих вихревых шнуров, а ρ — расстояние между некоторой точкой вихря $(\xi, 0, \zeta)$ и точкой (x, y, z) , в которой вычисляется индуктивная скорость

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} \quad (12)$$

Циркуляция элементарного продольного вихря равна $\gamma_1 d\zeta$, а элементарного поперечного вихря равна $\gamma_2 d\xi$. Подставим значения этих циркуляций в формулы (11) вместо Γ_1 и Γ_2 и проинтегрируем полученные выражения для индуктивных скоростей по ширине вихревых слоев. Далее заметим, что

$$\gamma_1 = -\gamma_2 f(\zeta), \quad f(\zeta) = \frac{\zeta + e}{\sqrt{r^2 - \zeta^2}} \quad (13)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (14)$$

получим формулу для индуктивной скорости от вихрей, сбегających с лопастей на радиусе, равном r :

$$\Delta v_y = \frac{\gamma_2}{4\pi} \left[\iint_{S_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi d\zeta + \iint_{S_1} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi d\zeta + 2 \iint_{S_2} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi d\zeta \right] \quad (15)$$

Двойные интегралы, входящие в эту формулу, распространены на площади S_1 и S_2 . Под площадью S_1 подразумевается площадь круга радиуса r , а под площадью S_2 — площадь полубесконечной полосы шириной $2r$ за кругом.

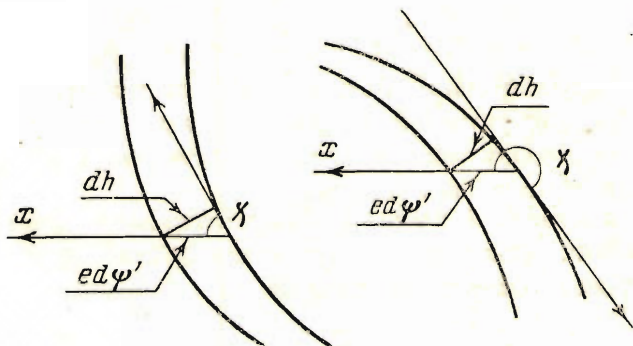
Можно получить формулу (15), исходя непосредственно из слоя трохональных вихрей, не прибегая к разложению этого слоя на два слоя продольных и поперечных прямолинейных вихрей. Такой вывод формулы (15) представляет интерес, так как он позволяет получить выражения для γ_1 и γ_2 совершенно иным путем. Имеем известную формулу [2]:

$$v_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (16)$$

Величины A_x и A_z , входящие в эту формулу, являются проекциями на оси Ox и Oz вектора \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{\boldsymbol{\omega} d\tau}{\rho} \quad (17)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор элементарного вихря, τ — объем, заполненный вихрями, а ρ — расстояние между некоторой точкой (ξ, η, ζ) этого объема и точкой (x, y, z) , в которой вычисляется индуктивная скорость. В данном случае в качестве объема, заполненного вихрями, следует принять объем беско-



Фиг. 8

нечно тонкого слоя, основание которого расположено на плоскости xOz и ограничено полуокружностью радиуса r и двумя полупрямыми, параллельными оси Ox . Величина расстояния ρ определяется формулой (12).

Элементарный вихрь, сбегаящий с элемента ds окружности радиуса r , имеет циркуляцию, определяемую формулой (6). В то же время циркуляция вокруг произвольной элементарной вихревой нити равна

$$d\Phi = \omega dh d\eta$$

где $d\eta$ — толщина вихревого слоя, а dh — расстояние между двумя соседними вихревыми нитями. Имеем (фиг. 8):

$$\begin{aligned} dh &= -e d\psi' \sin \chi, & -\frac{1}{2}\pi &\leq \psi' < \frac{1}{2}\pi \\ dh &= e d\psi' \sin \chi, & \frac{1}{2}\pi &\leq \psi' < \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Приравнивая друг другу оба выражения для циркуляции, получаем

$$\omega d\eta = \mp \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e \sin \chi} \quad (18)$$

В этой формуле, а также в непосредственно следующих за ней, верхний знак относится к верхнему слою (кривые первого вида), а нижний знак — к нижнему слою вихрей (кривые второго вида).

Учитывая, что $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$, имеем

$$\omega_x d\tau = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{\zeta + e}{\sqrt{r^2 - \zeta^2}} d\xi d\zeta, \quad \omega_z d\tau = \mp \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} d\xi d\zeta \quad (19)$$

Обозначим, пока чисто формально, по аналогии с формулами (9),

$$\gamma_1(\zeta) = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \frac{\zeta + e}{\sqrt{r^2 - \zeta^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi e} \quad (20)$$

Спроектируем вектор \mathbf{A} на оси Ox и Oz и подставим в выражения для этих проекций величины $\omega_x d\tau$ и $\omega_z d\tau$ из формул (19). Пользуясь также формулами (20), получим

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{S_1} \frac{\gamma_1(\zeta) d\xi d\zeta}{\rho} + 2 \iint_{S_2} \frac{\gamma_1(\zeta) d\xi d\zeta}{\rho} \right], \quad A_z = \frac{\gamma_2}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{d\xi d\zeta}{\rho}$$

Обозначения площадей S_1 и S_2 , на которые распространены двойные интегралы, объяснены выше. Подставляя значения A_x и A_z в формулу (16) и используя при этом (13) и (14), приходим вновь к формуле (15).

Таким образом, величины γ_1 и γ_2 , введенные формально по формулам (20), представляют собой погонные интенсивности продольных и поперечных прямолинейных вихрей. Следовательно, данный способ вывода формулы индуктивной скорости является вместе с тем независимым способом получения выражений для погонной интенсивности упомянутых прямолинейных вихрей.

3. Преобразование формулы для индуктивной скорости. Обозначим первый интеграл, стоящий в квадратных скобках формулы (15), через I_1 и представим его в следующем виде:

$$I_1 = \int_{-r}^r d\zeta \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi \quad (\kappa = \sqrt{r^2 - \zeta^2}) \quad (21)$$

Интегрируя один раз, получаем

$$I_1 = \int_{-r}^r \left[\frac{1}{\sqrt{l^2 - 2z\zeta - 2x\sqrt{r^2 - \zeta^2}}} - \frac{1}{\sqrt{l^2 - 2z\zeta + 2x\sqrt{r^2 - \zeta^2}}} \right] d\zeta \quad (22)$$

Здесь обозначено $l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + r^2$. Из формулы (22) следует, что I_1 обращается в нуль в бесконечности и в точках плоскости yOz . Из этой же формулы непосредственно следует $I_1(-x, y, z) = -I_1(x, y, z)$, $I_1(x, -y, z) = I_1(x, y, z)$. Применяя подстановку $\zeta = -\zeta_1$ и опуская индекс 1, получим также $I_1(x, y, -z) = I_1(x, y, z)$. Эти формулы имеют очевидный физический смысл.

В интеграле I_1 сделаем замену переменного

$$\zeta = r \sin \theta \quad (23)$$

и представим его в виде разности двух интегралов $I_1 = I_{11} - I_{12}$, где

$$I_{11} = r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{l^2 - 2rz \sin \theta - 2rx \cos \theta}}, \quad I_{12} = r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{l^2 - 2rz \sin \theta + 2rx \cos \theta}}$$

Введем угол β при помощи формулы

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{x} \quad \left(\sin \beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \quad (24)$$

В интегралах I_{11} и I_{12} произведем соответственно следующие подстановки: $\theta = \pi - 2\varphi + \beta$ и $\theta = 2\varphi - \beta$.

Выполнив некоторые преобразования и соединив опять эти два интеграла, получим

$$I_1 = -\frac{2r}{m} \left[\cos \beta \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \pi} \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \sin \beta \int_{\varphi_0}^{\varphi_1 + \pi} \frac{\sin 2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \quad (25)$$

где

$$m = \sqrt{l^2 + 2r\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \varphi_1 = \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad k^2 = \frac{4r\sqrt{x^2 + z^2}}{l^2 + 2r\sqrt{x^2 + z^2}} \quad (26)$$

Легко показать, что второй интеграл, стоящий в формуле (25), равен нулю, а первый интеграл выражается через эллиптические интегралы. Окончательно получаем

$$I_1 = C_1 K(k) + C_2 E(k) \quad \left(C_1 = \frac{2x}{x^2 + z^2} \frac{l^2}{m}, \quad C_2 = -\frac{2x}{x^2 + z^2} m \right) \quad (27)$$

$K(k)$ и $E(k)$ являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода. Параметр k служит модулем этих эллиптических интегралов. Модуль k изменяется в пределах $0 \leq k^2 \leq 1$. Значение модуля $k = 0$ соответствует или бесконечно удаленной точке $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$, или точкам оси Oy , т. е. когда $x^2 + z^2 = 0$. Но, как указывалось выше, в этих точках интеграл I_1 обращается в нуль.

Модуль k обращается в единицу только при $y = 0$, $x^2 + z^2 = r^2$, т. е. на исходной окружности радиуса r , с которой сбегает вихревая пелена. Известно, что при $k^2 = 1$ полный эллиптический интеграл первого рода обращается в бесконечность, как $\ln(1 - k^2)^{-1}$.

Обозначим сумму второго и третьего интегралов, стоящих в формуле (15), через I_2 :

$$I_2 = \iint_{S_1} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi d\zeta + 2 \iint_{S_2} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \right) d\xi d\zeta \quad (28)$$

Интеграл I_2 можно записать следующим образом:

$$I_2 = \int_{-r}^r f(\zeta) H(\zeta) (z - \zeta) d\zeta, \quad H(\zeta) = 2 \int_{-\infty}^{-x} \frac{d\xi}{\rho^3} + \int_{-x}^x \frac{d\xi}{\rho^3} \quad (x = \sqrt{r^2 - \zeta^2})$$

где функция $f(\zeta)$ определяется формулой (13). Произведем следующую замену переменного:

$$x - \xi = \rho_1 \operatorname{ctg} u, \quad \rho_1 = \sqrt{y^2 + (z - \zeta)^2}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int \frac{d\xi}{\rho^3} = -\frac{\cos u}{\rho_1^2}$$

Произведя вычисления, получим

$$H(\zeta) = \frac{1}{\rho_1^2} \left(2 - \frac{x + \sqrt{r^2 - \zeta^2}}{\sqrt{l^2 - 2z\zeta + 2x\sqrt{r^2 - \zeta^2}}} - \frac{x - \sqrt{r^2 - \zeta^2}}{\sqrt{l^2 - 2z\zeta - 2x\sqrt{r^2 - \zeta^2}}} \right)$$

Подставим значения $H(\zeta)$ и $f(\zeta)$ в интеграл I_2 и разобьем этот интеграл на три части, соответственно числу слагаемых в функции $H(\zeta)$:

$$I_2 = -(I_0 + I_{21} + I_{22}) \quad (29)$$

Перейдем к вычислению интеграла I_0 :

$$I_0 = 2 \int_{-r}^r \frac{\zeta - z}{y^2 + (\zeta - z)^2} \frac{e + \zeta}{\sqrt{r^2 - \zeta^2}} d\zeta \quad (30)$$

Используем замену переменного $\zeta = r \cos \theta$. Получим

$$I_0 = 2 \int_0^\pi \frac{r^2 \cos^2 \theta + r(e - z) \cos \theta - ez}{r^2 \cos^2 \theta - 2rz \cos \theta + y^2 + z^2} d\theta$$

Затем применим подстановку $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = t$. Произведя соответствующие выкладки, будем иметь

$$I_0 = 4 \int_0^\infty \frac{P_0 t^4 + P_1 t^2 + P_2}{Q_0 t^4 + Q_1 t^2 + Q_2} \frac{dt}{t^2 + 1}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} P_0 &= r^2 + r(z - e) - ez, & Q_0 &= (z + r)^2 + y^2 \\ P_1 &= -2(r^2 + ez), & Q_1 &= 2(y^2 + z^2 - r^2) \\ P_2 &= r^2 - r(z - e) - ez, & Q_2 &= (z - r)^2 + y^2 \end{aligned}$$

Преобразуя подинтегральное выражение к сумме двух дробей и интегрируя вторую дробь, получим $I_0 = 2(2I_0^* + \pi)$. В этой формуле

$$I_0^* = \int_0^\infty \frac{(G_1 t^2 + G_2) dt}{Q_0 t^4 + Q_1 t^2 + Q_2} \quad \left(\begin{aligned} G_1 &= -[y^2 + (z + r)(z + e)] \\ G_2 &= -[y^2 + (z - r)(z + e)] \end{aligned} \right)$$

Интеграл I_0^* можно представить в следующем виде:

$$I_0^* = \frac{1}{Q_0} \left[\int_0^\infty \frac{(g_1 t + g_2) dt}{t^2 + p_1 t + p_2} - \int_0^\infty \frac{(g_1 t - g_2) dt}{t^2 - p_1 t + p_2} \right] = \frac{1}{Q_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{(g_1 t + g_2) dt}{t^2 + p_1 t + p_2} \quad (31)$$

Здесь обозначено

$$p_2 = \sqrt{\frac{Q_2}{Q_0}}, \quad p_1 = \sqrt{2p_2 - \frac{Q_1}{Q_0}}, \quad g_1 = \frac{G_2 - p_2 G_1}{2p_1 p_2}, \quad g_2 = \frac{G_2}{2p_2}$$

Чтобы получить этот результат, нужно в квадратных скобках у второго интеграла заменить t на $-t$.

Рассмотрим квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе подинтегрального выражения (31). Корни его равны

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} p_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} p_1^2 - p_2}$$

Подставляя значения p_1 и p_2 в дискриминант этого трехчлена, получим

$$\Delta = \frac{p_1^2}{4} - p_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(z - r)^2 + y^2}{(z + r)^2 + y^2}} + \frac{y^2 + z^2 - r^2}{(z + r)^2 + y^2} \right)$$

Этот дискриминант обращается в нуль только в точках, удовлетворяющих условиям $y = 0$, $z^2 < r^2$ и $y = 0$, $z = r$. Во всех остальных точках пространства $\Delta < 0$. Следовательно, упомянутый квадратный трехчлен имеет или равные действительные корни, или же комплексные корни.

Рассмотрим первый случай: $\Delta = 0$. Произведя выкладки, получим

$$I_0^* = \frac{e + z}{2 \sqrt{r^2 - z^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t + \frac{1}{2} p_1}$$

Интеграл, входящий в эту формулу, равен нулю. Таким образом, $I_0^* = 0$, если $y = 0$, $z^2 < r^2$.

Рассмотрим второй случай, когда $\Delta < 0$. Разобьем интеграл I_0^* на два интеграла:

$$I_0^* = \frac{g_1}{2Q_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2t + p_1)gt}{t^2 + p_1t + p_2} + \frac{2g_2 - p_1g_1}{2Q_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + p_1t + p_2}$$

Первый из этих интегралов равен нулю. Второй легко вычисляется. После подстановки всех величин в формулу (30) получаем окончательно

$$I_0 = \pi \left\{ 2 - \frac{|y^2 + (z+r)(z+e)|}{V-\Delta [(z+r)^2 + y^2]} + \frac{|y^2 + (z-r)(z+e)|}{V-\Delta [(z+r)^2 + y^2]} \sqrt{\frac{(z+r)^2 + y^2}{(z-r)^2 + y^2}} \right\} \quad (32)$$

Переходим к вычислению интегралов I_{21} и I_{22} :

$$I_{21} = \int_{-r}^r \frac{z - \zeta}{y^2 + (z - \zeta)^2} \frac{x + V\sqrt{r^2 - \zeta^2}}{\sqrt{l^2 - 2z\zeta + 2x\sqrt{r^2 - \zeta^2}}} \frac{e + \zeta}{V\sqrt{r^2 - \zeta^2}} d\zeta$$

$$I_{22} = \int_{-r}^r \frac{z - \zeta}{y^2 + (z - \zeta)^2} \frac{x - V\sqrt{r^2 - \zeta^2}}{\sqrt{l^2 - 2z\zeta - 2x\sqrt{r^2 - \zeta^2}}} \frac{e + \zeta}{V\sqrt{r^2 - \zeta^2}} d\zeta$$

Эти интегралы могут быть преобразованы к эллиптическим интегралам таким же способом, как был преобразован интеграл I_1 . Для этого используем сначала замены переменных (23) и (24), а затем в первом интеграле выполним подстановку $\theta = 2\varphi - \beta$, а во втором интеграле — подстановку $\theta = \pi - 2\varphi + \beta$. Сложив эти два интеграла, получим

$$I_2^* = I_{21} + I_{22} = \frac{2}{m} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \pi} \frac{F(\varphi) d\varphi}{V1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (33)$$

Величины m , φ_1 и k определяются формулами (26). Функция $F(\varphi)$ равна

$$F(\varphi) = \frac{[z - r \sin(2\varphi - \beta)] [x + r \cos(2\varphi - \beta)] [e + r \sin(2\varphi - \beta)]}{y^2 + [z - r \sin(2\varphi - \beta)]^2}$$

Функцию $F(\varphi)$ можно представить в следующем виде:

$$F(\varphi) = F_1(\sin^2 \varphi) + F_2(\sin^2 \varphi) \sin 2\varphi$$

Подставим это выражение в формулу (33) и разобьем интеграл I_2^* на два интеграла. Заметим, что промежуток интегрирования является периодом для произвольной функции от $\sin^2 \varphi$. Отсюда следует, что второй из интегралов равен нулю. В первом интеграле можно изменить пределы интегрирования на 0 и π , а затем заменить этот интеграл удвоенным интегралом по половинному промежутку. Получим

$$I_2^* = \frac{4}{m} \int_0^{1/2\pi} \frac{F_1(\sin^2 \varphi) d\varphi}{V1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

Введем обозначение $w = \sin^2 \varphi$. Тогда

$$F_1(w) = \frac{b_0 w^3 + b_1 w^2 + b_2 w + b_3}{a_0 w^4 + a_1 w^3 + a_2 w^2 + a_3 w + a_4} + c_0 w + c_1 \quad (34)$$

Для удобства обозначим $q = r/\sqrt{x^2 + z^2}$. Тогда выражения для коэффициентов в этой формуле будут иметь вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= 16r^4, & a_1 &= -32r^2(r^2 + qz^2) \\ a_2 &= 8[2(r^2 + qz^2)^2 + r^2(q+1)^2 z^2 - (r^2 - 2q^2 z^2)y^2] \\ a_3 &= -8[(q+1)^2(r^2 + qz^2)z^2 - r^2 y^2 + q(2q+1)z^2 y^2] \\ a_4 &= [(q+1)^2 z^2 + y^2]^2 \\ b_0 &= 8r^2 q x [y^2 - 2z(z+e)] \\ b_1 &= 4x \{2q^2 z(2z+e)y^2 - (3q+1)r^2 y^2 + z(z+e)[r^2(q+1)^2 + 4q(r^2 + qz^2)]\} \\ b_2 &= -2x [qy^4 - 2q^2(q+1)x^2 y^2 - q(q+1)^2 z^2 y^2 + 4q^2 z y^2(2z+e) + \\ &\quad + 2qz y^2(3z+e) + 2(q+1)^2 z(r^2 + 2qz^2)(z+e)] \\ b_3 &= (q+1)x [y^4 + (q+1)z(2z+qz+e)y^2 + (q+1)^3 z^3(z+e)] \\ c_0 &= 2qx, & c_1 &= -(q+1)x \end{aligned}$$

Пусть w_i — корни знаменателя дроби, стоящей в формуле (34). Эта дробь может быть преобразована к виду

$$\frac{1}{16r^4} \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{w-w_i}$$

Та часть интеграла I_2^* , которая зависит от целой части функции F_1 , приводится к эллиптическим интегралам первого и второго рода. Другая часть интеграла I_2^* , зависящая от дробной части функции F_1 , приводится к сумме четырех эллиптических интегралов третьего рода. Таким образом, имеем

$$I_2^* = - \sum_{i=1}^4 A_i \Pi(n_i, k) + C_3 K(k) + C_4 E(k) \quad (35)$$

В этой формуле $\Pi(n_i, k)$ обозначает полный эллиптический интеграл третьего рода с параметром, равным n_i , и с модулем, равным k . Коэффициенты C_3 и C_4 равны:

$$C_3 = \frac{2x}{m} \left(\frac{l^2}{x^2 + z^2} - 2 \right), \quad C_4 = - \frac{2x}{x^2 + z^2} m \quad (36)$$

Итак, в произвольной точке пространства индуктивная скорость Δv_y , происходящая от свободных вихрей, сбегающих с окружности радиуса r , определяется формулой

$$\Delta v_y = \frac{\Delta \Gamma}{8\pi^2 e} \left[\sum_{i=1}^4 A_i \Pi(n_i, k) + BK(k) - I_0 \right] \quad (37)$$

Параметры эллиптических интегралов третьего рода n_i , а также коэффициенты A_i и B , имеют следующие значения

$$n_i = - \frac{1}{w_i}, \quad A_i = - \frac{\alpha_i n_i}{4mr^4} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad B = \frac{4x}{m} \quad (38)$$

Величина I_0 определяется формулой (32). Следовательно, индуктивная скорость выражается через эллиптические интегралы первого и третьего рода, параметры и модуль которых являются алгебраическими

функциями координат точек пространства, и через алгебраическую функцию этих координат.

При $y = 0$ формула (37) значительно упрощается. При этом число эллиптических интегралов третьего рода сокращается до двух, а коэффициенты при этих интегралах и параметры их удается выразить в явном виде. Имеем

$$\Delta v_y = \frac{\Delta \Gamma}{8\pi^2 e} [A_1' \Pi(n_1', k') + A_2' \Pi(n_2', k') + B' K(k') + I_0'] \quad (39)$$

Параметры n_1' и n_2' эллиптических интегралов третьего рода равны:

$$\begin{aligned} n_1' &= -\frac{2r\sqrt{x^2+z^2}}{z^2(r+\sqrt{x^2+z^2})^2} (r\sqrt{x^2+z^2} + z^2 + x\sqrt{r^2-z^2}) \\ n_2' &= -\frac{2r\sqrt{x^2+z^2}}{z^2(r+\sqrt{x^2+z^2})^2} (r\sqrt{x^2+z^2} + z^2 - x\sqrt{r^2-z^2}) \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициенты A_1' и A_2' имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1' &= -\frac{2(z+e)(\sqrt{r^2-z^2}+x)^3}{z\sqrt{r^2-z^2}(r+\sqrt{x^2+z^2})^3} (r\sqrt{x^2+z^2} + z^2 + x\sqrt{r^2-z^2}) \\ A_2' &= \frac{2(z+e)(\sqrt{r^2-z^2}-x)^3}{z\sqrt{r^2-z^2}(r+\sqrt{x^2+z^2})^3} (r\sqrt{x^2+z^2} + z^2 - x\sqrt{r^2-z^2}) \end{aligned} \quad (41)$$

Величины k' и B' легко получить из формул (26) и (38), положив в них $y = 0$. Величина I_0' определяется формулой

$$I_0' = \begin{cases} 0 & (z^2 < r^2) \\ 2\pi \left[\frac{e+z}{\sqrt{z^2-r^2}} \operatorname{sign} z - 1 \right] & (z^2 > r^2) \end{cases} \quad (42)$$

Интересно отметить, что при $x = 0$, параметры n_1' и n_2' будут равны между собой. Так как $A_1' + A_2' = 0$, $B' = 0$ при $x = 0$, то распределение индуктивных скоростей вдоль оси Oz определяется величиной I_0' . Следовательно, на отрезке этой оси внутри круга радиуса r индуктивная скорость Δv_y обращается в нуль. Полная индуктивная скорость от всех свободных вихрей, сбегаящих с лопастей, в общем случае равна:

$$v_y = \frac{1}{8\pi^2 e} \int_{r_0}^R \frac{d\Gamma}{dr} \left[\sum_{i=1}^4 A_i \Pi(n_i, k) + BK(k) - I_0 \right] dr \quad (43)$$

Можно показать, что в этой формуле подинтегральная функция обращается в бесконечность только в тех случаях, когда точка, где определяется индуктивная скорость, находится на окружности радиуса r или на границах полосы шириной $2r$ за кругом. В первом случае имеет место логарифмическая особенность вида $\ln(r - \sqrt{x^2+z^2})$, а во втором случае особенность вида $1/\sqrt{r^2-z^2}$. Так как обе особенности интегрируемые, то индуктивная скорость v_y будет везде конечна.

Определение циркуляции вдоль лопасти здесь не рассматривается.

Поступила 16 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Майкапар Г. И., Приложение вихревой теории винта, Труды ЦАГИ, № 613, 1947.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розен Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, Гостехиздат, 1948.