Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Н. Н. Красовский

(Москва)

В заметке приводится критерий асимптотической устойчивости невозмущенного движения для случая, когда уравнения возмущенного движения содержат члены, учитывающие последействие. Этот критерий основан на идеях второго метода Ляпунова [1] и является развитием результатов, приведенных в статье [2].

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t-\vartheta), \ldots, x_n(t-\vartheta), t) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $X_i(y_1(-\vartheta), \ldots, y_n(-\vartheta), t)$ — функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $y_j(-\vartheta)$, которые предполагаются заданными при значениях аргумента ϑ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$ (h — положительная постоянная). Система уравнений (1) описывает систему с последействием, когда производная dx_i/dt в момент времени t определяется поведением решения $x_i(t)$ на некотором отрезке времени, предшествующем моменту t. Подставляя функции $x_i(t-\vartheta)$, соответствующие решениям уравнений (1) при $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$, в функционалы X_i, получим числа, которые и определяют значения производных dx_i/dt в момент времени t. Частными случаями таких уравнений являются системы с запаздываниями времени

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_j(t-h_{jk}(t)), t) \qquad (i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, m) \tag{2}$$

где X_i — функции аргументов x_j; уравнения в конечных разностях, уравнения, правые части которых содержат функции от интегралов

$$\int\limits_{t-h}^{t} f_k(x_j(\xi))\, d\psi_k(\xi)$$

и т. д. При $h=0$ уравнения (1) обращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Символом $\|x(-\vartheta)\|$ обозначим норму кривой $x(-\vartheta) \equiv \{x_1(-\vartheta), \ldots, x_n(-\vartheta)\}$, которую определим формулой

$$\|x(-\vartheta)\| = \sup\{|x_i(-\vartheta)|\} \qquad \text{при } 0 \leqslant \vartheta \leqslant h,\ i=1, \ldots, n \tag{3}$$

В дальнейшем функции переменной ϑ рассматриваются при $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$. Предполагается, что выполняются следующие условия.

1. Функционалы X_i определены при $t \geqslant 0$ на кусочно-непрерывных функциях $y(-\vartheta) = \{y_1(-\vartheta), \ldots, y_n(-\vartheta)\}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|y(-\vartheta)\| < H \tag{4}$$

где H — фиксированная постоянная, в частности может быть $H=\infty$.

2. Значения функционала

$$X_i(0, \ldots, 0, t) = 0 \qquad \text{при } t > 0 \ (i=1, \ldots, n) \tag{5}$$

(0 в левой части равенства (5) означает $y(-\vartheta) \equiv 0$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$).

3. Функционалы X_i кусочно-непрерывны в следующем смысле: существует последовательность чисел $t_1 = 0,\ t_2, \ldots, t_k, \ldots$ такая, что в каждой области

$$\| y(-\vartheta) \| < H, \qquad t_{k-1} \leqslant t < t_k \tag{6}$$

функционалы X_i непрерывны, т. е.

$$\lim (X_i(y(-\vartheta), t) - X_i(y^*(-\vartheta), t^*)) = 0 \qquad \text{при } y \to y^*,\ t \to t^*$$

(что означает $\| y(-\vartheta) - y^*(-\vartheta) \| + | t - t^* | \to 0$).

В точках $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ символ dx_i / dt в уравнениях (1) означает правую производную, равную предельному значению X_i при $t = t_{k-1} + 0$.

4. Функционалы X_i удовлетворяют условиям Липшица по $y(-\vartheta)$:

$$| X_i(y(-\vartheta), t) - X_i(y^*(-\vartheta), t) | < L \| y(-\vartheta) - y^*(-\vartheta) \| \tag{7}$$

При условиях 1—4 каждая кусочно-непрерывная кривая $\| x(t_0 - \vartheta) \| < H$ определяет при $t \geqslant t_0$ единственное решение уравнений (1), существующее для всех тех значений $t \geqslant t_0$, при которых это решение продолжимо в области (4). Это утверждение доказывается обычным путем — применением принципа неподвижной точки [4]. При $t \geqslant t_0$ имеем неравенство

$$\| x(x_0(t_0 - \vartheta_0), t - \vartheta) - x(x_0^*(t_0 - \vartheta_0), t - \vartheta) \|_\vartheta \leqslant$$
$$\leqslant \| x_0(t_0 - \vartheta_0) - x_0^*(t_0 - \vartheta_0) \|_{\vartheta_0} e^{L(t - t_0)} \tag{8}$$

Доказательство неравенства (8) проводится подобно тому, как это делается в случае обыкновенных дифференциальных уравнений ([5] стр. 23).

В этой заметке задача устойчивости рассматривается в такой постановке, когда в качестве начальных кривых $x_0(t_0 - \vartheta_0)$, определяющих траектории возмущенного движения, допускаются любые кусочно-непрерывные кривые, удовлетворяющие неравенству

$$\| x_0(t_0 - \vartheta_0) \| < G \qquad (G \leqslant H) \tag{9}$$

Невозмущенное движение $x = 0$ будем называть устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$\| x(x_0(t_0 - \vartheta_0),\ t - \vartheta) \|_\vartheta < \varepsilon \qquad \text{при } t \geqslant t_0$$

если соответствующая начальная кривая $x_0(t_0 - \vartheta_0)$ удовлетворяет условию

$$\| x_0(t_0 - \vartheta_0) \| < \delta$$

Если при этом $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех кусочно-непрерывных начальных кривых из области (9), то невозмущенное движение $x = 0$ устойчиво асимптотически и начальные кривые (9) лежат в области притяжения невозмущенного движения. Если δ можно выбрать не зависящим от ε, то устойчивость равномерна по t_0.

При исследовании устойчивости невозмущенного движения в случае уравнений (1) наряду с функциями Ляпунова $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ целесообразно рассматривать функционалы $V(y_1(-\vartheta), \ldots, y_n(-\vartheta), t)$, определенные на функциях $y_i(-\vartheta)$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$. Основные понятия метода функций Ляпунова (знакоопределенность, свойство бесконечно малого высшего предела, производной dV / dt в силу уравнений (1)) переносятся естественным образом на функционалы V. Это сделано в статье [2] для уравнений с запаздываниями (2), однако, очевидно, приведенные там определения и основные теоремы сохраняют смысл и для уравнений (1).

Указанные ниже понятия употребляются в том смысле, как это определено в статье [2]. Приведенная ниже теорема обобщает теорему 2.1 [2].

Обозначим через $M(G, t_0, t)$ некоторое семейство кривых $\{y_i(-\vartheta)\}$, такое, что решения $\{x_i(x_0(t_0-\vartheta_0), t-\vartheta)\}$ уравнений (1), соответствующие всевозможным начальным кривым $x_0(t_0-\vartheta_0)$ из области (9), содержатся в $M(G, t_0, t)$.

Лемма. Пусть решения уравнений (1) при всех начальных кривых (9) продолжимы в области

$$\|x(t-\vartheta)\| < H \tag{10}$$

на интервал времени $t_0 \leqslant t < \infty$. Если существует функционал $V(y(-\vartheta), t)$, определенный при каждом $t \geqslant t_0$ на кривых семейства $M(G, t_0, t)$, ограниченный по модулю равномерно и такой, что для любого $\gamma > \gamma_0$ можно указать числа $K(\gamma)$ и $a(\gamma) > 0$, удовлетворяющие условию

$$\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{V(x(t+\Delta t-\vartheta), t+\Delta t) - V(x(t-\vartheta), t)}{\Delta t} < -a(\gamma) \quad \text{при } t \geqslant t_0 + K(\gamma) \tag{11}$$

в силу уравнений (1) на кривых $x(t-\vartheta)$ из $M(G, t_0, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$V(x(t-\vartheta), t) \geqslant \gamma \tag{12}$$

то

$$\overline{\lim}\, V(x(x_0(t_0-\vartheta_0), t-\vartheta), t) \leqslant \gamma_0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{13}$$

равномерно относительно начальных кривых их области (9).

Доказательство. Если $V(x(t^*-\vartheta), t^*) \leqslant \gamma$ при $t^* \geqslant t_0 + K(\gamma)$, то, очевидно, по условиям леммы $V(x(t-\vartheta), t) \leqslant \gamma$ при всех $t > t^*$. Пусть γ — некоторое фиксированное число, такое, что $\gamma > \gamma_0$. При $t > t_0 + K(\gamma)$ вдоль траекторий, удовлетворяющих неравенству (12), выполняется условие (11), т. е. вдоль каждой такой траектории функционал V является монотонно убывающей функцией времени $V(x_0, t)$. Монотонная функция V имеет почти всюду производную [6], причем вследствие (11)

$$dV/dt < -a(\gamma)$$

По теореме об интегрировании неравенств для интеграла Лебега [6]

$$V(x_0, t) - V(x_0, t_0 + K(\gamma)) < \int\limits_{t_0+K(\gamma)}^{t} (-a(\gamma))\, d\eta \tag{14}$$

при $t > t_0 + K(\gamma)$ вдоль траекторий, для которых справедливо неравенство (12). Из оценки (14) следует, что

$$\overline{\lim}\, V(x_0, t) \leqslant \gamma \qquad \text{при } t \to \infty$$

Так как число γ можно выбрать сколь угодно близким к числу γ_0, то лемму можно считать доказанной. Заметим также, что из оценки (14) следует справедливость утверждения о равномерности (13) в области (9).

Теорема 1. Невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво и начальные кривые (9) лежат в области притяжения невозмущенного движения, если существует функционал $V(y(-\tau), t)$, определенный на функциях $y(-\tau)$, которые заданы для значений $0 \leqslant \tau \leqslant h_1$, $h_1 \leqslant h$, и удовлетворяющий следующим условиям.

1. Функционал $V(y(-\tau), t)$ является определенно положительным относительно метрики, определенной нормой

$$\|y(-\tau)\| = \sup |y_i(-\tau)| \qquad \text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant h_1 \tag{15}$$

В дальнейшем функции переменной τ рассматриваются при значениях τ из отрезка $[0, h_1]$.

2. Функционал $V(y(-\tau), t)$ допускает бесконечно малый высший предел на кривых $y(-\tau)$, $\|y(-\tau)\| < H$.

3. Функционал V удовлетворяет неравенству

$$\inf (V(y(-\tau), t))_{G < G_1 \leqslant \|y\| \leqslant H_1 < H} > \sup (V(y(-\tau), t))_{\|y\| \leqslant G} \tag{16}$$

4. Верхний предел $\overline{\lim} (\Delta V / \Delta t)$ $(\Delta t \to +0)$ является определенно отрицательным функционалом (в смысле метрики (3)) на непрерывных кривых $y(t-\vartheta)$, удовлетворяющих неравенству

$$V(y(\xi - \tau), \xi) < f(V(y - \tau), t)) \qquad \text{при } -h + t \leqslant \xi \leqslant t \tag{17}$$

где $f(r)$ — непрерывная монотонная функция, удовлетворяющая неравенству $f(r) > r$ при $r \neq 0$.

Доказательство. Траектории $x(t-\vartheta)$ при начальных данных из области (9) остаются в области (10), так как в тот момент t^*, когда траектория $x(t)$ могла бы впервые покинуть область

$$V \leqslant \inf (V(y(-\tau), t)) \qquad \text{при } \|y(-\tau)\| = G_1$$

вследствие условия 4 теоремы было бы

$$\overline{\lim} \frac{\Delta V}{\Delta t} < 0 \qquad \text{при } \Delta t \to +0$$

так как при этом выполняется неравенство

$$V(x(\xi - \tau), \xi) \leqslant V(x(t - \tau), t) \qquad (\xi \leqslant t)$$

Следовательно, каждая траектория $x(t-\tau)$ при всех $t \geqslant t_0$ лежит в области $\|x(t-\vartheta)\| \leqslant G_1 < H$.

Теперь (опираясь на лемму) для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого числа $\gamma > 0$ существует число $K(\gamma)$ такое, что при $t > t_0 + K(\gamma)$ семейство кривых $x(t-\vartheta)$, удовлетворяющих условию (17), включает в себя все интегральные кривые $x(t-\vartheta)$, которые удовлетворяют неравенству $V(x(t-\vartheta), t) \geqslant \gamma$. Это утверждение справедливо для $\gamma_1 > \inf(V(y(-\tau), t))$ при $\|y(-\tau)\| = H_1$, так как согласно доказанному выше множество интегральных кривых, удовлетворяющих неравенству $V(x(t-\tau), t) \geqslant \gamma_1$, — пусто.

Пусть γ_0 — нижняя грань тех значений γ, для которых утверждение справедливо. Тогда можно указать число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$f(r) - r > 2\varepsilon \qquad \text{при } \gamma_0 - \varepsilon < r < \gamma_0 + \varepsilon \quad (\varepsilon < \gamma_0)$$

По лемме существует число N такое, что

$$V(x(x_0(t_0 - \vartheta_0), t - \tau), t) < \gamma_0 + \varepsilon \qquad \text{при } t > t_0 + N$$

для всех начальных кривых $x_0(t_0 - \vartheta_0)$ из (9).

Следовательно, интегральные кривые $V(x(t-\tau), t) \geqslant \gamma_0 - \varepsilon$ при $t > t_0 + N + h$ удовлетворяют условию

$$V(x(\xi - \tau), \xi) < \gamma_0 + \varepsilon < f(\gamma_0 - \varepsilon) \leqslant f(V(x(t-\tau), t))$$

т. е. число $N + h$ таково, что на кривых

$$V(x(t-\tau), t) \geqslant \gamma_0 - \varepsilon \qquad \text{при } t > t_0 + N + h$$

выполняется условие (11) леммы. Это противоречит выбору γ_0 как нижней грани чисел, удовлетворяющих условию (11) леммы.

Противоречие доказывает теорему.

Теорему целесообразно применять в тех случаях, когда на отрезке $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$ можно выделить меньший отрезок $0 \leqslant \tau = \vartheta \leqslant h_1\,(h_1 < h)$, который имеет определяющее значение для устойчивости. В частном случае $h_1 = 0$ теорема 1 читается следующим образом.

Теорема 2. Невозмущенное движение $x = 0$ асимптотически устойчиво и начальные кривые (9) лежат в области притяжения невозмущенного движения, если существует функция Ляпунова $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенно положительная, допускающая бесконечно малый высший предел и удовлетворяющая следующим условиям.

1. Нижнее значение функции

$$\inf (V(x, t))_{\text{при}\, G < G_1 \|x_j\| \leqslant H_1 < H} > \sup (V(x, t))_{\|x_j\| < G}$$

2. Производная dV/dt в силу уравнений (1) является определенно отрицательным функционалом на всех непрерывных кривых, удовлетворяющих условию

$$V(x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi), \xi) < f)(V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)) \qquad \text{при } -h + t \leqslant \xi < t$$

где $f(r)$ — непрерывная монотонная функция, удовлетворяющая неравенству $f(r) > r$ при $r \neq 0$.

Эта теорема подобна теореме Б. С. Разумихина [3] [1].

Рассмотрим примеры использования сформулированных теорем.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = Y_i(x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau), t) + X_i(x_1(t-\vartheta), \ldots, x_n(t-\vartheta), t) \qquad (18)$$

где функционалы Y_i определены на функциях $y_i(-\tau)$ при $y_i\,(-0 \leqslant \tau \leqslant h_1)$, X_i — на функциях $y_i(-\vartheta)$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant h$ $(h_1 < h)$. Если решения системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau), t) \qquad (19)$$

удовлетворяют условию

$$\|y(y_0(t_0-\tau_0), t-\tau)\| < B\|y_0(t_0-\tau_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (B, \alpha = \text{const} > 0) \qquad (20)$$

то можно указать постоянную $a > 0$ такую, что решение $x = 0$ уравнений (18) также будет асимптотически устойчивым при условии, что выполняется неравенство

$$|X_i(x(-\vartheta), t)| < a\|x(-\vartheta)\| \qquad (21)$$

Для доказательства заметим, что при условиях (20) существует функционал $V(y(-\tau), t)$, удовлетворяющий условиям [7]

$$V(y(-\tau), t) > c_1\|y(-\tau)\|, \qquad V(y(-\tau), t) < c_2\|y(-\tau)\|$$

$$\left(\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(19)} < -c_3\|y(t-\tau)\|, \; |V(y, t) - V(y^*, t)| < c_4\|y - y^*\| \qquad (22)$$

$$(c_{1,2,3,4} = \text{const} > 0)$$

Вычисляя $\overline{\lim}\,(\Delta V/\Delta t)$ в силу (18) и учитывая (21), получим оценку

$$\left(\overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(19)} \leqslant -c_3\|x(t-\tau)\| + Ma\|x(t-\vartheta)\|\,(M = \text{const}) \qquad (23)$$

---

[1] Автор считает своим долгом отметить весьма полезное для него обсуждение с Б. С. Разумихиным рассматриваемых здесь вопросов.

Из оценки (23) следует справедливость нашего утверждения, так как достаточно выбрать $a < c_3c_1 / c_2M$, чтобы выполнялись условия теоремы 1. Заметим, что оценка числа a не зависит от величины h. Следствием приведенного утверждения является следующий факт. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) + \varphi_i(x_1(t - h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t - h_{in}(t)), t) \tag{24}$$

Если решения системы уравнений $dx_i / dt = X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяют условиям

$$|x_i(x_{j0}, t_0, t)| < B(|x_{10}| + \ldots + |x_{n0}|)\, e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad ((t \geqslant t_0), \alpha > 0, B > 0)$$

то можно указать число $a > 0$ такое, что решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений (24) также будет асимптотически устойчивым, если

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < a(|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

каковы бы ни были кусочно-непрерывные функции $h_{ij}(t)$.

В конкретных задачах оценка числа a зависит от того, насколько удачно выбрана функция Ляпунова V для вспомогательной, укороченной системы уравнений. (Если, в частности, функции X_i линейные с постоянными коэффициентами, то в качестве функции V целесообразно выбирать квадратичную форму).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t - h(t)), t) \qquad (0 \leqslant h(t) \leqslant h) \tag{25}$$

где функция $f(x, t)$ имеет непрерывную производную f_x', удовлетворяющую неравенству $|f_x'| < L$. Записывая уравнение (25) в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) - \int_{t-h(t)}^{t} f_x' f(x(\vartheta - h(\vartheta)), \vartheta)\, d\vartheta$$

и, применяя функцию $V(x) = {}^1/_2\, x^2$, получим

$$\frac{dV}{dt} \leqslant xf(x, t) + \left| x \int_{t-h(t)}^{t} f_x' f(x(\vartheta - h(\vartheta)), \vartheta)\, d\vartheta \right| <$$
$$< xf(x, t) + L^2 h(t)\, |x|\, \| x(t - \xi) \|_{0 \leqslant \xi \leqslant 2h}$$

Для выполнения условий теоремы 2 достаточно выполнения неравенства

$$\frac{f(x, t)}{x} + L^2 h(t) < -\varepsilon$$

(ε — сколь угодно малая положительная постоянная). Последнее неравенство и дает достаточные условия асимптотической устойчивости.

Поступила 17 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
2. Красовский Н. Н. О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени. ПММ, т. 20, вып. 3, 1956.
3. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием. ПММ, т. XX, в.4, 1956.
4. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. Гостехиздат, 1955.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
6. Рисс Ф. и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу. ИИЛ, 1954.
7. Красовский Н. Н. Обращение теорем второго метода А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению. ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.