Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Б. С. Разумихин

(Москва)

1. В работе рассматривается асимптотическая устойчивость тривиального решения системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau)) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))$ — непрерывный и ограниченный в области $t \geqslant t_0$, $|x_j| < H$, где H—постоянная,функционал, зависящий от времени, координат и mn функций $x_{jk}(t-\tau)$ $(j = 1, \ldots n;\ k = 1, \ldots, m)$, обращающийся в нуль, когда $x_j(t) = 0$, $x_{jk}(t-\tau) = 0$.

При этом функционалы X зависят от значений функций $x_{jk}(t-\tau)$ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant h_{jk}(t)$. Функции $h_{jk}(t)$ предполагаются положительными и ограниченными, т. е. $0 \leqslant h_{jk}(t) \leqslant h$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$, h — постоянная.

Функционал $X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))$ называется непрерывным [1], если для всякого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta(\varepsilon, t)$ такое, что

$$|X_i(t; x_j^{(1)}(t), x_{jk}^{(1)}(t-\tau)) - X_i(t; x_j^{(2)}(t), x_{jk}^{(2)}(t-\tau))| < \varepsilon$$
$$\text{при} \quad \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \leqslant \delta(\varepsilon, t)$$

где $|x| = \sup|x_{jk}(t-\tau)|$ при $j = 1, \ldots, n;\ \ k = 1, \ldots, m;\ \ 0 \leqslant \tau \leqslant h_{jk}(t)$.

Если число δ не зависит от t, функционал называется равномерно непрерывным.

Системы дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_1(t), \ldots, x_n(t); x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

рассмотрены Н. Н. Красовским [2], который ввел определение знакоопределенного функционала и распространил на системы с запаздыванием основные теоремы прямого метода Ляпунова. Поскольку в настоящее время не существует эффективных методов построения функционалов, обладающих свойствами, аналогичными функциям Ляпунова, представляет интерес вопрос о возможности исследования устойчивости тривиального решения систем вида (1.1) при помощи функций Ляпунова. Это позволит использовать при исследовании устойчивости систем с запаздыванием методы построения функций Ляпунова, разработанные в настоящее время для обычных систем уравнений возмущенного движения.

Функция Ляпунова, очевидно, является частным случаем знакоопределенного функционала, и можно формулировать частный случай теоремы, предложенной Н. Н. Красовским [2].

Теорема 1. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная, допускающая бесконечно малый высший предел функция V и такая, что ее производная dV/dt в силу системы дифференциальных уравнений возмущенного движения является знакоопределенным функционалом противоположного с V знака, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Условия этой теоремы являются весьма жесткими достаточными условиями асимптотической устойчивости и могут быть выполнены лишь для весьма узкого класса систем. Например, в случае уравнения первого порядка функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, не существует, если асимптотическая устойчивость имеет колебательный характер.

Таким образом, формальное распространение теоремы Ляпунова на системы с запаздыванием может привести лишь к выводу о незначительной эффективности метода Ляпунова в применении к системам с запаздыванием [3].

2. Будем рассматривать непрерывные, обладающие ограниченными непрерывными частными производными знакоопределенные в области $t \geqslant t_0, |x_j| < H$ функции $V(t; x_1, \ldots, x_n)$.

Производная такой функции в силу системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.1) представляет собой непрерывный функционал

$$U(t;\, x_j(t);\, x_{jk}(t-\tau)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k(t;\, x_j(t),\, x_{jk}(t-\tau)) \qquad (2.1)$$

Функционал (2.1), очевидно, имеет смысл и тогда, когда он определен на множестве кривых, вообще говоря, не являющихся интегральными кривыми системы (1.1), отвечающими некоторому множеству начальных кривых $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ при $t \leqslant t_0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать функционал $U(t;\, y_j(t);\, y_{jk}(t-\tau))$, формально определенный равенством (2.1), в котором выполнена замена решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ некоторой системой непрерывных функций [1] $y_1(t), \ldots, y_n(t)$. В силу непрерывности функционала (2.1) существует положительное число L такое, что справедливо неравенство [2]

$$U(t;\, y_1^{(1)}(t);\, y_{jk}^{(1)}(t-\tau)) - U(t;\, y_j^{(2)}(t);\, y_{jk}^{(2)}(t-\tau)) < L\,|\,y^{(1)} - y^{(2)}| \qquad (22)$$

где $y_1^{(1)}(\sigma), \ldots, y_n^{(1)}(\sigma)$ и $y_1^{(2)}(\sigma), \ldots, y_n^{(2)}(\sigma)$ — две непрерывные линии лежащие при $t - h \leqslant \sigma \leqslant t$ в области $|y_j| < H$ $\quad (j = 1, \ldots, n)$.

Примем следующее определение [2]. Функционал $U(t;\, y_j(t);\, y_{jk}(t-\tau))$ называется знакоопределенным, если существует непрерывная функция, $\varphi(r)$, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(r) > 0$ при $r \neq 0$ и такая, что в области $t \geqslant T$, $|y_j(t)| < H$, где T достаточно большое, а H доста-

---

[1] Это значит, что мы будем рассматривать значения производной функции V в момент времени t вдоль интегральной кривой, отвечающей системе начальных функций $y_1(\sigma), \ldots, y_n(\sigma)$ при $\sigma \leqslant t$.

[2] Дальнейшие рассуждения справедливы, если правые части системы (1.1) непрерывны по t и удовлетворяют условиям Липшица по другим аргументам.

точно малое числа, либо $U(t; y_j(t); y_{jk}(t-\tau)) \geqslant \varphi(|y(t)|)$, либо $U(t; y_j(t), y_{jk}(t-\tau)) \leqslant -\varphi(|y(t)|)$.

В первом случае функционал называется определенно-положительным, во втором определенно-отрицательным. В силу свойств функции V и правых частей системы (1.1) $U(t; 0, 0) = 0$.

Теорема 2. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

таковы, что существует определенно-положительная функция $V(t; x_1, \ldots x_n)$, производная которой $dV/dt = U(t; x_j(t); x_{jk}(t-\tau))$ в силу этих уравнений является функционалом $U(t; x_j(t); x_{jk}(t-\tau))$ отрицательным или тождественно равным нулю вдоль всякого решения, удовлетворяющего условию $V(\sigma; x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)) \leqslant V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при всяких значениях $t \geqslant t_0$ и $\sigma \leqslant t$, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. Пусть ε — произвольно малое положительное число. Определим постоянное число C условием $C < \operatorname{Inf} V(t; x_1, \ldots, x_n)$ для всяких значений $t > t_0$ на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий [4] и знакоопределенности функции V существует столь малое положительное число $\delta(T_1)$, что если начальные функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ удовлетворяют условию $\varphi_1^2(t) + \ldots + \varphi_n^2(t) < \delta(T_1)$ при $t \leqslant t_0$, то соответствующее решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ удовлетворяет условию

$$V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant C \qquad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T_1$$

где $T_1 \geqslant t_0 + 2h$ — конечное число.

Покажем, что при условиях теоремы для всякого решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, отвечающего системе начальных функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, удовлетворяющих условию $\varphi_1^2(t) + \ldots + \varphi_n^2(t) < \delta(T_1)$, справедливо при всяком $\geqslant t_0$ условие

$$V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant C \tag{2.3}$$

Действительно, если это не так, то по крайней мере для одного решения из указанных выше существует число $T_2 > T_1$ и сколь угодно близкое к C число $C_1 \geqslant C$ такие, что справедливы неравенства

$$V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) > C_1 \quad \text{при } T_2 - \theta > t > T_1$$

$$V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) < C_1 \quad \text{при } t < T_2 \qquad [dV/dt]_{t=T_2} > 0 \tag{2.4}$$

где θ — достаточно малое фиксированное положительное число. Но, в силу теоремы,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=T_2} = U(T_2; x_j(T_2), x_{jk}(T_2 - \tau)) \leqslant 0 \tag{2.5}$$

Полученное противоречие с условиями (2.4) показывает справедливость утверждения, т. е. справедливость условия (2.3), из которого в силу выбора числа C следует неравенство $x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$.

Теорема доказана. Справедлива также теорема об асимптотической устойчивости систем вида (1.1).

Теорема 3. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t;\, x_j(t);\, x_{jk}(t-\tau)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

таковы, что существует определенно-положительная, допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t;\, x_1, \ldots, x_n)$, производная которой $dV/dt = U(t;\, x_j(t),\, x_{jk}(t-\tau))$ является функционалом, определенно-отрицательным вдоль всякого решения, удовлетворяющего условию $V(\sigma;\, x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)) \leqslant V(t;\, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ при всяких значениях $t \geqslant t_0$ и $\sigma \leqslant t$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Доказательство. Пусть c — столь малое положительное число, что для всяких $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $V(t;\, x_1, \ldots, x_n) \leqslant c$ при всяком $t \geqslant t_0$, выполнены условия $|x_j| < H$, и пусть $\bar{c}$ — точная верхняя грань таких чисел c.

Так как $V(t;\, x_1, \ldots, x_n)$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел, то для всякого положительного $c < \bar{c}$ существует число δ такое, что из условия $|x_j| < \delta$ $(j = 1, \ldots, n)$ следует $V(t;\, x_1, \ldots, x_n) < c$ при всяком $t \geqslant t_0$. В силу теоремы о зависимости решений от начальных условий [4] для всякого положительного числа $T_1 \geqslant t_0 + 2h$ и всякого положительного числа $c < \bar{c}$ возможно указать столь малое положительное число η, что если начальные функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ при $t \leqslant t_0$ удовлетворяют условию $|\varphi_j(t)| < \eta$, то решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ удовлетворяют условию $V(t;\, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant c$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T_1$. Следовательно, если существует интегральная кривая, отвечающая системе начальных функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, удовлетворяющих условию $|\varphi_j(t)| < \eta$ $(j = 1, \ldots, n)$ при $t \leqslant t_0$, такая, что функции $V(T_1;\, x_1(T_1), \ldots, x_n(T_1)) = c$, то она при $t \leqslant T_1$ удовлетворяет условиям теоремы. Поскольку функционал U является определенно-отрицательным на интегральных кривых, допускаемых условиями теоремы, то для $x_1^*, \ldots, x_n^*$, удовлетворяющих условию $V(T_1;\, x_1^*, \ldots, x_n^*) = c$, существует столь малое по абсолютной величине отрицательное число $l(T_1;\, x_1^*, \ldots, x_n^*)$, что для всякой интегральной кривой (если она существует), удовлетворяющей условиям теоремы, имеем неравенство

$$U(T_1;\, x_j(T_1);\, x_{jk}(T_1 - \tau)) \leqslant l(T_1,\, x_1^*, \ldots, x_n^*) \tag{2.6}$$

где

$$x_i(T_1) = x_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

В силу знакоопределенности функции V существует отрицательное число $\lambda(T_1, c) = \sup l(T_1;\, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ при всяких $x_1^*, \ldots, x_n^*$, удовлетворяющих условию $V(T_1;\, x_1^*, \ldots, x_n^*) = c$.

Пусть далее c_1 — положительное число, удовлетворяющее условию $0 < c_1 < c$, и пусть $\lambda_1(T_1, c_1) = \sup l(T_1;\, x_1, \ldots, x_n)$ на поверхности $V(T_1;\; x_1, \ldots, x_n) = c_1$. Тогда функционал $U(T_1;\; z_j(T_1);\; z_{jk}(T_1 - \tau))$ в силу (2.2) будет определенно-отрицателен вдоль всякой кривой $z_1(t), \ldots, z_n(t)$, удовлетворяющей условию

$$|x_j(t) - z_j(t)| < \frac{|\lambda_1(T_1,\, c_1)|}{L} \qquad (j = 1, \ldots, n), \qquad t \leqslant T_1 \tag{2.7}$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — произвольное решение системы (1.1), удовлетворяющее условию $V(\sigma; x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)) \leqslant c_1$ при $\sigma \leqslant T_1$ в соответствии с условиями теоремы. На основании (2.7) число c_1 можно выбрать столь близким к c, чтобы функционал U был определенно-отрицательным вдоль всякой интегральной кривой $x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)$, удовлетворяющей условиям

$$
\begin{gathered}
c \geqslant V(T_1; x_1(T_1), \ldots, x_n(T_1)) \geqslant c_1 \quad \text{при } T_1 > t_0 + 2h \\
V(\sigma; x_1(\sigma), \ldots, x_n(\sigma)) \leqslant c \quad \text{при } \sigma < T_1
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Например, число c_1 может быть определено условием, чтобы верхняя грань наибольшей толщины слоя $c \geqslant V(\sigma; z_1, \ldots, z_n) \geqslant c_1$ при $\sigma > t_0$ равнялась $\frac{1}{2}|\bar{\lambda}_1|/L$, где $\bar{\lambda}_1 = \sup U(T; z_j(T); z_k(T-\tau))$ в области

$$
\begin{gathered}
c \geqslant V(T_1; z_1(T_1), \ldots, z_n(T_1)) \geqslant c_1 \quad \text{при } T_1 > t_0 + 2h \\
V(\sigma; z_1(\sigma), \ldots, z_n(\sigma)) \leqslant c \quad \text{при } \sigma < T
\end{gathered}
$$

Из уравнения $dV/dt = U$ следует

$$
V(T_1 + \theta) - V(T_1) = \int_{T_1}^{T_1+\theta} U\,dt \tag{2.9}
$$

Для $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию $c > V(t; x_1, \ldots, x_n) > c_1$ при $t \geqslant T_1 \geqslant t_0 + 2h$, справедлива оценка $U \leqslant \bar{\lambda}_1$. Полагая $V(T_1 + \theta_1) = c_1$, получим на основании (2.9) $c_1 - c \leqslant \bar{\lambda}_1\theta_1$ или, так как $\bar{\lambda}_1 < 0$:

$$
\theta_1 \leqslant \frac{c_1 - c}{\bar{\lambda}_1} \tag{2.10}
$$

Таким образом, все решения системы (1.1), отвечающие начальным функциям, удовлетворяющим условиям $|\varphi_j(t)| < \eta$ $(j = 1, \ldots, n)$ при $t \leqslant t_0$, удовлетворяют условиям

$$
\begin{gathered}
V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant c \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T_1 \\
V(T_1 + \theta; x_1(T_1 + \theta), \ldots, x_n(T_1 + \theta)) \leqslant c_1, \quad \text{при } \theta > \theta_1 \left(0 < \theta_1 < \frac{c_1 - c}{\bar{\lambda}_1}\right)
\end{gathered}
$$

При $t > T_1 + \theta_1$ решения не покинут области[1] $V(t; x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_1$. Рассмотрим поведение решений системы (1.1) при $t > T_2 = T_1 + \theta_1 + 2h$. Повторяя аналогичные рассуждения, мы убедимся, что существует число $c_2 < c_1$ и число θ такие, что решения системы (1.1) удовлетворяют условию

$$
V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant c_2 \quad \text{при } t \geqslant T_2 + \theta_2
$$

где

$$
\theta_2 \leqslant \frac{c_2 - c_1}{\bar{\lambda}_1}, \quad \lambda_2 = \sup U(T); z_j(T); z_{jk}(T - \tau)
$$

для всяких кривых, удовлетворяющих условиям

$$
\begin{gathered}
c_1 \geqslant V(T, z_1(T), \ldots, z_n(T)) \geqslant c_2 \quad \text{при } T \geqslant T_2 + \theta_2 \\
V(\sigma; z_1(\sigma), \ldots, z_n(\sigma)) \leqslant c_1 \quad \text{при } \sigma < T
\end{gathered}
$$

Таким образом, мы получим монотонно убывающую последовательность положительных чисел $c, c_1, c_2, \ldots$ Покажем, что пределом этой последовательности является нуль. Действительно, предположим противное,

[1] Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

т. е. $\lim c_k = a > 0$ при $k \to \infty$. Пусть $\overline{\lambda}_k = \sup U((T; z_j(T)); z_{jk}(T-\tau))$ для всяких кривых, удовлетворяющих условиям

$$c_{k-1} \geqslant V(T; z_1(T), \ldots, z_n(T)) \geqslant c_k$$
$$V(\sigma; z_1(\sigma), \ldots, z_n(\sigma)) \leqslant c_{k-1} \quad \text{при } T \geqslant T_k + \theta_k,\ \sigma < T$$

Так как $c_k > a > 0$, то существует в силу знакоопределенности функционала U не зависящее от k отрицательное число μ такое, что при всяком целом и положительном k $\overline{\lambda}_k < \mu < 0$. При этом разность $c_{k-1} - c_k$ определяется аналогично предыдущему условием, чтобы верхняя грань наибольшей толщины слоя $c_{k-1} \geqslant V(\sigma; z_1, \ldots, z_n) \geqslant c_k$ при $\sigma > T_{k-1}$ равнялась $\frac{1}{2}|\overline{\lambda}_k|/L$, но $\overline{\lambda}_k < \mu < 0$, т. е. $|\overline{\lambda}_k| > |\mu|$, и, следовательно, разность $c_{k-1} - c_k$ удовлетворяет условию $c_{k-1} - c_k > \gamma > 0$ при всяких $k = 1, 2, \ldots,$ где γ — не зависящее от k положительное число. Но $c_1, c_2, \ldots$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, т. е. $\lim(c_{k-1} - c_k) = 0$ при $k \to \infty$, что противоречит условию $c_{k-1} - c_k > \gamma > 0$, т. е. предположению, что $\lim c_k = a$ при $k \to \infty$. Противоречие доказывает, что $\lim c_k = 0$ при $k \to \infty$, т. е. асимптотическую устойчивость.

Заменяя требование знакоопределенности функционала $U(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))$ вдоль интегральной линии требованием знакоопределенности этого функционала вдоль произвольной непрерывной кривой $y_1(\sigma), \ldots, \ldots, y_n(\sigma)$, удовлетворяющей условиям

$$y_i(t) = x_i(t) \quad (k = 1, \ldots, n)$$
$$V(\sigma; y_1(\sigma), \ldots, y_n(\sigma)) \leqslant V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad \text{при } \sigma \leqslant t$$

или требованием знакоопределенности функционала $U(t; x_j(t); x_{jk}(t-\tau))$ вдоль некоторого более узкого класса кривых, включающего интегральные кривые системы (1.1), возможно получить ряд достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1).

Из теорем 2 и 3 вытекает справедливость следующих теорем.

Теорема 4. Если для уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_j(t); x_{jk}(t-\tau)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

существует определенно-положительная функция $V(t; x_1, \ldots, x_n)$, производная которой $dV/dt = U(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))$в силу этих уравнений такова, что функционал $U(\sigma; y_j(\sigma); y_{jk}(\sigma-\tau))$ является отрицательным или тождественно равным нулю вдоль всякой кривой $y_1(\sigma), \ldots, y_n(\sigma)$, удовлетворяющей для всякого $t > t_0$ условиям

$$y_i(t) = x_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$V(\sigma; y_1(\sigma), \ldots, y_n(\sigma)) \leqslant V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad \text{при } \sigma \leqslant t$$

то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 5. Если в дополнение к условиям теоремы 4 функция $V(t; x_1, \ldots, x_n)$ допускает бесконечно малый высший предел и функционал $U(\sigma; y_j(\sigma); y_{jk}(\sigma-\tau))$ является определенно-отрицательным, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

3. Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — некоторое решение[1] системы (1.1) и пусть $S_i = \sup|X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))|$ вдоль решения и для всяких значений t в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, где $T > t_0$ — некоторое фиксированное положительное число. Тогда в силу системы (1.1) справедлива оценка

$$|x_i(t_2) - x_j(t_1)| \leqslant S_i|t_2 - t_1| \quad \text{при } t_0 \leqslant t_1 \leqslant T,\ t_0 \leqslant t_2 \leqslant T \tag{3.1}$$

Пусть далее $V(t; x_1, \ldots, x_n)$ — определенно-положительная функция и $c \leqslant \bar{c}$ — некоторое фиксированное положительное число. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий возможно указать столь малое положительное число δ, что всякое решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, отвечающее системе начальных функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, удовлетворяющих условию $\varphi_1^2(t) + \ldots + \varphi_n^2(t) \leqslant \delta(c, T)$, удовлетворяет условию

$$V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant c \qquad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.2}$$

Обозначим $S_i^{(1)}(c)$ точную верхнюю грань значений функционала $|X_i(t; y_j(t), y_{jk}(t-\tau))|$ на множестве непрерывных линий $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, удовлетворяющих условию $V(t; y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqslant c$, и для всяких значений t в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Очевидно, для всякого из указанных выше решений $S_i \leqslant S_i^{(1)}$ и для функциий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ справедлива оценка

$$|x_i(t_2) - x_i(t_1)| \leqslant S_i^{(1)}(c)|t_2 - t_1| \qquad \text{при } t_0 \leqslant t_1 \leqslant T,\ t_0 \leqslant t_2 \leqslant T \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Пользуясь условиями (3.2) и (3.3), можно получить более точную оценку для решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, отвечающего системе начальных функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi_1^2(t) + \ldots + \varphi_n^2(t) \leqslant \delta(c, T)$$

Действительно, пусть $S_i^{(2)}$ — число, определяемое условием

$$S_i^{(2)}(c) = \sup|X_i(t; y_j(t), y_{jk}(t-\tau))|$$

на множестве непрерывных линий $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} V(t; y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqslant c, \qquad |y_i(t_2) - y_i(t_1)| \leqslant S_i^{(1)}(c)|t_2 - t_1| \\ y_i(T) = x_i(T) \quad (i = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{3.4}$$

при всяких значениях t, удовлетворяющих условию $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и всяких t_1 и t_2, удовлетворяющих условиям $t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$ и $t_0 \leqslant t_2 \leqslant T$.

Так как решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1.1) в силу условий (3.2) и (3.3) принадлежит к классу линий, удовлетворяющих условиям (3.4), и линии, удовлетворяющие условиям (3.4), принадлежат к классу линий, удовлетворяющих условию $V(t; y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqslant c$, то справедливо неравенство $S_i \leqslant S_i^{(2)} \leqslant S^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и, следовательно, справедлива оценка

$$\begin{gathered} |x_i(t_2) - x_i(t_1)| \leqslant S_i^{(2)}(c)|t_2 - t_1| \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ (t_0 \leqslant t_1 \leqslant T,\ t_0 \leqslant t_2 \leqslant T) \end{gathered} \tag{3.5}$$

[1] Функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ предполагаются при $t \leqslant T$ удовлетворяющими условиям $|x_i(t)| < H$, что ограничивает нормы начальных функций.

Продолжая аналогичные рассуждения, можно получить дальнейшие уточнения оценки: (3.6)

$$|x_i(t_2) - x_i(t_1)| \leqslant S_i^{(k)}(c)\,|t_2 - t_1| \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (t_0 \leqslant t_1 \leqslant T,\ t_0 \leqslant t_2 \leqslant T)$$

где $S_i^{(k)}(c) = \sup|X_i(t; y_j(t), y_{jk}(t-\tau))|$ на множестве непрерывных линий, удовлетворяющих условиям

$$V(t; y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqslant c, \qquad |y_i(t_2) - y_i(t_1)| \leqslant S_i^{(k-1)}(c)\,|t_2 - t_1|$$
$$y_i(T) = x_i(T) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (t_0 \leqslant t_1 \leqslant T,\ t_0 \leqslant t_2 \leqslant T,\ t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

Очевидно, аналогично предыдущему справедливы неравенства

$$S_i \leqslant S_i^{(k)} \leqslant S_i^{(k-1)} \ldots \leqslant S_i^{(2)} \leqslant S_i^{(1)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Числа $S_i^{(1)}, \ldots, S_i^{(k)}$ определяются независимо от решений системы (1.1), и, пользуясь оценками вида (3.6), можно формулировать ряд достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1).

Теорема 6. Если уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

таковы, что существует определенно-положительная функция $V(t; x_1, \ldots, x_n)$, производная которой $dV/dt = U(t; x_j(t), x_{kj}(t-\tau))$ в силу этих уравнений такова, что функционал $U(\sigma; y_j(\sigma), y_{kj}(\sigma-\tau))$ является отрицательным или тождественно равным нулю вдоль всякой кривой, удовлетворяющей для всякого $t > t_0$ условиям

$$y_i(t) = x_i(t), \quad V(\sigma; y_1(\sigma), \ldots, y_n(\sigma)) \leqslant V(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad \text{при } \sigma \leqslant t$$
$$|y_i(\sigma_2) - y_i(\sigma_1)| \leqslant S_i^{(k)}\,|\sigma_2 - \sigma_1| \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$(t_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant t,\ t_0 \leqslant \sigma_2 \leqslant t)$$

то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 7. Если дополнительно к условиям теоремы 6 функция V допускает бесконечно малый высший предел и функционал U является определенно-отрицательным, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Доказательства этих предположений аналогичны доказательствам теорем 2 и 3.

4. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие эффективность метода Ляпунова в применении к системам с запаздыванием.

Пример 1. Определить условие устойчивости нулевого решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), \mu x(t-\xi)) \tag{4.1}$$

где

$$f(0, 0) = 0, \qquad \frac{f(x, 0)}{x} = -a \quad (a > 0), \qquad |f(x, z) - f(x, 0)| < lz \tag{4.2}$$

Рассмотрим знакоопределенную функцию $V = x^2$. В силу уравнения (4.1) будет $dV/dt = 2x f(x, \mu y)$, где $y = x(t-\tau)$. Очевидно, можно записать

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = \frac{f(x, \mu y)}{x} x^2$$

Пользуясь условиями (4.2), получим

$$\frac{f(x, \mu y)}{x} = \frac{f(x, \mu y) - f(x, 0)}{x} + \frac{f(x, 0)}{x} < \frac{l\,|\mu|\cdot|y|}{x} - a$$

В силу условий теоремы 4 нулевое решение будет устойчивым, если $dV/dt \leqslant 0$ при $|y| < |x|$. Условие $dV/dt \leqslant 0$ эквивалентно $x^{-1} f(x, \mu y) \leqslant 0$. При $|y| < |x|$ имеем

$$\frac{f(x, \mu y)}{x} < \frac{l|\mu| \cdot |y|}{x} - a \leqslant l|\mu| - a$$

Откуда получаем условие устойчивости

$$a \geqslant l|\mu| \tag{4.3}$$

Пример 2. Исследование устойчивости тривиального решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{4.4}$$

где $f(t; x(t), x(t-\tau))$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(t; 0, 0) = 0$.

Предположим, что уравнение (4.4) может быть представлено в виде

$$\frac{dx}{dt} = -a(t, x(t), x(t-\tau))\, x(t) - b(t, x(t), x(t-\tau))\, x(t-\tau) \tag{4.5}$$

где $a(t, x(t), x(t-\tau))$ и $b(t, x(t), x(t-\tau))$ — непрерывные ограниченные функции своих аргументов.

Рассмотрим функцию $V = x^2$. В силу (4.5) имеем

$$\frac{dV}{dt} = -2x[a(t, x, y)\, x + b(t, x, y)\, y] \tag{4.6}$$

Применяя теорему 4, получим достаточное условие устойчивости:

$$x[a(t, x, y)\, x + b(t, x, y)\, y] \geqslant 0 \qquad \text{при } t \geqslant t_0, \ |y| \leqslant |x| \tag{4.7}$$

Полагая $y = kx$, получим вместо условия $|y| \leqslant |x|$ условие $-1 \leqslant k \leqslant 1$. При этом условие (4.7) примет вид:

$$a(t, x, kx) + kb(t, x, kx) \geqslant 0 \qquad \text{при } t \geqslant t_0, \ -1 \leqslant k \leqslant 1 \tag{4.8}$$

Если условие устойчивости (4.8) выполняется при всяких значениях x, то тривиальное решение уравнения (4.4) устойчиво при сколь угодно больших значениях начальной функции. В противном случае условие (4.8) определяет область допустимых значений начальной функции. Из условия (4.8), очевидно, следуют условия

$$a(t, x, kx) \geqslant 0, \qquad |b(t, x, kx)| \leqslant a(t, x, kx) \qquad \text{при } t \geqslant t_0, \ -1 \leqslant k \leqslant 1$$

Пользуясь теоремой 6, можно получить менее жесткие условия устойчивости Действительно, в силу теоремы 6 устойчивость тривиального решения уравнения (4.5) будет иметь место при условии

$$-\frac{dV}{dt} = x[a(t, x, y)\, x + b(t, x, y)\, y] \geqslant 0 \tag{4.9}$$

в области значений аргументов, определяемой неравенствами

$$t \geqslant t_0, \quad |y| \leqslant |x|, \quad |x - y| \leqslant S^{(k)} \tau$$

При $k = 1$ функция $S^{(1)}(t, x)$ определяется равенством

$$S^{(1)}(t, x) = \sup |a(\sigma, \xi, \eta)\, \xi + b(\sigma, \xi, \eta)\, \eta| \tag{4.10}$$

в области $t - \tau \leqslant \sigma \leqslant t$, $|\eta| \leqslant |\xi|$, $|\xi| \leqslant |x|$.

Полагая $y = kx$, где k — новая переменная, и обозначая

$$\Phi^{(1)}(t, x) = \frac{S^{(1)}(t, x)}{|x|}$$

получим из (4.9) при $k = 1$ условие устойчивости тривиального решения системы (4.5) в виде

$$a(t, x, kx) + kb(t, x, kx) \geqslant 0 \tag{4.11}$$

в области $t \geqslant t_0$ $-1 \leqslant k \leqslant 1$, $1 - \Phi^{(1)}(t, x)\, \tau \leqslant k \leqslant 1$.

Тривиальное решение уравнения (4.5) устойчиво при сколь угодно больших значениях начальной функции, если условие (4.11) выполняется для всяких значений x. В противном случае условие (4.11) определяет область допустимых значений начальной функции. Применяя оценку (3.5), получим уточнение области устойчивости.

Функция $S^{(2)}(t, x)$ определяется равенством

$$S^{(2)}(t, x) = \sup |a(\sigma, \xi, \eta)\xi + b(\sigma, \xi, \eta)\eta| \qquad (4.12)$$

в области

$$t - \tau \leqslant \sigma \leqslant t, \quad |\xi| \leqslant |x|, \quad |\eta| \leqslant |x|$$
$$|x - \xi| \leqslant S^{(1)}(t, x)|t - \sigma|, \qquad |\xi - \eta| \leqslant S^{(1)}(t, x)\tau$$

Полагая аналогично предыдущему $y = kx$ и обозначая [1]

$$\Phi^{(2)}(t, x) = \frac{S^{(2)}(t, x)}{|x|}$$

имеем из (4.9) ($k = 2$) условие устойчивости тривиального решения уравнения (4.5):

$$a(t, x, kx) + kb(t, x, kx) \geqslant 0 \qquad (4.13)$$

при $t \geqslant t_0$, $-1 \leqslant k \leqslant 1$, $1 - \Phi^{(2)}(t, x)\tau \leqslant k \leqslant 1$

Дальнейшие уточнения ($k = 3, 4, \ldots$) условий устойчивости очевидны.

Рассмотрим один частный случай уравнения (4.5) ($a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$).

Пример 3. Определить в плоскости параметров a и b область устойчивости нулевого решения уравнения

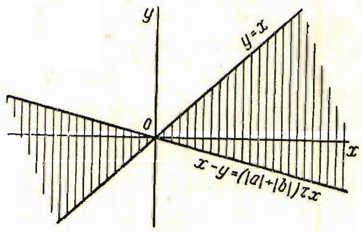
$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - bx(t - \tau) \qquad (4.14)$$

Рассмотрим определенно-положительную функцию $V = x^2$. Ее производная dV/dt в силу уравнения (4.14) будет

$$\frac{dV}{dt} = -2x(ax + by), \qquad y = x(t - \tau) \qquad (4.15)$$

Применяя теорему 4, получим условие устойчивости

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0 \qquad \text{при } |y| \leqslant |x|$$



Фиг. 1

При этом получаем следующие достаточные условия устойчивости нулевого решения (4.14) (фиг. 4):

$$a > 0, \quad |b| \leqslant a \qquad (4.16)$$

Согласно теореме 6 [используя оценку (3.3)] для устойчивости достаточно выполнения условия $dV/dt \leqslant 0$ для всяких значений y, удовлетворяющих совместным условиям, которые в рассматриваемом случае принимают вид:

$$|y| \leqslant |x|, \quad |y - x| \leqslant S^{(1)}(x)\tau = (|a| + |b|)|x|\tau \qquad (4.17)$$

так как $S^{(1)}(x) = \sup |a\xi + b\eta|$ в области $|\xi| \leqslant |x|$, $|\eta| \leqslant |x|$.

Нулевое решение уравнения (4.14) устойчиво, если в области значений x и y, определяемой неравенствами (4.17) (фиг. 1), выполнено условие $ax^2 + bxy \geqslant 0$.

Полагая $y = kx$, где на основании (4.17) переменная k удовлетворяет условиям

$$-1 \leqslant k \leqslant 1, \qquad 1 - (|a| + |b|)\tau \leqslant k \leqslant 1 \qquad (4.18)$$

получим условие $a + kb \geqslant 0$ при значениях k, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам (4.18), определяющее область устойчивости (фиг. 4) в плоскости ab.

Используя более точную оценку (3.5), получим уточнение области устойчивости. При этом в силу теоремы 6 для устойчивости достаточно выполнения условия $dV/dt \leqslant 0$ для всяких значений y, удовлетворяющих условиям

$$|y| \leqslant |x|, \qquad |y - x| \leqslant S^{(2)}(x, \tau)\tau \qquad (4.19)$$

где $S^{(2)}(x, \tau) = \sup |a\xi + b\eta|$ в области (фиг. 2)

$$\left.\begin{array}{lll} t_0 \leqslant t - \tau \leqslant \sigma \leqslant t, & |\xi| \leqslant |x|, & |\eta| \leqslant |x| \\ |x - \xi| \leqslant S^{(1)}(x)|t - \sigma|, & & |\xi - \eta| \leqslant S^{(1)}(x)\tau \end{array}\right. \qquad (4.20)$$

[1] Очевидно, при условиях ограниченности функций $a(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$ и условии $|y| \leqslant |x|$ функции $\Phi^{(1)}(t, x)$ и $\Phi^{(2)}(t, x)$ ограничены в окрестности $x = 0$.

Легко убедиться, что $S^{(2)}(x, \tau)$ имеет следующие значения

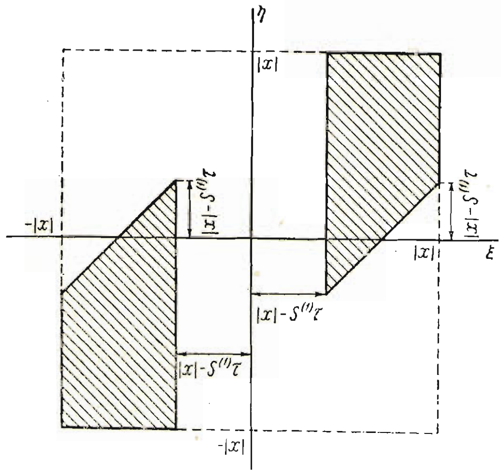
$$
S^{(2)}(x;\tau) = \begin{cases} (a+b)\,|x| & \text{при } a>0,\ b>0 \\ -(a+b)\,|x| & \text{при } a<0,\ b<0 \\ [a+b-b\tau(a-b)]\,|x| & \text{при } a>0,\ b<0,\ a+b>0 \\ -[a+b-a\tau(a-b)]\,|x| & \text{при } a>0,\ b<0,\ a+b<0 \\ [a+b+a\tau(a-b)]\,|x| & \text{при } a<0,\ b>0,\ a+b>0 \\ -[a+b+b\tau(a-b)]\,|x| & \text{при } a<0,\ b>0,\ a+b<0 \end{cases} \tag{4.21}
$$

Для устойчивости нулевого решения уравнения (4.14) достаточно выполнения условия

$$
-\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = ax^2 + bxy \geqslant 0 \tag{4.22}
$$

в области значений x и y, определяемой неравенствами (4.19) (фиг. 3).

Область устойчивости, получаемая при этом элементарными вычислениями, изображена на фиг. 4.



Фиг. 2

5. Возможно предложить также более точные оценки для решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1.1), удовлетворяющего при $t \leqslant T$ условию $V(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant V(T, x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = c$, где $T \geqslant t_0 + 2h$.

Использование таких оценок в силу изложенного выше очевидно. Например, если $T, x_1^*, \ldots, x_n^*$ — числа такие, что $V(T, x_1^*, \ldots, x_n^*) = c < \bar{c}$ и $T \geqslant t_0 + 2h$, и если существуют интегральные линии $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1.1), удовлетворяющие условиям

$$
x_i(T) = x_i^* \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant V(T, x_1^*, \ldots, x_n^*) = c \quad \text{при } t \leqslant T
$$

то они принадлежат множеству непрерывных линий $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$, удовлетворяющих условиям

$$
y_i(T) = x_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n)
$$

$$
V(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqslant V(T, x_1^*, \ldots, x_n^*) = c \tag{5.1}
$$

$$
\left|\frac{dy_i}{dt}\right| \leqslant |X_i(t, y_j(t), y_{jk}(t-\tau))| \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при } t \leqslant T
$$

Аналогично теоремам 2 и 3 доказывается следующая теорема.

Теорема 8. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.1) таковы, что существует определенно-положительная функция $V(t; x_1, \ldots, x_n)$, производная которой в силу этих уравнений $U(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))$ такова, что функционал $U(t; y_j(t), y_{jk}(t-\tau))$ является отрицательным или тождественно равным нулю вдоль всякой кривой, удовлетворяющей условиям (5.1), то невозмущенное движение устойчиво. Если, кроме того, функция V допускает бесконечно малый высший предел и функционал $U(t; y_j(t), y_{jn}(t-\tau))$ определенно-отрицателен, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Пример 4. Рассмотрим устойчивость нулевого решения уравнения

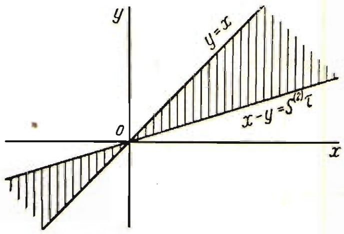
$$dx/dt = -x(t-h) \tag{5.2}$$

Примем в качестве функции Ляпунова $V = \frac{1}{2}x^2$. Тогда в силу уравнения (5.2)

$$dV/dt = -x(t)\,x(t-h) \tag{5.3}$$

Условием асимптотической устойчивости будет

$$\begin{aligned} x(t-h) &> 0 \quad \text{при } x(t) > 0 \\ x(t-h) &< 0 \quad \text{при } x(t) < 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$



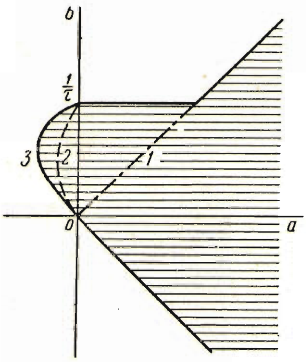
Фиг. 3

Пусть $x(t) > 0$ и область, занимаемая допустимыми в силу условий (5.1) кривыми, определяется неравенствами

$$\begin{aligned} x(t) \geqslant y(\sigma) &\geqslant f(\sigma) \quad \text{при } t \geqslant \sigma \geqslant \sigma_1 \\ x(t) \geqslant y(\sigma) &\geqslant -x(t) \quad \text{при } \sigma \leqslant \sigma_1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $f(\sigma_1) = -x(t)$ и $f(t) = x(t)$.

Наибольшее значение $h = h_0$ определяется, очевидно, из условия $f(t-h_0) = 0$. Таким образом, задача сводится к нахождению функции $f(\sigma)$. В силу (5.1) и (5.5)



Фиг. 4

$$\frac{df}{d\sigma} = \sup(-y(\sigma-h_0)) = \begin{cases} x(t) & \text{при } \sigma \leqslant \sigma_1 + h_0 \\ -f(\sigma-h_0) & \text{при } \sigma \geqslant \sigma_1 + h_0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Положим $f(\sigma) = f_1(\sigma)$ при $\sigma \leqslant \sigma_1 + h_0$ и $f(\sigma) = f_2(\sigma)$ при $\sigma \geqslant \sigma_1 + h_0$. Тогда будем иметь

$$\frac{df_1}{d\sigma} = x(t), \qquad \text{или} \qquad f_1(\sigma) = x(t)(\sigma + c_1)$$

Так как $f_1(t-h_0) = x(t)(t-h_0+c_1)$ при $\sigma = t-h_0$, то $c_1 = h_0 - t$ и таким образом

$$f_1(\sigma) = x(t)(\sigma + h_0 - t) \tag{5.7}$$

Далее $f_1(\sigma_1) = x(t)(\sigma_1 + h_0 - t) = -x(t)$, следовательно, $\sigma_1 = t - h_0 - 1$ и $\sigma_1 + h_0 = t - 1$. Функция $f_2(\sigma)$ в силу (5.6) и (5.7) определяется из уравнения

$$df_2/d\sigma = -f_1(\sigma - h_0) \text{ или } df_2/d\sigma = -x(t)(\sigma - t)$$

Интегрируя, находим

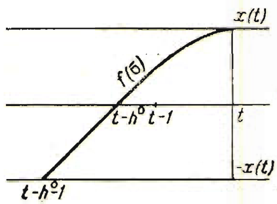
$$f_2(\sigma) = -x(t)\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - t\sigma + c_2\right)$$

Из условия непрерывности $f_1(t-1) = f_2(t-1)$ находим для c_2 значение

$$c_2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} - h_0$$

Итак (фиг. 5),

$$f(\sigma) = \begin{cases} x(t)(\sigma + h_0 - t)\frac{1}{1} & \text{при } \sigma \leqslant t-1 \\ -x(t)\left[\frac{1}{2}(\sigma-t)^2 - h_0 + \frac{1}{2}\right] & \text{при } \sigma > t-1 \end{cases} \tag{5.8}$$



Фиг. 5

Величина h_0 определяется из условия $f(t) = x(t)$ или

$$-x(t) = x(t)(-h_0 + \tfrac{1}{2})$$

откуда $h_0 = \frac{3}{2}$. Таким образом, условием асимптотической устойчивости является $h < \frac{3}{2}$. Случай $x(t) < 0$, очевидно, даст тот же результат.

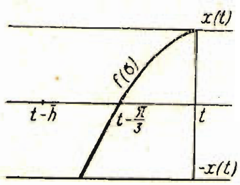
Этот результат, полученный на основании теоремы 8, весьма мало отличается от необходимого и достаточного условия устойчивости $h < \pi/2$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\int\limits_{t-h}^{t} x(\xi)\,d\xi \tag{5.9}$$

Пусть по-прежнему $V = {}^1/_2 x^2$ в силу уравнения (5.9)

$$\frac{dV}{dt} = -x(t) \int_{t-h}^{t} x(\xi)\, d\xi \tag{5.10}$$



Фиг. 6

Таким образом, условие асимптотической устойчивости имеет вид:

$$\int_{t-h}^{t} x(\xi)\, d\xi > 0 \quad \text{при } x(t) > 0$$

$$\int_{t-h}^{t} x(\xi)\, d\xi < 0 \quad \text{при } x(t) < 0 \tag{5.11}$$

Аналогично примеру 4 достаточно рассмотреть случай $x(t) > 0$. Пусть область допустимых в силу условий (5.1) линий определяется неравенствами

$$x(t) \geqslant y(\sigma) \geqslant f(\sigma) \quad \text{при } t \geqslant \sigma > \sigma_1, \qquad x(t) \geqslant y(\sigma) \geqslant -x(t) \text{ при } \sigma \leqslant \sigma_1 \tag{5.12}$$

где $f(\sigma_1) = -x(t)$ и $f(t) = x(t)$. Условие асимптотической устойчивости будет

$$\operatorname{Inf} \int_{t-h}^{t} y(\xi)\, d\xi > 0 \quad \text{или} \quad \int_{\sigma_1}^{t} f(\xi)\, d\xi - \int_{t-h}^{\sigma_1} x(t)\, d\xi > 0 \tag{5.13}$$

Наибольшее значение $h = h_0$ определяется из условия

$$\int_{\sigma_1}^{t} f(\xi)\, d\xi - x(t)(\sigma_1 - t + h_0) = 0 \tag{5.14}$$

Согласно условиям (5.1)

$$\frac{df}{d\sigma} = \sup\left(-\int_{\sigma-h_0}^{\sigma} y(\xi)\, d\xi\right) = -\int_{\sigma_1}^{\sigma} f(\xi)\, d\xi + \int_{\sigma-h_0}^{\sigma_1} x(t)\, d\xi \tag{5.15}$$

Отсюда

$$\frac{d^2 f}{d\sigma^2} = -f(\sigma) - x(t) \quad \text{или} \quad f(\sigma) = -x(t) + A \sin\sigma + B\cos\sigma \tag{5.16}$$

Постоянные A, B и σ_1 находим из условий

$$f(t) = x(t), \qquad f(\sigma_1) = -x(t), \qquad \left.\frac{df}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} = h_0 x(t) \tag{5.17}$$

или

$$A\sin t + B\cos t = 2x(t),\ A\sin\sigma_1 + B\cos\sigma_1 = 0,\ A\cos\sigma_1 - B\sin\sigma_1 = h_0 x(t) \tag{5.18}$$

Решая систему (5.18), получим

$$A = h_0 x(t)\cos\sigma_1, \qquad B = -h_0 x(t)\sin\sigma_1, \qquad \sigma_1 = t - \arcsin\frac{2}{h_0}$$

Подставляя в (5.15), получим (фиг. 6)

$$f(\sigma) = -x(t)\left[1 + h_0 \sin\left(t - \arcsin\frac{2}{h_0} - \sigma\right)\right] \tag{5.19}$$

Выполняя интегрирование в условии (5.13), получим условие асимптотической устойчивости $h < 2$.

Поступила 16 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. МГУ, 1954.
2. Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздыванием времени. ПММ, Т. XX, в. 3, 1956.
3. Эльсгольц Л. Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, УММ, т. IX, вып. 4, 1954.
4. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УММ, ч. IV, вып. 5, 1949.