Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

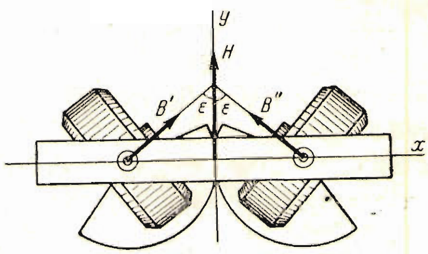
А. Ю. Ишлинский

(Киев)

1°. Ниже дается строгое изложение теории гирогоризонткомпаса, чувствительный элемент которого представляет собой устройство, аналогичное так называемой гиросфере гироскопических компасов [1,2] типа «новый Аншютц».

Упомянутый чувствительный элемент можно рассматривать как совокупность двух гироскопов, оси кожухов которых параллельны друг другу, а подшипники их цапф жестко связаны с одной и той же рамой, именуемой в дальнейшем также гироскопической рамой или просто гирорамой (фиг. 1). В двухгироскопном компасе эта рама окружается сферической оболочкой и погружается в жидкость, чем осуществляется весьма совершенный подвес рамы, почти лишенный трения (фиг. 2).

Мы примем, что центр подвеса рамы перемещается по некоторой сфере S радиуса R, окружающей Землю, а силы тяготения рамы к Земле сводятся к единственной силе F, приложенной к центру тяжести рамы (совместно с гироскопами) и направленной к центру сферы.



Фиг. 1

Будем считать, что сфера S не участвует во вращении Земли и не изменяет своей ориентации относительно неподвижных звезд. Поступательное перемещение сферы для дальнейшего несущественно, так как оно происходит с исчезающе малым ускорением. Вследствие этого можно условиться центр сферы S считать неподвижным.

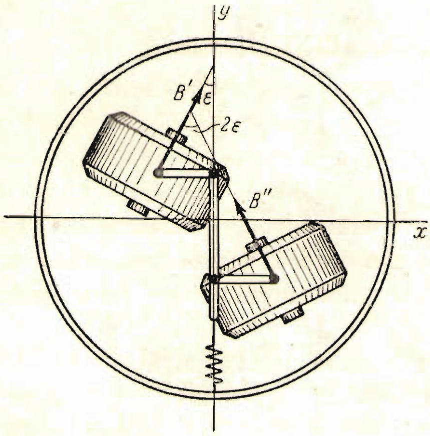
Рассмотрение движения чувствительного элемента относительно неподвижной сферы S, как показывает дальнейшее, представляет значительное удобство [3].

Пренебрежем силами трения в подвесе самой рамы и в подшипниках осей кожухов гироскопов, а также неизбежными несовершенствами сборки, например наличием аксиальных и радиальных люфтов в подшипниках и остаточным дебалансом гироскопов вокруг осей их кожухов.

Будем предполагать, что посредством специальной зубчатой передачи (или четырехзвенного механизма) повороты кожухов гироскопов относительно рамы, так же как и в случае чувствительного элемента двухгироскопного компаса, совершаются в разные стороны на углы, которые можно считать равными (фиг. 1 и 2).

2°. Следуя прецессионной (так называемой элементарной) теории гироскопических явлений, будем считать суммарный кинетический момент H всей гироскопической рамы равным геометрической сумме одинаковых по величине собственных кинетических моментов гироскопов B' и B''. Обозначим через 2ε угол между осями собственного вращения гироскопов (фиг. 1). Тогда

$$H = 2B\cos\varepsilon \qquad (B = B' = B'') \tag{1}$$



Фиг. 2

Суммарный кинетический момент H направлен по биссектрисе угла 2ε; из-за наличия упомянутой зубчатой передачи вектор H не изменяет своего расположения относительно рамы.

Свяжем с рамой систему координат xyz с началом в центре подвеса рамы, направив ось y параллельно вектору H, а ось z параллельно осям кожухов гироскопов; положение оси x определяется тем самым однозначно (фиг. 3).

Обозначим через ω_x, ω_y, ω_z проекции на оси этой системы координат угловой скорости рамы относительно сферы S (или, что то же, по отношению к системе отсчета, связанной с неподвижными звездами). Выражения

$$\frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_z H_y, \qquad \frac{dH_y}{dt} + \omega_z H_x - \omega_x H_z, \qquad \frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x \tag{2}$$

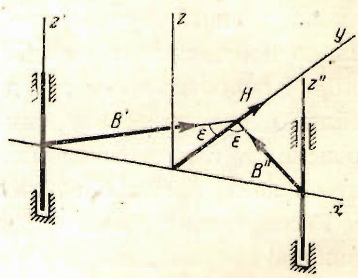
представляют собой проекции скорости конца вектора кинетического момента гироскопической рамы H на оси x, y и z в предположении, что начало вектора неподвижно. Согласно известной теореме механики эти проекции равны суммам моментов сил, действующих на раму вокруг соответственно тех же осей. Обозначим эти суммы через M_x, M_y и M_z.

Кинетический момент рамы направлен по оси y. Следовательно,

$$H_x = 0, \quad H_y = H = 2B\cos\varepsilon, \quad H_z = 0.$$

В результате имеем три уравнения:

$$-\omega_z H = M_x, \quad \frac{dH}{dt} = M_y, \quad \omega_x H = M_z \tag{3}$$



Фиг. 3

Гироскопическая рама представляет собой в рассматриваемом случае механическую систему с четырьмя степенями свободы, поэтому для полного описания законов ее движения к уравнениям (3) следует составить еще одно уравнение, содержащее проекцию угловой скорости ω_y. Для этой цели заметим, что проекции на ось z скорости концов собственных кинетических моментов гироскопов выражаются формулами

$$\omega_x B_y' - \omega_y B_x' = M_z', \qquad \omega_x B_y'' - \omega_y B_x'' = M_z'' \qquad (4$$

Здесь M_z' и M_z'' — суммы моментов сил, действующих на кожухи каждого из гироскопов вокруг осей этих кожухов, а величины B_x', B_y', B_x'', B_y'' — проекции соответственно на оси x и y собственных кинетических моментов гироскопов рамы B' и B''. Очевидно (фиг. 3),

$$B_x' = -B_x'' = B\sin\varepsilon, \qquad B_y' = B_y'' = B\cos\varepsilon \tag{5}$$

В соответствии с прецессионной (элементарной) теорией гироскопов в уравнениях движения механической системы учитываются лишь собственные кинетические моменты роторов гироскопов. Остальные кинетические моменты и соответственно изменения их не учитываются. Таким образом, следует считать, что силы, непосредственно приложенные к раме, взаимно уравновешиваются. В частности, имеем

$$M_z - M_z' - M_z'' = 0 \tag{6}$$

Здесь моменты $-M_z'$ и $-M_z''$ являются противодействием кожухов гироскопов, к осям которых со стороны рамы приложены моменты M_z' и M_z''. Подставляя в соотношение (6) выражения для моментов M_z' и M_z'' согласно формулам (4), получим, учитывая равенства (1) и (5), вновь третье уравнение (3).

Составим теперь разность моментов M_z' и M_z'' и обозначим ее через N. Согласно формулам (4) и (5) имеем

$$N = M_z' - M_z'' = -\omega_y 2B\sin\varepsilon \tag{7}$$

Момент N может быть создан посредством специального пружинного устройства (фиг. 2); в этом случае он будет являться функцией угла ε.

Итак, движение гироскопической рамы определяется в соответствии с соотношениями (3), (7) и формулой (1) следующими четырьмя уравнениями

$$\begin{aligned} -\omega_z 2B\cos\varepsilon &= M_x, & \omega_x 2B\cos\varepsilon &= M_z \\ \frac{d}{dt}2B\cos\varepsilon &= M_y, & -\omega_y 2B\sin\varepsilon &= N \end{aligned} \tag{8}$$

3°. Оказывается, что параметры, характеризующие гироскопическую раму и, в частности, форму зависимости момента N от угла ε, можно выбрать так, что при соблюдении определенных начальных условий ось z будет все время нормальна к сфере S, каким бы образом ни перемещалась по ней точка подвеса рамы.

Для доказательства этой интересной теоремы теоретической механики следует обратиться к уравнениям (8) и выяснить, при каких обстоятельствах они могут удовлетворяться тождественно.

Введем некоторую подвижную систему координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, начало которой расположено в точке подвеса гирорамы, а оси ξ^*, η^* и ζ^* ориентированы по неподвижным звездам. Уравнениями движения гироскопической рамы относительно такой системы координат как раз и являются уравнения (8). Наряду с силой тяготения к центру Земли и реакцией подвеса в число сил, действующих на раму, следует включить силы инерции ее переносного движения вместе с поступательно перемещающейся системой координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Последние приводятся к единственной силе Q, приложенной к центру тяжести рамы. Проекции этой силы на оси координат x, y и z имеют вид:

$$Q_x = -mw_x, \qquad Q_y = -mw_y, \qquad Q_z = -mw_z \tag{9}$$

Здесь m — масса рамы вместе с кожухами и роторами ее гироскопов; w_x, w_y и w_z — проекции на оси системы координат ускорения точки подвеса рамы при ее движении по сфере S.

Согласно известным формулам кинематики [4]

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{aligned} \tag{10}$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости точки подвеса и ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости самой рамы, а следовательно, и системы координат x, y, z относительно сферы S. Так как, по предположению, точка подвеса перемещается по сфере S и ось z должна быть к последней нормальна, то [3]

$$v_x = \omega_y R, \qquad v_y = -\omega_x R, \qquad v_z = 0 \tag{11}$$

Проекции силы Q на оси системы координат xyz можно представить теперь, используя формулы (9), (10) и (11), в виде

$$\begin{gathered} Q = -mR\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x\right), \qquad Q_y = -mR\left(-\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z\omega_y\right) \\ Q_z = -mR\left(-\omega_x^2 - \omega_y^2\right) \end{gathered} \tag{12}$$

Пусть центр тяжести рамы расположен на отрицательной части оси z на расстоянии l от точки подвеса. Сила тяготения в рассматриваемом случае направлена по оси z и, следовательно, ее момент относительно точки подвеса равен нулю. То же относится к составляющей силы инерции переносного движения и силе реакции связи. Поэтому для определения моментов M_x, M_y и M_z достаточно найти моменты сил Q_x и Q_y относительно осей x, y и z. В результате получим выражения

$$M_x = lQ_y, \qquad M_y = -lQ_x, \qquad M_z = 0 \tag{13}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (8) и учитывая формулы (11), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} -\omega_z 2B\cos\varepsilon &= mlR\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y\omega_z\right), &\qquad \omega_x 2B\cos\varepsilon &= 0 \\ \frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) &= mlR\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z\right) &\qquad -\omega_y 2B\sin\varepsilon &= N \end{aligned} \tag{14}$$

которые должны удовлетворяться тождественно.

Согласно третьему из них (если оставить в стороне исключительный случай $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$) имеем

$$\omega_x = 0 \tag{15}$$

Теперь нетрудно видеть, что первые два равенства (14) удовлетворяются, если соблюдается условие

$$2B\cos\varepsilon = H = mlR\,\omega_y \tag{16}$$

Исключая посредством этого условия величину ω_y из четвертого равенства (14), приходим к соотношению

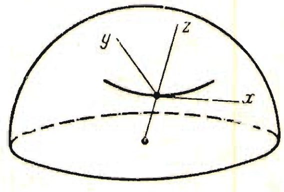
$$N = -\frac{4B^2}{mlR}\cos\varepsilon\sin\varepsilon \tag{17}$$

которое определяет искомую форму зависимости момента N от угла ε.

Соотношения (11), (15), (16) и (17) позволяют выяснить, каковы должны быть начальные условия движения гироскопической рамы, чтобы описываемое движение оказалось возможным. Согласно соотношению (15) и второй формуле (11) имеем

$$v_y = 0 \tag{18}$$

Следовательно, в начальное мгновение времени ось x, связанная с гироскопической рамой, должна быть направлена по касательной к траектории точки подвеса при ее движении по сфере S (фиг. 4). Ось x будет касаться упомянутой траектории все время только при соблюдении также и остальных начальных условий, которые будут выяснены ниже.



Фиг. 4

В соответствии с первой формулой (11) и соотношениями (15) и (16) получаем равенство

$$2B \cos \varepsilon = mlv \tag{19}$$

где v — величина скорости точки подвеса рамы относительно сферы S. Следовательно, если в начальное мгновение скорость точки подвеса была v_0, то начальное значение угла ε_0 должно определяться формулой

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{mlv_0}{2B} \tag{20}$$

В дальнейшем при произвольном движении точки подвеса в силу второго равенства (14) и соотношения (15) формула (19) останется в силе в течение всего времени движения. Наконец, в начальное мгновение времени ось z, параллельная осям кожухов гироскопов, должна быть нормальна к сфере S. При соблюдении перечисленных условий момент N согласно соотношению (17) будет именно таким, чтобы в силу четвертого уравнения (14) определяемая им составляющая угловой скорости рамы ω_y удовлетворяла бы первому равенству (11).

Если в начальное мгновение условия (18) и (20) удовлетворены с малой погрешностью и ось z отклонена от нормали к поверхности S на малый угол, то движение рамы может быть исследовано посредством изучения малых колебаний около движения, при котором начальные условия соблюдаются точно. К этому вопросу мы вернемся в п. 6°.

4°. Обратимся теперь к исследованию движения гирорамы относительно Земли, принимая ее за сферу радиуса R и считая, что все условия п. 3° соблюдены точно.

Введем подвижную систему координат $\xi\eta\zeta$, ось ξ которой направлена по касательной к параллели на восток, ось η по касательной к меридиану на север и ось ζ по радиусу Земли кверху; начало координат расположим в точке подвеса рамы.

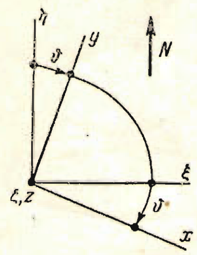
Обозначим через U угловую скорость Земли, через φ широту места (строго говоря, геоцентрическую) и через V_E и V_N соответственно восточную и северную составляющие скорости начала системы $\xi\eta\zeta$ относительно Земли. Проекции на оси ξ и η скорости этой точки относительно сферы S представляются следующим образом:

$$v_\xi = V_E + UR\cos\varphi, \qquad v_\eta = V_N \tag{21}$$

Используя теперь формулы (11), заменив в них предварительно буквы x и y соответственно на ξ и η, получим известные формулы

$$u_\xi = -\frac{V_N}{R}, \qquad u_\eta = \frac{V_E}{R} + U\cos\varphi \tag{22}$$

для проекций угловой скорости трехгранника $\xi\eta\zeta$ относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, ориентированной по неподвижным звездам. Проекция упомянутой угловой скорости на ось ζ выражается, как известно, формулой [1]



Фиг. 5

$$u_\zeta = \frac{V_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + U\sin\varphi \tag{23}$$

Обозначим через ϑ угол между осями y и η, отсчитывая положительное направление этого угла так, как показано на фиг. 5. Нетрудно видеть, что проекции угловой скорости системы координат xyz, связанной с гирорамой, на оси x, y и z имеют при этом вид:

$$\omega_x = u_\xi\cos\vartheta - u_\eta\sin\vartheta, \quad \omega_y = u_\xi\sin\vartheta + u_\eta\cos\vartheta, \quad \omega_z = u_\zeta - \frac{d\vartheta}{dt} \tag{24}$$

В соответствии с законами движения гирорамы, изложенными в п. 3°, мы должны положить в первой из этих формул $\omega_x = 0$. Если, кроме того, заменить в ней величины u_ξ и u_η их представлением согласно формулам (22), то в результате получим

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{V_N}{RU\cos\varphi + V_E} \tag{25}$$

Таким образом, ось y, связанная с гирорамой, отклоняется от направления на север на угол ϑ, который определяется формулой (25). Последняя совпадает с известной формулой так называемой скоростной девиации гироскопического компаса.

Обратимся теперь к соотношению (19) между кинетическим моментом гирорамы и скоростью движения ее точки подвеса по сфере S. Это соотношение, учитывая формулы (21) и (1), можно представить[1] следующим образом:

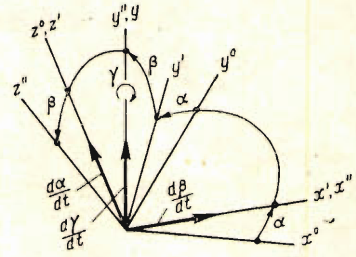
$$H = 2B\cos\varepsilon = ml\sqrt{(RU\cos\varphi + V_E)^2 + V_N^2} \tag{26}$$

Изложенное выше показывает, что соотношение (26) действительно обеспечивает точное следование девиации гироскопического компаса закону (25),

[1] Точно такое же соотношение было получено ранее В. Г. Железновым при уточнении известного условия Шулера $H = mlRU\cos\varphi$ в приближенной теории гироскопических компасов. При соблюдении условия Шулера с некоторой степенью приближения девиация гироскопического компаса не зависит от предыдущих значений скорости корабля и его ускорения и определяется в основном формулой (25). Другими исследователями (Э. И. Слив, Я. Н. Ройтенберг) условие Шулера уточнялось (для случая высоких широт) посредством учета одной только восточной составляющей скорости корабля V_E и представлялось в виде $H = ml(RU\cos\varphi + V_E)$.

если только будет соблюдаться зависимость момента N от угла ε в формуле (17) и, кроме того, будут соблюдены начальные условия, приведенные в п. 3°. Отметим, что ось z, связанная с гироскопической рамой, направлена в этом случае к центру земной сферы, и, следовательно, образует с вертикалью некоторый малый угол, зависящий от широты места.

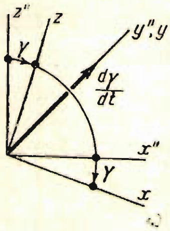
5°. Построим трехгранник Дарбу $x^0 y^0 z^0$ с вершиной в точке подвеса гирорамы, ось x^0 которого направим по вектору скорости точки подвеса рамы относительно сферы S и ось z^0 нормально к сфере; направление оси y^0 при этом полностью определится. Если начальные условия движения гирорамы, изложенные в п. 3°, соблюдены, то оси x, y и z, связанные с гирорамой, все время совпадают с осями x^0, y^0 и z^0 при произвольном перемещении трехгранника по поверхности S.



Фиг. 6

Рассмотрим общий случай начальных условий гирорамы и построим уравнения ее движения относительно трехгранника $x^0 y^0 z^0$.

Определим положение системы координат xyz относительно трехгранника $x^0y^0z^0$ так, как показано на фиг. 6 и 7 посредством трех углов α, β и γ. Угол α определяет поворот вокруг оси z, совпадающей с осью z^0 вспомогательной системы координат $x'y'z'$ относительно системы $x^0y^0z^0$; угол β в свою очередь представляет собой угол поворота вокруг оси x'' (или, что то же, оси x') другой вспомогательной системы координат, $x''y''z''$ относительно первой, т. е. системы $x'y'z'$. Наконец, угол γ является углом поворота вокруг оси y (она же—ось y'') системы координат xyz относительно системы $x''y''z''$. Таблица косинусов углов между системами координат xyz и $x^0y^0z^0$ имеет вид:



Фиг. 7

	x^0	y^0	z^0	
x	$\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$	$-\cos\beta\sin\gamma$	
y	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$	(27)
z	$\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$	$\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$	$\cos\beta\cos\gamma$	

Чтобы получить проекцию угловой скорости системы координат xyz на ее же оси, следует взять сумму проекций на эти оси угловой скорости трехгранника $x^0y^0z^0$ и относительных угловых скоростей: $d\alpha/dt$ системы координат $x'y'z'$ относительно $x^0y^0z^0$, $d\beta/dt$ — системы $x''y''z''$ относительно $x'y'z'$ и, наконец, $d\gamma/dt$ системы координат xyz относительно системы $x''y''z''$.

Вектор угловой скорости $d\alpha/dt$ направлен по оси z^0, а угловой скорости $d\gamma/dt$ по оси y''; в свою очередь вектор угловой скорости $d\beta/dt$ имеет направление оси x'. Ось x', совпадающая с осью x'', является пересечением координатных плоскостей x^0y^0 и zx; она образует с осями системы координат соответственно углы γ, $^1/_2\pi$ и $^1/_2\pi - \gamma$.

Учитывая эти обстоятельства и таблицу косинусов (27), приходим к следующим выражениям для искомых проекций:

$$\omega_x = \omega_{x^0 0}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \omega_{y^0 0}(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \left(\omega_{z^0 0} + \frac{d\alpha}{dt}\right)(-\cos\beta\sin\gamma) + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma \tag{28}$$

$$\omega_y = \omega_{x^0 0}(-\sin\alpha\cos\beta) + \omega_{y^0 0}\cos\alpha\cos\beta + \left(\omega_{z^0 0} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\omega_z = \omega_{x^0 0}(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \omega_{y^0 0}(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \left(\omega_{z^0 0} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma$$

Здесь через $\omega_{x^0 0}$, $\omega_{y^0 0}$ и $\omega_{z^0 0}$ обозначены проекции угловой скорости трехгранника $x^0y^0z^0$ на его же собственной оси. В соответствии с формулами (11) имеем

$$\omega_{x^0 0} = -\frac{v_{y^0 0}}{R}, \qquad \omega_{y^0 0} = \frac{v_{x^0 0}}{R} \tag{29}$$

где $v_{x^0 0}$ и $v_{y^0 0}$ — проекции скорости вершины трехгранника $x^0y^0z^0$ на его оси x^0 и y^0. Однако

$$v_{y_0 0} = 0 \tag{30}$$

так как скорость вершины трехгранника, по предположению, направлена по оси x^0. Учитывая формулы (29) и равенство (30), получаем согласно выражениям (28) следующие формулы для проекций угловой скорости гирорамы на связанные с ней оси:

$$\omega_x = \frac{v}{R}(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt}\right)(-\cos\beta\sin\gamma) + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma$$

$$\omega_y = \frac{v}{R}\cos\alpha\cos\beta + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt} \tag{31}$$

$$\omega_z = \frac{v}{R}(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma$$

В этих формулах

$$v = v_{x^0 0}, \qquad \omega = \omega_{z^0 0} \tag{32}$$

соответственно скорость вершины трехгранника относительно сферы S и составляющая его угловой скорости вдоль нормали к этой сфере. Формулы (31) надлежит подставить в левые части уравнений (18) движения гироскопической рамы.

Перейдем теперь к подсчету правых частей тех же уравнений. Сила тяготения F гироскопической рамы к Земле согласно сделанному в п. 3° предположению направлена к центру сферы S и приложена к центру тяжести рамы. С большей степенью точности можно считать ее параллельной оси z^0. Тогда в соответствии с таблицей косинусов (27) ее проекции на оси x, y и z, связанные с гирорамой, представляются выражениями

$$F_x = F\cos\beta\sin\gamma, \qquad F_y = -F\sin\beta, \qquad F_z = -F\cos\beta\cos\gamma \tag{33}$$

Для подсчета аналогичных проекций силы инерции Q переносного движения (см. п. 3°) следует сначала воспользоваться формулами (12), представив их, учитывая равенства (29), (30) и (32), в виде

$$Q_{x^0} = -m\frac{dv}{dt}, \qquad Q_{y^0} = -m\omega v, \qquad Q_{z^0} = m\frac{v^2}{R} \tag{34}$$

Заметим, что формулы (34) можно было получить и непосредственно, если учесть, что выражения

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_p = \frac{v^2}{\rho_g}, \qquad w_n = -\frac{v^2}{R} \tag{35}$$

представляют собой проекции ускорения точки, движущейся по сфере, на оси трехгранника Дарбу, связанного с траекторией этой точки. При этом следует учесть, что радиус геодезической кривизны траектории ρ_g, угловая скорость ω вращения трехгранника Дарбу вокруг нормали к сфере (вокруг оси z^0) и скорость его вершины v связаны соотношением

$$v = \omega\,\rho_g \tag{36}$$

Используя формулы (34) и таблицу косинусов (27), получим для проекций силы инерции Q на оси x, y и z, связанные с гирорамой, следующие выражения:

$$\begin{aligned} Q_x &= -m\frac{dv}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) - \\ &- m\omega v(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + m\frac{v^2}{R}(-\cos\beta\sin\gamma) \\ Q_y &= -m\frac{dv}{dt}(-\sin\alpha\cos\beta) - m\omega v\cos\alpha\cos\beta + m\frac{v^2}{R}\sin\beta \\ Q_z &= -m\frac{dv}{dt}(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) - \\ &- m\omega v(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + m\frac{v^2}{R}\cos\beta\cos\gamma \end{aligned} \tag{37}$$

Центр тяжести гироскопической рамы имеет в системе координат xyz следующие координаты: $x_c = y_c = 0$, $z_c = -l$.

Поэтому искомые моменты M_x, M_y, M_z сил, действующих на гироскопическую раму, могут быть представлены формулами (38)

$$M_x = l(F_y + Q_y) + M_x^*, \qquad M_y = -l(F_x + Q_x) + M_y^*, \qquad M_z = M_z^*$$

где M_x^*, M_y^*, M_z^* — моменты относительно осей x, y и z каких-либо иных сил (помимо сил тяготения и инерции), также приложенных к гироскопической раме.

Что касается силы реакции точки подвеса рамы или сил давления жидкости на гиросферу (в случае гироскопического компаса типа «Курс»), то их моменты относительно осей x, y, z порознь равны нулю. Заменяя в формулах (38) величины F_x, F_y, Q_x и Q_y выражениями согласно равенствам (33) и (37), получим

$$M_x = l\left[-m\frac{dv}{dt}(-\sin\alpha\cos\beta) - m\omega v\cos\alpha\cos\beta + \left(m\frac{v^2}{R} - F\right)\sin\beta\right] + M_x^*$$

$$M_y = -l\left[-m\frac{dv}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) - \right. \tag{39}$$

$$\left. - m\omega v(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \left(m\frac{v^2}{R} - F\right)(-\cos\beta\sin\gamma)\right] + M_y^*$$

$$M_z = M_z^*$$

Эти выражения, так же как и (31), надлежит подставить в уравнения (14). В результате получим следующие уравнения движения гироскопической рамы относительно трехгранника Дарбу:

$$-\left[\frac{v}{R}(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma + \right.$$
$$\left. + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma\right]2B\cos\varepsilon = ml\frac{dv}{dt}\sin\alpha\cos\beta - ml\omega v\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+ \left(ml\frac{v^2}{R} - lF\right)\sin\beta + M_x^*$$

$$\frac{d}{dt}2B\cos\varepsilon = ml\frac{dv}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + ml\omega v(\sin\alpha\cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \left(ml\frac{v^2}{R} - lF\right)\cos\beta\sin\gamma + M_y^*.$$

$$\left[\frac{v}{R}(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) - \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\sin\gamma + \right.$$
$$\left. + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma\right]2B\cos\varepsilon = M_z^* \tag{40}$$

$$-\left[\frac{v}{R}\cos\alpha\cos\beta + \left(\omega + \frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}\right]2B\sin\varepsilon = N(\varepsilon)$$

Уравнения (40) справедливы для любой гироскопической рамы. Если же в них положить

$$M_x^* = M_y^* = M_z^* = 0 \tag{41}$$

а для момента $N(\varepsilon)$ воспользоваться формулой (17), то они будут относиться к движению нашей специальной гирорамы, свойства которой изложены в п. 3°. В этом случае уравнения (45), как и следовало ожидать, удовлетворяются тождественно, если в них положить

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{42}$$

а угол ε определить из соотношения (19).

Функции $v = v(t)$ и $\omega = \omega(t)$, задающие движение точки подвеса гирорамы по поверхности S, могут быть при этом совершенно произвольными. Движение гироскопической рамы при соблюдении соотношений (42) и (19) происходит так, как было описано в пп. 3° и 4°. Именно, кинетический момент рамы, имеющий направление оси y, при любом движении точки подвеса остается перпендикулярным к вектору скорости этой точки относительно сферы S; ось z, параллельная осям кожухов гироскопов рамы, постоянно проходит через центр сферы.

6°. Уравнения (40) движения гироскопической рамы вокруг осей $x^0y^0z^0$ трехгранника Дарбу, связанного с траекторией движения точки подвеса, слишком сложны для исследования движения рамы в самом общем случае. Поэтому ограничимся изучением малых движений рамы относительно этого трехгранника, в силу чего сохраним в уравнениях (40) лишь члены первого порядка относительно углов α, β, γ и их производных по времени.

Имея в виду равенства (41) и формулу (17), получим

$$\begin{gathered}
-\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{v}{R}\,\beta + \omega\right) 2B\cos\varepsilon = l\left[m\frac{dv}{dt}\alpha - \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)\beta - m\omega v\right] \\
\frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) = l\left[mv\omega\alpha - \left(F - m\frac{v^2}{R}\right)\gamma + m\frac{dv}{dt}\right] \\
\left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{v}{R}\alpha - \omega\gamma\right) 2B\cos\varepsilon = 0 \\
-\left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{v}{R} + \omega\beta\right) 2B\sin\varepsilon = -\frac{4B^2}{mlR}\cos\varepsilon\sin\varepsilon
\end{gathered} \tag{43}$$

Эти уравнения следует рассматривать как уравнения возмущенного движения гироскопической рамы по отношению к исходному движению, при котором углы α, β, γ и ε определяются соотношениями (42) и (19). Обозначая в дальнейшем угол ε для невозмущенного движения через ε^0, положим в уравнениях (43)

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \delta \tag{44}$$

где δ — малая величина того же порядка, что и углы α, β и γ. Сохраняя в уравнениях (43) члены первого порядка уже относительно всех четырех углов α, β, γ и δ и учитывая, что в соответствии с условием (19) следует положить

$$2B\cos\varepsilon^0 = mlv \tag{45}$$

придем к системе уравнений возмущенного движения гироскопической рамы

$$\begin{gathered}
-mlv\frac{d\alpha}{dt} - ml\frac{dv}{dt}\alpha + lF\beta = -\omega 2B\sin\varepsilon^0\delta \\
\frac{d\beta}{dt} + \frac{v}{R}\alpha = \omega\gamma, \qquad \frac{d\gamma}{dt} + \frac{2B\sin\varepsilon^0}{mlR}\delta = -\omega\beta \\
-\frac{d}{dt}(2B\sin\varepsilon^0\delta) + l\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\gamma = \omega mlv\alpha
\end{gathered} \tag{46}$$

Если скорость точки подвеса гироскопической рамы v и угловая скорость ω трехгранника Дарбу вокруг нормали к сфере S постоянны, то система (46) становится однородной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Полагая приближенно, что

$$F - \frac{mv^2}{R} \approx F \approx mg \tag{47}$$

где g — ускорение силы тяжести, придем к характеристическому уравнению системы (46), корни которого суть

$$\pm i(\nu + \omega), \qquad \pm i(\nu - \omega) \tag{48}$$

Здесь $\nu = \sqrt{g/R}$ — частота, соответствующая периоду Шулера

$$T = 2\pi\sqrt{R/g} \tag{49}$$

Согласно приближенной теории пространственного гирокомпаса, принадлежащей Геккелеру [2], в данном случае должны были бы иметь место два не связанных между собой колебания, каждое с периодом Шулера: первое, относящееся к переменным α и β, а второе — к переменным γ и δ. Изложенное выше показывает, что теория Геккелера содержит существенные неточности, хотя и приводит в общем к правильным соотношениям типа (17) и (19) для выбора характерных параметров чувствительного элемента гироскопического компаса, плоскость xy которого при любых маневрах корабля остается горизонтальной (у Геккелера — почти горизонтальной).

Если оставить в силе приближенное равенство (47), то система уравнений (46) может быть проинтегрирована и в случае переменных величин v и ω, т. е. при произвольном движении точки подвеса по сфере S.

Действительно, уравнения (46) можно, используя равенства (47) и (48), представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} - \nu\beta = \omega\frac{2B\sin\varepsilon^0\delta}{ml\sqrt{gR}}, \qquad \frac{d\beta}{dt} + \nu\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} = \omega\gamma \tag{50}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \nu\frac{2B\sin\varepsilon^0}{ml\sqrt{gR}}\delta = -\omega\beta, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{2B\sin\varepsilon^0}{ml\sqrt{gR}}\delta\right) - \nu\gamma = -\omega\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}}$$

Введем теперь две новые комплексно-значные функции действительного аргумента t согласно формулам

$$\varkappa(t) = \frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} + i\beta, \qquad \mu(t) = \gamma - i\frac{2B\sin\varepsilon^0\delta}{ml\sqrt{gR}} \tag{51}$$

Тогда, как нетрудно видеть, система уравнений (50) может быть заменена системой двух уравнений

$$\frac{d\varkappa}{dt} + i\nu\varkappa = i\omega\mu, \qquad \frac{d\mu}{dt} + i\nu\mu = i\omega\varkappa \tag{52}$$

Эта система в свою очередь распадается на два независимых уравнения

$$\frac{d}{dt}(\varkappa + \mu) + i(\nu - \omega)(\varkappa + \mu) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\varkappa - \mu) + i(\nu + \omega)(\varkappa - \mu) = 0 \tag{53}$$

которые немедленно интегрируются. Имеем

$$\varkappa + \mu = (\varkappa_0 + \mu_0)\exp\left(-i\int_0^t(\nu - \omega)\,dt\right)$$

$$\varkappa - \mu = (\varkappa_0 - \mu_0)\exp\left(-i\int_0^t(\nu + \omega)\,dt\right) \tag{54}$$

где $\varkappa_0$ и μ_0 — начальные значения функций $\varkappa(t)$ и $\mu(t)$ в мгновение времени $t = 0$.

Используя формулы (54) и (51), нетрудно уже представить в явном виде и искомые переменные α, β, γ, δ как функции своих начальных значений α_0, β_0, γ_0, δ_0 и времени t.

По отношению к переменным $v\alpha/\sqrt{gR}$, β, γ и $2B\sin\varepsilon^\circ/ml\sqrt{gR}$, где ε° определяется, согласно соотношению (45), формулой

$$\sin\varepsilon^\circ = \sqrt{1-\left(\frac{mlv}{2B}\right)^2} \tag{55}$$

система уравнений (50) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если только угловая скорость ω постоянна. Последняя выражается формулой

$$\omega = U\sin\varphi + \frac{V_E}{R}\operatorname{tg}\varphi - \frac{d\psi}{dt} \tag{56}$$

где ψ — истинный курс корабля, т. е. угол между вектором его скорости (точнее, скорости точки подвеса гирорамы) и меридианом места, отсчитываемый по стрелке часов от направления на север.

7°. Приведенная выше теория малых движений гироскопической рамы около подвижных осей трехгранника Дарбу, связанного с траекторией точки подвеса, приводит к колебаниям незатухающего характера. Вопрос о строгом обосновании устойчивости невозмущенного движения, определяемого нелинейными уравнениями (40), требует, разумеется, дополнительных исследований.

Введение в механическую систему гирорамы затухания, подобного тому, какое применяется в двухгироскопных компасах обычного типа, приведет к появлению баллистических девиаций, т. е. дополнительных отклонений переменных α, β, γ и δ, обусловленных законом изменения ускорения точки подвеса при движении ее по сфере S. Оценка этих девиаций также требует особого рассмотрения. Наконец, в дальнейшем представляется существенным определить искажения, вносимые в движение описанной гироскопической рамы отличием формы Земли от сферы.

Поступила 10 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
2. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение, т. II, ИЛ, М., 1952.
3. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
4. Суслов Г. К. Теоретическая механика, ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.