

## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЗМА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА

Г. И. Баренблатт

(Москва)

Недавно С. А. Христиановичем<sup>[1, 2]</sup> была предложена новая постановка задач плоской теории упругости для случая, когда в рассматриваемой области упругой среды имеются прямолинейные щели. Основная идея здесь состоит в том, что размер этих щелей не считается заранее заданным, а определяется вполне однозначным образом в соответствии с действующей на упругую среду системой усилий так, чтобы в концах щелей напряжения были конечными. Это условие конечности напряжений — гипотеза С. А. Христиановича — в некотором смысле аналогична известной гипотезе Жуковского — Чаплыгина в теории обтекания крыла, имеющего угловую точку, или точку возврата, и приводит к физически естественной и существенно нелинейной, — так как область определяется граничными условиями задачи, — краевой задаче для бигармонического уравнения.

В предлагаемой работе гипотеза С. А. Христиановича выясняется с различных точек зрения на примере задачи образования плоской щели сосредоточенными силами и применяется для решения некоторых осесимметричных задач, возникающих при исследовании образования при помощи нефилтующейся жидкости горизонтальных трещин в горных породах в процессе гидравлического разрыва нефтеносного пласта.

**§ 1. Образование щели в плоскости, равномерно сжатой на бесконечности, при помощи сосредоточенных сил. Гипотеза С. А. Христиановича.** Пусть упругая плоскость равномерно сжата на бесконечности всесторонним сжимающим напряжением  $q_\infty$ . Сделаем в плоскости небольшой прямолинейный разрез и приложим в центрах краев разреза (фиг. 1) равные по величине и противоположные по направлению сосредоточенные силы  $P$ .

В силу симметрии, под действием сил щель будет расширяться, оставаясь прямолинейной (направление щели принимается за ось  $x$ , начало координат берем в центре щели). Спрашивается, какова будет длина щели, соответствующая заданной силе?

Методом, разработанным Н. И. Muskhelishvili<sup>[3]</sup>, эта задача достаточно просто решается для щели произвольной длины  $2l$ . Имеют место формулы

$$X_x + Y_y = 2 \{ \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} \} \quad (1.1)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2 \left\{ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right\} \quad (1.2)$$

где  $X_x, Y_y, X_y$  — компоненты тензора напряжений, причем для рассматриваемого случая следует положить

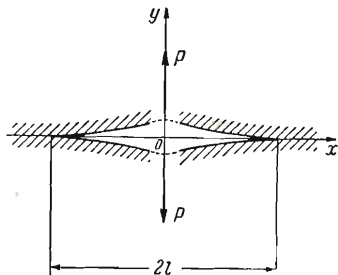
$$z = \frac{l}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \omega(\zeta) \quad (1.3)$$

( $z = x + iy$  — переменная в физической плоскости,  $\Phi(z) = \varphi'(z)$ ,  $\Psi(z) = \psi'(z)$  — некоторые функции, определяющие напряженное состояние). Положим

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) \quad (1.4)$$

где функции  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  определяют напряженное состояние в сжатой плоскости с разрезом при отсутствии сосредоточенных сил, а функции  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  определяют напряженное состояние при отсутствии сжатия на бесконечности. Легко показать, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= -\frac{q_\infty l}{4} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \\ \varphi_1(\zeta) &= \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \end{aligned} \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Можно показать далее, что при действительных  $\zeta$ , соответствующих щели и ее продолжению, т. е. всей оси  $x$ , имеет место соотношение

$$\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi'(\zeta) = 0 \quad (1.6)$$

откуда и из (1.2) получаем для точек оси  $x$ :

$$X_y = 0, \quad Y_y = X_x = \{\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\} = 2\operatorname{Re}\{\Phi(\zeta)\} \quad (1.7)$$

Из формул (1.5) получаем

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{\varphi_0'(\zeta) + \varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{2\zeta^2}{l(\zeta^2 - 1)} \left\{ \frac{P}{\pi(\zeta^2 + 1)} - \frac{q_\infty l(\zeta^2 + 1)}{4\zeta^2} \right\} \quad (1.8)$$

Полагая  $\zeta^2 = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая положительная величина, получим в точках оси  $x$  вблизи концов щели

$$Y_y = X_x = \left( \frac{P}{\pi l} - q_\infty \right) \frac{1 + 1/2\varepsilon}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (1.9)$$

Мы видим, что при заданной силе  $P$  и заданной длине щели  $2l$  может осуществляться один из следующих трех случаев:

- 1°.  $P/\pi l - q_\infty > 0$ ; в концах щели  $X_x = Y_y = +\infty$
- 2°.  $P/\pi l - q_\infty < 0$ ; в концах щели  $X_x = Y_y = -\infty$
- 3°.  $P/\pi l - q_\infty = 0$ ; в концах щели  $X_x = Y_y = 0$

Рассмотрим теперь распределение смещений вблизи концов щели. Концы щели отвечают  $\zeta = \pm 1$ , вся щель отвечает  $|\zeta| = 1$ , т. е.  $\zeta = e^{i\vartheta}$ , где  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ . Рассмотрим для определенности правый конец щели; в его окрестности  $|\vartheta|$  — малая величина. Имеем выражение для смещений [3]

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \quad (1.10)$$

где  $\kappa$  и  $\mu$  — упругие константы материала. Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае при действительных  $\zeta$ , отвечающих оси  $x$ , имеет место соотношение

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \overline{\varphi(\zeta)} \quad (1.11)$$

В точках разреза имеем

$$\varphi = \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{e^{i\vartheta} - i}{e^{i\vartheta} + i} - \frac{q_\infty l}{4} (e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) \quad (1.12)$$

При малых  $|\vartheta|$ , т. е. вблизи правого края щели, имеем

$$\varphi = \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{1-i}{1+i} + \frac{l\vartheta}{2} \left( \frac{P}{\pi l} - q_\infty \right) + \frac{P\vartheta^2}{4\pi} + O(\vartheta^3) \quad (1.13)$$

откуда и из (1.11) получаем вблизи правого края щели

$$v = \frac{x+1}{2\mu} \frac{l\vartheta}{2} \left( \frac{P}{\pi l} - q_\infty \right) + O(\vartheta^3) \quad (1.14)$$

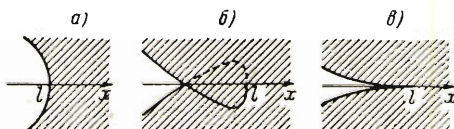
Далее в силу (1.3) имеем при малых  $|\vartheta|$

$$x = \frac{l}{2} (1 - \vartheta^2), \quad \frac{dx}{d\vartheta} = -l\vartheta \quad (1.15)$$

Таким образом, получаем вблизи правого края щели

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{x+1}{4\mu\vartheta} \left( \frac{P}{\pi l} - q_\infty \right) + O(\vartheta) \quad (1.16)$$

Итак, в случае 1° имеем  $(dv/dx)_{\vartheta=+0} = -\infty$ , так что распределение вертикальных смещений вблизи правого края щели имеет вид, изображенный на фиг. 2,а. В случае 2° имеем  $(dv/dx)_{\vartheta=+0} = +\infty$ , и распределение смещений вблизи правого края щели имеет вид, изображенный на фиг. 2,б. Наконец, в случае 3°  $(dv/dx)_{\vartheta=+0} = 0$ , соответствующее распределение вертикальных смещений изображено на фиг. 2,в. Очевидно, что распределение смещений вблизи левого края щели будет иметь соответствующую симметричную форму.



Фиг. 2

Физически эти три возможных случая интерпретируются следующим образом. В случае 1° имеющаяся щель является слишком короткой для приложенной силы; в конце щели действуют бесконечно большие разрывающие напряжения и щель как бы стремится расширяться. В случае 2° имеющаяся щель является слишком длинной для приложенной силы; в конце щели действуют бесконечно большие сжимающие напряжения и щель как бы стремится сократиться. В случае 3° в конце щели напряжение равно нулю, так что длина щели в некотором смысле соответствует приложенной силе.

Следуя С. А. Христиановичу, введем теперь условие соответствия длины щели приложенной нагрузке, потребовав конечности (а, следовательно, и равенства нулю) напряжения в конце щели. Мы получим, что  $P/\pi l - q_\infty = 0$ , откуда неизвестная длина щели определится в виде

$$l = \frac{P}{\pi q_\infty} \quad (1.17)$$

Это условие может быть сформулировано также, как условие горизонтальности касательной к контуру деформированной щели на краю щели. Такая форма условия С. А. Христиановича подчеркивает его чисто геометрический характер (в его формулировку не входят никакие характеристики материала, определяющие его упругость или прочность).

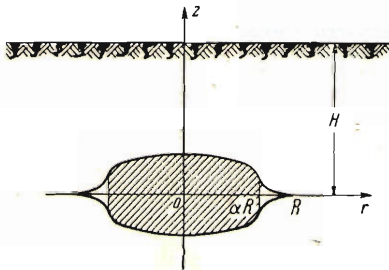
В более общем случае, когда имеется несколько щелей, появляется несколько свободных параметров, определяющих координаты их концов.



Условия для определения этих свободных параметров получатся, если потребовать конечности напряжений или, что то же самое, горизонтальности касательной к деформированному контуру щели во всех концах щелей.

**§ 2. Образование круглой трещины.** Рассмотрим в некоторой схематизированной постановке задачу образования осесимметричных горизонтальных трещин при помощи нефилтующейся жидкости. Эта задача ставится следующим образом.

Пусть (фиг. 3) в тяжелом полупространстве на некоторой глубине  $H$  имеется горизонтальная трещина, имеющая в плане круговую форму. Часть трещины от  $r = 0$  до  $r = R_1 = \alpha R$  заполнена жидкостью; осредняя, мы можем считать, что давление на всей смоченной части поверхности трещины постоянно и равно  $P$ . Поверхность трещины при  $R_1 < r \leq R$  свободна от напряжений. Задаваясь величиной давления  $P$  и смоченного радиуса  $R_1$ , определим радиус трещины  $R$  (или, что то же, величину



Фиг. 3

$\alpha = R_1/R$ ) и решим соответствующую задачу теории упругости.

Примем плоскость щели за плоскость  $z = 0$ ; считая, что к массиву можно применять уравнения теории упругости, получим уравнения задачи в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = -\gamma \quad (2.2)$$

где  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$  — компоненты тензора напряжений, а  $\gamma$  — удельный вес горных пород. Условия совместности для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$(2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0$$

Наконец, граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_{zz} = \tau_{rz} = 0 \quad (z = H) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{zz} = \tau_{rz} = 0 \quad (z = 0, R \geq r > R_1), \quad \sigma_{zz} = -P, \tau_{rz} = 0 \quad (z = 0, R_1 > r \geq 0) \quad (2.6)$$

$$R_1 = \alpha R$$

В ненарушенном массиве имеет место напряженное состояние:

$$\sigma_{zz}^\circ = -\gamma(H-z), \quad \sigma_{rr}^\circ = \sigma_{\theta\theta}^\circ = -n\gamma(H-z), \quad \tau_{rz}^\circ = 0 \quad (2.7)$$

где  $n$  — коэффициент бокового давления,  $0 < n \leq 1$ . Положим теперь

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^\circ + Z_z, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^\circ + R_r, \quad \tau_{rz} = R_z, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^\circ + \Theta_\theta \quad (2.8)$$

тогда получим для определения добавочных напряжений  $Z_z, R_r, \Theta_\theta$  и

$R_z$ , обусловленных наличием трещины, систему уравнений

$$\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{R_r - \Theta_0}{r} = 0, \quad \frac{\partial R_z}{\partial r} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{R_z}{r} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 R_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 R_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} (R_r - \Theta_0) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (R_r + \Theta_0 + Z_z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} (R_r - \Theta_0) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_r + \Theta_0 + Z_z) = 0$$

Граничные условия (2.5), (2.6) в дополнительных напряжениях запишутся в виде

$$Z_z = R_z = 0 \quad (z = H)$$

$$R_z = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r \leq R), \quad Z_z = \gamma H \quad (z = 0, R \geq r > R_1) \quad (2.10)$$

$$Z_z = -(P - \gamma H) \quad (z = 0, R_1 > r \geq 0) \quad (2.11)$$

Ввиду того, что обычно  $H$  весьма значительно, можно пренебречь влиянием свободной поверхности, т. е. условием (2.10), и рассматривать соответствующую задачу не в полупространстве, а во всем пространстве с круглой трещиной, на которой напряжение распределено по закону (2.11).

Задача теории упругости, соответствующая произвольному нагружению круглой трещины в упругом пространстве, приводится к некоторой смешанной задаче теории потенциала (см. по этому поводу работы М. Я. Леонова <sup>[11]</sup> и В. И. Моссаковского <sup>[12]</sup>). Построение соответствующей этой задаче функции Грина было впервые выполнено Н. Е. Кочинными <sup>[4]</sup> усовершенствовано Л. А. Галиным <sup>[5,6]</sup>. В рассматриваемом случае, ввиду осевой симметрии нагружения трещины, соответствующее представление решения через функцию Грина <sup>[5,6]</sup> дополнительно упрощается вследствие возможности выполнить одно интегрирование. Я. Снеддоном <sup>[7]</sup> осесимметричная задача была приведена к так называемым дуальным интегральным уравнениям, решение которых было рассмотрено Е. Тичмаршем <sup>[8]</sup>.

В случае произвольного осесимметричного распределения добавочного нормального напряжения по трещине  $g(r)$  выражение для вертикального смещения точек поверхности трещины  $w(r)$  имеет вид <sup>[7]</sup>:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \int_0^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^1 \frac{xg(x\mu R) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \rho = \frac{r}{R} \quad (2.12)$$

В рассматриваемом случае функция  $g(r)$  имеет вид:

$$g(r) = -(P - \gamma H) \quad (R_1 > r \geq 0), \quad g(r) = \gamma H \quad (R \geq r > R_1) \quad (2.13)$$

В дальнейшем нам придется различать случаи  $\rho \geq \alpha$  и  $\rho \leq \alpha$ . При  $\rho \geq \alpha$  имеем

$$w = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \int_0^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \left\{ -(P - \gamma H) \int_0^{\alpha/\mu} \frac{x dx}{(1-x^2)^{1/2}} + \gamma H \int_{\alpha/\mu}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \quad (2.14)$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\psi = -\frac{\pi E w}{4(1-\nu^2)PR} = (1-\beta)(1-\rho^2)^{1/2} - \int_0^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu \quad (2.15)$$

где  $\beta = \gamma H / P$ ,  $\beta \leq 1$ . Интеграл в правой части преобразуем к виду

$$\int_{\rho}^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu = \sqrt{1 - \alpha^2} \ln(1 + \sqrt{1 - \rho^2}) - \ln \rho \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} - \int_{\rho}^1 \frac{\mu \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - \rho^2}) d\mu}{(\mu^2 - \alpha^2)^{1/2}} \quad (2.16)$$

Из формул (2.15) и (2.16) получаем

$$\frac{d\psi}{d\rho} = -\frac{\pi E}{4(1 - \nu^2) PR} \frac{dw}{d\rho} = [-(1 - \beta) + \sqrt{1 - \alpha^2}] \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} - \rho \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \quad (2.17)$$

В соответствии с условием С. А. Христиановича потребуем, чтобы касательная к меридиональной линии смещенной поверхности щели на краю щели, т. е. при  $\rho = 1$ , была горизонтальной, т. е. чтобы  $(dw/d\rho)_{\rho=1} = 0$ . Это условие дает

$$(1 - \beta) = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (2.18)$$

Таким образом, получаем при  $\rho \geq \alpha$

$$\psi = \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \rho^2)} - \int_{\rho}^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu \quad (2.19)$$

Но имеем

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu &= \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \rho^2)} - \rho \int_{\rho}^1 \sqrt{\frac{1 - (\alpha^2/\rho^2)t^2}{1 - t^2}} dt + \\ &+ \left(\rho - \frac{\alpha^2}{\rho}\right) \int_{\rho}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)[1 - (\alpha^2/\rho^2)t^2]}} = \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \rho^2)} - \\ &- \rho \left[ E\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) - E\left(\frac{\alpha}{\rho}, \arcsin \rho\right) \right] + \left(\rho - \frac{\alpha^2}{\rho}\right) \left[ K\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) - F\left(\frac{\alpha}{\rho}, \arcsin \rho\right) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в (2.19), получаем окончательно при  $\rho \geq \alpha$

$$\psi = \rho \left\{ E\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) - E\left(\frac{\alpha}{\rho}, \arcsin \rho\right) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2}\right) \left[ K\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) - F\left(\frac{\alpha}{\rho}, \arcsin \rho\right) \right] \right\} \quad (2.21)$$

где  $E(k)$ ,  $E(k, \varphi)$ ,  $K(k)$  и  $F(k, \varphi)$  — обычные обозначения эллиптических интегралов.

Далее при  $\rho \leq \alpha$  получаем

$$\begin{aligned} w &= \frac{4(1 - \nu^2) R}{\pi E} \int_{\rho}^{\alpha} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \int_0^1 \left[ - (P - \gamma H) \frac{x dx}{(1 - x^2)^{1/2}} \right] + \\ &+ \frac{4(1 - \nu^2) R}{\pi E} \int_{\alpha}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \left\{ - (P - \gamma H) \int_0^{\alpha/\mu} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \gamma H \int_{\alpha/\mu}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Выполняя интегрирование и используя условие (2.18), получим

$$\psi = -\frac{\pi E w}{4(1 - \nu^2) PR} = \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \rho^2)} - \int_{\rho}^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu \quad \text{при } \rho \leq \alpha \quad (2.23)$$



Но имеем

$$\int_{\alpha}^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu = \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \rho^2)} - \alpha \int_{\alpha}^1 \sqrt{\frac{1 - (\rho^2/\alpha^2)t^2}{1 - t^2}} dt \quad (2.24)$$

Отсюда окончательно получаем при  $\rho \leq \alpha$

$$\psi = \alpha \int_{\alpha}^1 \sqrt{\frac{1 - (\rho^2/\alpha^2)t^2}{1 - t^2}} dt = \alpha \left[ E\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) - E\left(\frac{\rho}{\alpha}, \arcsin \alpha\right) \right] \quad (2.25)$$

Объем жидкости, закачанной в трещину, равен (2.26)

$$V_1 = 4\pi \int_0^{R_1} |w(r)| r dr = \frac{4(1 - \nu^2)PR^3}{E} \int_0^{\alpha} \Psi(\rho, \alpha) \rho d\rho = \frac{4(1 - \nu^2)PR^3}{E} \alpha^3 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3(1 + \sqrt{1 - \alpha^2})} \right]$$

Таким образом, задаваясь величиной давления жидкости  $P$  и горным давлением  $\gamma H$ , мы по формуле (2.18) можем найти  $\alpha$ , и, зная объем закачанной жидкости  $V_1$ , можем найти радиус трещины из формулы (2.26); далее, по формулам (2.21) и (2.25) определяется вертикальное смещение точек поверхности трещины. Полный объем трещины выражается формулой

$$V = -4\pi \int_0^R w(r) r dr = \frac{16(1 - \nu^2)PR^3}{E} \int_0^1 \Psi(\rho, \alpha) \rho d\rho = \frac{(1 - \nu^2)PR^3}{E} W(\alpha) \quad (2.27)$$

где

$$W(\alpha) = 16 \int_0^1 \Psi(\rho, \alpha) \rho d\rho \quad (2.28)$$

Приведем некоторые значения функций  $W(\alpha)$  и  $\psi_0(\alpha) = \psi(0, \alpha)$ :

$\alpha = 0.1,$	$0.2,$	$0.3,$	$0.4,$	$0.5,$	$0.6,$	$0.7,$	$0.8$	$0.9$
$W = 0.0545,$	$0.208,$	$0.458,$	$0.792,$	$1.154,$	$1.524,$	$1.880,$	$2.062,$	$1.883$
$\psi_0 = 0.1471,$	$0.2739,$	$0.3798,$	$0.4637,$	$0.5236,$	$0.5564,$	$0.5568,$	$0.5148,$	$0.4059$

Функция  $\psi_0(\alpha)$  определяет величину максимального смещения, причем в силу (2.25) имеем

$$\psi_0(\alpha) = \alpha \arcsin \alpha \quad (2.29)$$

В табл. 1 и на графике фиг. 4 приведены значения функции  $\psi^*(\rho, \alpha) = \psi(\rho, \alpha) / \psi_0(\alpha)$ , определяющей вертикальные смещения различных точек поверхности трещины.

Повидимому, на практике значения параметра  $\alpha$  близки к единице.

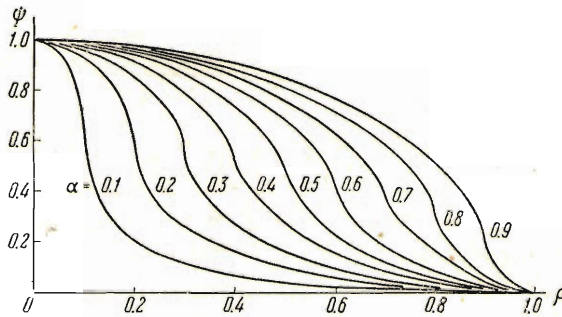
Таблица 1

$\rho$	$\alpha = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.6118	0.9244	0.9652	0.9797	0.9857	0.9894	0.9917	0.9932	0.9943
0.2	0.2080	0.5842	0.8494	0.9133	0.9416	0.9567	0.9661	0.9722	0.9766
0.3	0.1135	0.2625	0.5529	0.7878	0.8622	0.8997	0.9221	0.9367	0.9465
0.4	0.0700	0.1537	0.2730	0.5176	0.7330	0.8122	0.8561	0.8840	0.9032
0.5	0.0415	0.0935	0.1611	0.2857	0.4775	0.6797	0.7628	0.8112	0.8436
0.6	0.0258	0.0551	0.0948	0.1492	0.2338	0.4313	0.6273	0.7121	0.7645
0.7	0.0150	0.0310	0.0532	0.0824	0.1247	0.1893	0.3772	0.5903	0.6588
0.8	0.0068	0.0150	0.0253	0.0392	0.0577	0.0873	0.1708	0.3108	0.5038
0.9	0.0020	0.0044	0.0079	0.0121	0.0174	0.0230	0.0411	0.0738	0.2217

Заметим, что меридиональная линия деформированной поверхности щели при  $\rho = \alpha$ , т. е. на границе смоченной и несмоченной частей трещины, имеет вертикальную касательную. В самом деле, из формулы (2.25) получаем, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{\alpha}{\rho} \int_{\alpha}^1 \sqrt{\frac{1 - (\rho^2/\alpha^2)t^2}{1-t^2}} dt - \frac{\alpha}{\rho} \int_{\alpha}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)[1 - (\rho^2/\alpha^2)t^2]}}$$

при  $\rho = \alpha$  первый интеграл конечен, а второй обращается в бесконечность.



Фиг. 4

§ 3. Образование круглой трещины (продолжение). Будем теперь исходить из условия конечности напряжений на краю щели. Для дополнительного напряжения  $Z_z$  в плоскости щели имеет место соотношение [7]

$$(Z_z)_{z=0} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_0^{\infty} \xi^3 B(R\xi) J_0(\xi r) d\xi \quad (3.1)$$

где

$$B(\eta) = \frac{1}{\eta^2} f(\eta), \quad f(\eta) = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)R^4}{\pi E} \int_0^1 \mu \sin \mu \eta d\mu \int \frac{xg(R\mu x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.2)$$

а  $g(r)$  — по-прежнему распределение дополнительного напряжения  $Z_z$  по радиусу поверхности трещины. Подставляя (3.2) в (3.1) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$(Z_z)_{z=0} = -\frac{2R^2}{\pi} \int_0^1 \mu d\mu \int_0^1 \frac{xg(R\mu x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\infty} \xi \sin(\mu R\xi) J_0(\rho R\xi) d\xi \quad (3.3)$$

Можно показать, что<sup>1</sup>

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha\xi) \cos \beta\xi d\xi = \begin{cases} -\frac{\mu}{R^2\sqrt{(\rho^2-\mu^2)^3}} & (\mu < \rho) \\ 0 & (\mu > \rho) \end{cases} \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> Это выражение получается дифференцированием по параметру известного [9] выражения интеграла



откуда и из (3.3) получаем ( $\rho \geq 1$ )

$$(Z_z)_{z=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu^2 d\mu}{(\rho^2 - \mu^2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{xg(R\mu x) dx}{(1-x^2)^{1/2}} \quad (3.5)$$

Необходимым условием конечности интеграла правой части при  $\rho = 1$ , т. е. конечности напряжения на краю щели, является обращение в нуль внутреннего интеграла при  $\mu = 1$ , т. е. условие

$$\int_0^1 \frac{xg(Rx) dx}{V1-x^2} = 0 \quad (3.6)$$

Но в силу формулы (2.8) распределение по радиусу трещины дополнительного напряжения  $Z_z$ ,  $g(r)$  и распределение  $p(r)$  истинного напряжения  $\sigma_{zz}$  связаны соотношением  $g(r) = p(r) + \gamma H$ . Подставляя это соотношение в условие (3.6), получим формулировку условия конечности напряжений на краю щели в терминах истинных напряжений:

$$\int_0^1 \frac{x p(Rx) dx}{V1-x^2} + \gamma H = 0 \quad (3.7)$$

Равенства (3.6) и (3.7) представляют собой общие формы условия конечности напряжения на контуре щели. В частности, подставляя вместо  $g(r)$  выражение (2.13), имеющее место в случае, рассмотренном в § 2, получаем снова условие (2.18). Можно показать, обобщая рассуждения § 2, что и вообще условие (3.6) — (3.7) является одновременно условием напряжения на контуре щели и условием горизонтальности касательной к меридиональной линии деформированной поверхности щели на контуре щели.

Остановимся на одном любопытном частном случае предыдущего рассмотрения — на образовании круглой трещины сосредоточенной силой, действующей в центре щели. Пусть  $\alpha$  весьма мало; положим в формуле (2.13)  $P = F/\pi\alpha^2 R^2$  и подставим получающееся при этом выражение  $g(Rx)$  в условие (3.6). Устремляя  $\alpha$  к нулю, получаем соотношение

$$R = \sqrt{2\pi \frac{F}{\gamma H}} \quad (3.8)$$

определяющее радиус трещины, образованной сосредоточенной силой  $F$  при горном давлении  $\gamma H$ . Отметим, что в этом случае, как и в случае плоской щели, образуемой сосредоточенной силой [§ 1, формула (1.16)], размер щели с точностью до универсального постоянного множителя может быть определен из соображений теории размерности, если воспользоваться так называемой П-теоремой [10]. В самом деле, величина  $P/q_\infty$  в плоском случае и величина  $\sqrt{F/\gamma H}$  в осесимметричном случае являются единственными комбинациями размерности длины, которые можно составить из определяющих параметров, а никаких безразмерных комбинаций из определяющих параметров составить нельзя, так как в силу геометрического характера условия С. А. Христиановича, определяющего образование щелей, никакие упругие константы материала в число определяющих параметров не входят.

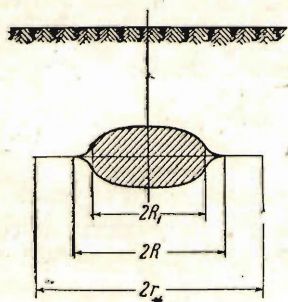
§ 4. Образование круглой трещины в разгруженном массиве. Как показано в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [1], при наличии поблизости от нефтеносного пласта разгружающего пласта глины



или какой-либо иной пластической породы вертикальное давление на кровле нефтеносного пласта, плоскость которой мы примем за плоскость  $z = 0$ , после проведения скважины и до введения жидкости и образования трещины распределяется следующим образом:

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -\gamma H + 2k \ln \frac{r_*}{r} & (0 \leq r \leq r_*) \\ -\gamma H & (r \geq r_*) \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $r_*$  — радиус разгруженной области (фиг. 5),  $k$  — константа пластичности глины, причем здесь, как и ранее, мы пренебрегаем самой скважиной, считая ее радиус пренебрежимо малым. Будем также считать радиус разгруженной области  $r_*$  большим радиуса трещины  $R$ ; случай  $r_* < R$  нуждается в особом рассмотрении.



Фиг. 5

При распределении напряжений по закону (4.1) точки кровли пласта приобретут некоторое начальное смещение  $w_0(r)$ . После введения жидкости и образования трещины на кровле пласта будут иметь место следующие условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -P \quad (0 \leq r < R_1), \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (R_1 < r \leq R) \\ w &= w_0(r) \quad (r \geq R) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(мы считаем процесс образования трещины симметричным относительно плоскости кровли, так что смещение точек кровли вне трещины остается неизменным). Пусть  $\sigma_{zz}^0$ ,  $\sigma_{rr}^0$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^0$  и  $\tau_{rz}^0$  — компоненты тензора напряжений, возникающего в массиве до образования трещины, когда распределение напряжений по кровле имеет вид (4.1), а  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\tau_{rz}$  — компоненты тензора напряжений при наличии трещины. Положим снова  $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0 + Z_z$ ,  $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0 + R_r$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^0 + \theta_0$ ,  $\tau_{rz} = \tau_{rz}^0 + R_z$ , где  $Z_z$ ,  $R_r$ ,  $\theta_0$ ,  $R_z$  — компоненты тензора дополнительных напряжений, возникающих из-за наличия трещины. Мы получаем для определения дополнительных напряжений в области  $z \leq 0$  систему уравнений (2.9) при условиях на поверхности кровли

$$R_z = 0, \quad (Z_z)_{z=0} = \begin{cases} -P + \gamma H - 2k \ln \frac{r_*}{r} & (0 \leq r < R_1) \\ \gamma H - 2k \ln \frac{r_*}{r} & (R_1 < r \leq R) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$w = 0 \quad (r \geq R) \quad (4.4)$$

где  $w$  — соответствующее тензору дополнительных напряжений вертикальное смещение точек плоскости  $z = 0$ . Пренебрегая, как и ранее, влиянием свободной поверхности и продолжая решение на область  $z \geq 0$  [что возможно в силу характера условий (4.3), (4.4)], мы приведем рассматриваемую задачу к задаче для упругого пространства с круглой трещиной, распределение напряжений на которой определяется условием (4.3).

Получающиеся при этом вертикальные смещения точек щели и определяют размеры образующейся трещины.



Выражение для  $(Z_z)_{z=0}$  из формулы (4.3) удобно переписать в виде

$$(Z_z)_{z=0} = \begin{cases} \left(-P + \gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R}\right) + 2k \ln \frac{r}{R} & (0 \leq r < R_1) \\ \left(\gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R}\right) + 2k \ln \frac{r}{R} & (R_1 < r \leq R) \end{cases} \quad (4.5)$$

Подставляя это выражение для  $(Z_z)_{z=0}$  в общее условие С. А. Христиановича (3.6), мы приведем это условие для рассматриваемого случая к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha \left[-P + \gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R} + 2k \ln x\right] \frac{x dx}{(1-x^2)^{1/2}} + \\ & + \int_\alpha^1 \left[\gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R} + 2k \ln x\right] \frac{x dx}{(1-x^2)^{1/2}} = -P[1 - \sqrt{1-\alpha^2}] + \\ & + \left(\gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R}\right) + 2k \int_0^1 \frac{x \ln x dx}{(1-x^2)^{1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Но имеем

$$\int_0^1 \frac{x \ln x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \ln 2 - 1$$

Преобразуя (4.6) и полагая  $\beta = \gamma H / P$ ,  $\delta = k / P$ , получаем окончательное выражение условия конечности напряжений и горизонтальности касательной к деформированной поверхности на контуре щели в виде

$$(1 - \alpha^2)^{1/2} - 2\delta \ln \alpha = 1 - \beta + 2\delta \ln \frac{r^*}{R_1} + 2\delta (1 - \ln 2) \quad (4.7)$$

Легко видеть, что при отсутствии разгрузки, т. е. при  $\delta = 0$ , мы приходим к прежнему условию (2.18).

Заметим, что при наличии разгрузки имеет смысл задача, соответствующая полному заполнению трещины жидкостью, т. е.  $\alpha = 1$ .

Для получения вертикального смещения поверхности трещины подставим выражение (4.5) в общую формулу (2.12). Здесь снова надо различать случаи  $\rho \geq \alpha$  и  $\rho \leq \alpha$ . При  $\rho \leq \alpha$  после преобразований получаем

$$\begin{aligned} w = & \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \left\{ \sqrt{1-\rho^2} \left[-P + \gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R} - 2k(1 - \ln 2)\right] + \right. \\ & \left. + P \int_\alpha^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu + 2k \int_\rho^1 \frac{\mu \ln \mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} \right\}, \quad \rho = \frac{r}{R} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Воспользовавшись условием (4.8), а также выражениями интеграла

$$\int_\rho^1 \frac{\mu \ln \mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}} = -\sqrt{1-\rho^2} + \rho \arccos \rho \quad (4.9)$$

и интеграла (2.24), приведем выражение (4.8) к виду

$$\phi^1 = -\frac{\pi E w}{4(1-\nu^2)RP} = \alpha \int_\alpha^1 \sqrt{\frac{1 - (\rho^2/\alpha^2)t^2}{1-t^2}} dt + 2\delta (\sqrt{1-\rho^2} - \rho \arccos \rho) \quad (4.10)$$

В случае  $\rho \geq \alpha$  после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} w = & \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \left\{ \sqrt{1-\rho^2} \left[-P + \gamma H - 2k \ln \frac{r^*}{R} - 2k(1 - \ln 2)\right] + \right. \\ & \left. + P \int_\rho^1 \sqrt{\frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \rho^2}} d\mu + 2k \int_\rho^1 \frac{\mu \ln \mu d\mu}{(\mu^2 - \rho^2)^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$



Воспользовавшись условием (4.7) и выражениями интегралов (4.9) и (2.20), приведем выражение (4.11) к виду

$$\psi^1 = -\frac{\pi E w}{4(1-\nu^2)RP} = \rho \int_{\rho}^1 \sqrt{\frac{1 - (\alpha^2/\rho^2)t^2}{1-t^2}} dt -$$

$$-\left(\rho - \frac{\alpha^2}{\rho}\right) \int_{\rho}^1 \frac{dt}{V(1-t^2)[1-(\alpha^2/\rho)t^2]} + 2\delta(\sqrt{1-\rho^2} - \rho \arccos \rho) \quad (4.12)$$

Обе формулы (4.10) и (4.12) можно объединить в виде

$$\psi^1 = \psi + 2\delta(\sqrt{1-\rho^2} - \rho \arccos \rho) \quad (4.13)$$

где  $\psi$  соответствует перемещению поверхности щели в неразгруженном массиве. В частности, при  $\rho = 0$  получаем

$$\psi_0^1(\alpha) = \psi^1(0, \alpha) = \psi_0(\alpha) + 2\delta = \alpha \arccos \alpha + 2\delta \quad (4.14)$$

Для объема трещины при наличии разгрузки имеем

$$V = 4\pi \int_0^R |w(r)| r dr = \frac{16(1-\nu^2)PR^3}{E} \int_0^1 \psi^1(\rho, \alpha) \rho d\rho = \frac{(1-\nu^2)PR^3}{E} W^1(\alpha) \quad (4.15)$$

где

$$W^1(\alpha) = 16 \int_0^1 \psi^1(\rho, \alpha) \rho d\rho =$$

$$= 16 \int_0^{\alpha} \psi(\rho, \alpha) \rho d\rho + 32\delta \int_0^1 \rho[\sqrt{1-\rho^2} - \rho \arccos \rho] d\rho = W(\alpha) + \frac{32\delta}{9} \quad (4.16)$$

Поскольку величины, определяющие перемещения поверхности трещины и объемы трещины в случае отсутствия разгрузки, уже найдены в § 2, мы по формулам (4.13) — (4.16) легко можем получить соответствующие величины для трещины в разгруженном массиве.

Поступила 15 III 1956

Институт нефти АН СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П. и Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1955.
2. Баренблатт Г. И. и Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Известия АН СССР, ОТН, № 11, 1955.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
4. Кочин Н. Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. ПММ, т. IV, вып. 1, 1940. Собрание сочинений, т. II. Изд. АН СССР, 1949.
5. Галин Л. А. Пространственные контактные задачи теории упругости для штампа круговой формы в плане. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
6. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1953.
7. Sneddon J. D. Fourier transforms. 1951. (Имеется русский перевод: И. Снеддон, Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.)
8. Titchmarsh E. C. Introduction to the theory of Fourier Integrals. 1937. (Имеется русский перевод: Е. Тичмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ИЛ, М., 1948.)
9. Рыжик Н. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
10. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М.—Л., 1954.
11. Леонов М. Я. Некоторые задачи и приложения теории потенциала, ПММ, т. IV, вып. 5—6, 1940.
12. Моссаковский В. И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью, ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.