Прикладная математика и механика. Том XX, 1956
Институт механики Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ МЕТОДАХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович
(Ростов-на-Дону)

Многие особенности работы пологих оболочек не могут быть объяснены на основе теории малых деформаций. Например, изучение возможных форм равновесия оболочки при определенных нагрузках и связанного с ними явления «хлопка» приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям, интегрирование которых наталкивается на большие трудности.

В ряде работ [1—5] решены в нелинейной постановке многие задачи, разъяснившие как с качественной, так и с количественной стороны основные факты в поведении оболочек. Однако теоретического исследования нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек, а также исследования возможности применения к ним прямых методов, насколько нам известно, в литературе пока нет. Важность изучения этих вопросов неоднократно отмечалась. В работе рассматриваются некоторые из этих вопросов.

§ 1. Основные соотношения и зависимости. Будем рассматривать вариант нелинейной теории пологих оболочек, данный в книге [6], поскольку он является наиболее распространенным. В основе этого варианта лежат следующие соотношения:

$$\varepsilon_1 = u_x + k_1 w + \tfrac{1}{2} w_x^2, \qquad \varepsilon_2 = v_y + k_2 w + \tfrac{1}{2} w_y^2$$
$$\varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y \tag{1.1}$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \qquad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)$$
$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}, \qquad 0 < \mu < 0.5 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

$$D\nabla^4 w + N_1(k_1 - w_{xx}) + N_2(k_2 - w_{yy}) - 2N_{12}w_{xy} - q = 0 \tag{1.4}$$

В формулах (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) нижний буквенный индекс указывает дифференцирование по соответствующему аргументу. Здесь u, v, w — перемещения точек срединной поверхности оболочки; k_1 и k_2 — начальные кривизны оболочки в сечениях, параллельных соответственно плоскостям zx и zy (фиг. 1); ε_1, ε_2, ε_{12} — деформации оболочки в ее срединной поверхности; N_1, N_2, N_{12} — тангенциальные усилия в оболочке; E, μ — упругие характеристики материала оболочки; h — высота оболочки; $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$ жесткость оболочки на изгиб; q — внешняя нагрузка, которая предполагается действующей вдоль оси z.

Как известно, система соотношений (1.1), (1.2), (1.3) может быть заменена следующими двумя уравнениями:

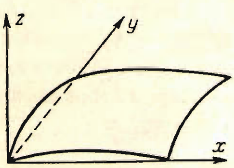
$$\nabla^2 u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\Theta_x + \frac{2}{1-\mu}\left[(k_1\ w)_x + w_x w_{xx} + \mu\,(k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}\right] + $$
$$+ w_y w_{xy} + w_x w_{yy} = 0 \qquad (1.5)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\Theta_y + \frac{2}{1-\mu}\left[(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu\,(k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}\right] + $$
$$+ w_x w_{xy} + w_y w_{xx} = 0$$

$$\theta = u_x + v_y \qquad (1.6)$$

Эти уравнения описывают процесс деформации оболочки в ее срединной поверхности с учетом влияния на этот процесс поперечных прогибов.

Перейдем теперь к формулировке условий, которые мы будем считать выполненными в дальнейшем.



Фиг. 1

А. Оболочка в плане занимает односвязную конечную область C плоскости x, y, ограниченную достаточно гладким контуром Г.

Б. Граничные условия на Г для поперечных прогибов имеют вид:

$$w\,|_{\Gamma} = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right]_{\Gamma} = 0 \qquad (1.7)$$

т. е. мы рассмотрим случай шарнирно-опертой оболочки.

Будем считать контур Г настолько гладким, что при граничных условиях (1.7) для оператора $\nabla^4 w$ существует функция Грина $G(P, Q)$, причем

$$G(P,Q) = \frac{1}{8\pi}\, r_{PQ}^2 \ln r_{PQ} + g\,(P,\ Q)$$

а функция $g\,(P,\ Q)$ имеет вторые производные по всем аргументам, принадлежащие $L_{2+\varepsilon}$ в области[1] C, где ε — сколь угодно малое фиксированное число[2].

Существование функции Грина $G(P,\ Q)$ с такими свойствами может быть обосновано методами теории функций комплексного переменного на основе результатов, данных в работах [7,8]. Используя эти результаты, можно для $G\,(P,\ Q)$ составить некоторое интегральное уравнение Фредгольма, ядро которого будет зависеть от функции $\omega(z)$, дающей отображение C на внутренность единичного круга. Известно, что степень гладкости $\omega(z)$ в $\overline{C}$ определяется степенью гладкости контура Г. Поэтому, используя данное интегральное уравнение, можно установить степень гладкости Г, при которой обеспечивается существование функции Грина $G(P,\ Q)$ с указанными выше свойствами.

---

[1] Под L_p в дальнейшем понимается пространство функций, суммируемых в C со степенью p.

[2] Данное условие будет выполнено безусловно, если, например, кривизна контура будет иметь две непрерывные производные по дуге.

B. Далее предположим, что на контуре Г заданы

$$u|_\Gamma = u(s), \qquad v|_\Gamma = v(s) \tag{1.8}$$

Кроме того, пусть для области C существует тензор Грина плоской задачи теории упругости, т. е. решение системы

$$\nabla^2 u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\Theta_x = f_1, \quad \nabla^2 v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\Theta_y = f_2 \tag{1.9}$$

при граничных условиях (1.8) дается соотношениями

$$u = u^0(P) + \int\limits_C G_{11}(P, Q) f_1(Q)\, dQ + \int\limits_C G_{12}(P, Q) f_2(Q)\, dQ \tag{1.10}$$

$$v = v^0(P) + \int\limits_C G_{21}(P, Q) f_1(Q)\, dQ + \int\limits_C G_{22}(P, Q) f_2(Q)\, dQ \tag{1.11}$$

При этом $u^0(P)$ и $v^0(P)$ удовлетворяют однородным уравнениям плоской задачи теории упругости при граничных условиях (1.8), а интегральные члены в формулах (1.10), (1.11) дают решение уравнений (1.9) при однородных граничных условиях (1.8). Пусть далее $u^0(P)$ и $v^0(P)$ имеют в C интегрируемые с квадратом первые производные.

Граничные условия (1.8) выбраны для упрощения изложения основных выводов.

Функции $q(P)$, $k_{1x}(P)$, $k_{2x}(P)$, $k_{1y}(P)$, $k_{2y}(P)$ считаются интегрируемыми с квадратом[1]. При сделанных предположениях дифференциальные уравнения (1.4), (1.5), (1.6) сводятся к одному интегро-дифференциальному уравнению, которое и будет в основном исследоваться. Для этого выразим из уравнений (1.5), (1.6) u и v через w посредством тензора Грина плоской задачи теории упругости.

Это можно сделать, если воспользоваться соотношениями (1.10), (1.11), подставив вместо f_1 и f_2 соответствующие выражения:

$$f_1 = -\frac{2}{1-\mu}[(k_1 w)_x + w_x w_{xx} + \mu(k_2 w)_x + \mu w_y w_{xy}] - w_y w_{xy} - w_x w_{yy} \tag{1.12}$$

$$f_2 = -\frac{2}{1-\mu}[(k_2 w)_y + w_y w_{yy} + \mu(k_1 w)_y + \mu w_x w_{xy}] - w_x w_{xy} - w_y w_{xx} \tag{1.13}$$

После этого, пользуясь формулами (1.2), легко найти

$$N_1 = R_{11}\{w\} + N_1{}^0(P), \quad N_2 = R_{22}\{w\} + N_2{}^0(P)$$
$$N_{12} = R_{12}\{w\} + N_{12}{}^0(P) \tag{1.14}$$

где R_{11}, R_{22}, R_{12} — некоторые интегро-дифференциальные операторы от w, а $N_1{}^0$, $N_2{}^0$, $N_{12}{}^0$ — система тангенциальных усилий, соответствующая перемещениям $u^0(P)$, $v^0(P)$.

При получении формул (1.14) имеется необходимость в однократном дифференцировании выражений (1.10), (1.11). Последнее возможно, так

---

[1] Заметим, что уравнениям (1.5), (1.6) можно придать другую форму, причем будут исключены производные k_1, k_2, вследствие чего можно ограничиться требованием интегрируемости с квадратом q, $k_1(P)$, $k_2(P)$.

как для G_{ij} известны следующие неравенства[1]:

$$|G_{ij}| \leqslant \alpha |\ln r_{PQ}| + \beta, \qquad |G_{ijx}| \leqslant \frac{\gamma}{r_{PQ}}, \qquad |G_{ijy}| \leqslant \frac{\gamma}{r_{PQ}} \tag{1.15}$$

Соотношения (1.15) для достаточно гладкого контура могут быть получены методами теории функций комплексного переменного.

Поскольку явный вид операторов R_{11}, R_{22}, R_{12} нам не потребуется, мы их здесь не приводим.

Если считать далее N_1, N_2, N_{12} выраженными через w, то уравнение (1.4) превращается в некоторое интегро-дифференциальное уравнение относительно w.

Посредством функции Грина $G(P, Q)$ уравнение может быть приведено к интегро-дифференциальному уравнению вида

$$w(P) = \int_C G(P, Q) A\{w\} \, dQ \tag{1.16}$$

где

$$A\{w\} = \frac{1}{D} \{q + N_1(-k_1 + w_{xx}) + N_2(-k_2 + w_{yy}) + 2N_{12} w_{xy}\}$$

Замечание. Можно указать две формы применения прямых методов в данной задаче: форму П. Ф. Папковича и форму В. З. Власова. В форме П. Ф. Папковича дифференциальные уравнения тангенциального напряженного состояния на каждом этапе интегрируются точно, а уравнение (1.4) после этого удовлетворяется по Бубнову—Галеркину. Правда, при этом очень часто граничные условия тангенциального напряженного состояния удовлетворяются в среднем, т. е. по Бубнову — Галеркину.

В форме В. З. Власова как уравнение (1.4), так и уравнения тангенциального напряженного состояния удовлетворяются по Бубнову—Галеркину. Мы в данной работе будем касаться пока только формы П. Ф. Папковича.

Для дальнейших рассмотрений введем гильбертово пространство H_1, образованное следующим образом: на множестве функций M, имеющих в $\overline{C}$ вторые непрерывные производные и удовлетворяющих граничным условиям (1.7), вводим скалярное произведение

$$(w_1, w_2)_{H_1} = \int_C [\nabla^2 w_1 \nabla^2 w_2 - (1-\mu)(w_{1xx} w_{2yy} + w_{1yy} w_{2xx} - 2w_{1xy} w_{2xy})] \, dQ \tag{1.17}$$

Пространство H_1 есть замыкание M в норме, порождаемой скалярным произведением (1.17). Пространство H_1 будет использоваться нами наряду с пространством непрерывных функций, пространством функций, интегрируемых со степенью pL_p, и пространством Гильберта H, где скалярное произведение определяется соотношением

$$(w_1, w_2)_H = \int_C w_1 w_2 \, dQ$$

Кроме того, в дальнейшем будет часто использоваться функционал

$$J = J_1 + J_2$$

---

[1] Следует отметить, что функции u, v, даваемые формулами (1.10), (1.11), будут дважды непрерывно дифференцируемы в C, если f_1, f_2 достаточно гладкие функции. В противном случае нужно считать, что формулы (1.10), (1.11) дают обобщенное решение системы (1.9) и их дифференцирование также производится в обобщенном смысле.

где

$$J_1 = \frac{1}{2} D \int\limits_C (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2)]\, dQ = \frac{1}{2} D \| w \|^2_{H_1}$$

$$J_2 = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int\limits_C \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \right] dQ - \int\limits_C qw\, dQ$$

дающий, как известно, полную энергию системы.

§ 2. Некоторые вспомогательные соотношения. *Лемма 2.1.* Всякая функция $w \in H_1$ принадлежит пространству непрерывных функций и удовлетворяет неравенству

$$\| w \|_C \leqslant m \| w \|_{H_1} \tag{2.1}$$

В случае, если область C есть сумма звездных областей, неравенство (2.1) есть следствие теоремы С. Л. Соболева о вложении функциональных пространств [9].

Однако можно в наших условиях доказать неравенство (2.1) и для областей несколько другого вида. Для этого введем функцию Грина $K(P, Q)$ оператора $\nabla^2 w$ при граничном условии

$$w|_\Gamma = 0$$

При помощи $K(P, Q)$ может быть записано тождество

$$w = \int\limits_C K(P, Q) \nabla^2 w\, dQ \quad \text{для } w \in H_1 \tag{2.2}$$

Далее

$$|w| = \left| \int\limits_C K(R, Q) \nabla^2 w\, dQ \right| \leqslant \left| \int\limits_C K(P, Q)\, w_{\zeta\zeta}\, dQ \right| + \left| \int\limits_C K(P, Q)\, w_{\eta\eta}\, dQ \right| \tag{2.3}$$

Учитывая, что для достаточно гладкого контура $\int\limits_C K^2(P, Q)\, dQ \leqslant m_1$, если $P \in \bar{c}$

$$|w| \leqslant m \left\{ \left(\int\limits_C m_{\zeta\zeta}^2\, dQ \right)^{1/2} + \left(\int\limits_C w_{\eta\eta}^2\, dQ \right)^{1/2} \right\} \tag{2.4}$$

Далее, поскольку подинтегральное выражение для $\| w \|_{H_1}^2$ есть положительно определенная квадратичная форма w_{xx}, w_{yy}, w_{xy} при сделанных относительно μ предположениях, то существует константа m такая, что [1]

$$\int\limits_C w_{xx}^2\, dQ \leqslant m^2 \| w \|^2_{H_1}, \quad \int\limits_C w_{xy}^2\, dQ \leqslant m^2 \| w \|^2_{H_1}, \quad \int\limits_C w_{yy}^2\, dQ \leqslant m^2 \| w \|^2_{H_1} \tag{2.5}$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) вытекает требуемое неравенство (2.1).

Лемма 2.2. Для функций $w \in H_1$ имеет место неравенство Фридрихса

$$\| w \|_{L_2} \leqslant m \| w \|_{H_1} \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) вытекает сразу из (2.1).

---

[1] Разумеется, константы m в формулах (2.1), (2.4), (2.6), (2.7) разные, но чтобы не вводить несущественных индексов, мы все константы и в последующих неравенствах там, где это не сможет повлечь недоразумений, будем обозначать одной буквой m.

Лемма 2.3. Для функций $w \in H_1$ имеют место соотношения

$$\| w_x \|_{L_p} \leqslant m(p) \| w \|_{H_1}, \qquad \| w_y \|_{L_p} \leqslant m(p) \| w \|_{H_1} \tag{2.7}$$

причем константа $m(p)$ не зависит от w, а зависит от области C и p.

В случае, если C состоит из некоторого числа звездных областей, неравенства (2.7) даются теоремой о вложении функциональных пространств [9].

Однако неравенства (2.7) могут быть получены и в более широких условиях. Для этого заметим, что обобщенная производная w_x дается формулой [10]

$$w_x = \int\limits_C \frac{\partial}{\partial x} K(P, Q) \nabla^2 w \, dQ \tag{2.8}$$

Далее известно, что при достаточно гладком контуре

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} K(P, Q) \right| \leqslant \frac{\nu_1}{r_{PQ}} \tag{2.9}$$

поэтому интеграл (2.8) обладает свойствами интеграла типа потенциала [9].

В силу известных свойств интегралов типа потенциала [9] имеем

$$\| w_x \|_{L_p} = \left\| \int\limits_C \frac{\partial}{\partial x} K(P, Q) \nabla^2 w \, dQ \right\|_{L_p} \leqslant \left\| \int\limits_C \frac{\partial}{\partial x} K(P, Q) w_{\zeta\zeta} \, dQ \right\|_{L_p} + \\ + \left\| \int\limits_C \frac{\partial}{\partial x} K(P, Q) w_{\eta\eta} \, dQ \right\|_{L_p} \leqslant m \| w_{\zeta\zeta} \|_{L_2} + m \| w_{\eta\eta} \|_{L_2} \tag{2.10}$$

причем

$$p < q_1 = \frac{2 \cdot 2}{2 - (2-1)\, 2} = \infty$$

Учтя неравенства (2.5) и (2.10), мы получим лемму 2.3.

Лемма 2.4. Пусть имеется последовательность $w_n \in H_1$, сильно сходящаяся в этом пространстве.

В таком случае w_n сходится в пространстве непрерывных функций, а w_x и w_y сильно сходятся в любом L_p при $p > 1$.

Утверждение леммы 2.4 непосредственно следует из лемм 2.1 и 2.3.

Лемма 2.5.

$$[G(P, Q_1) G(P, Q_2)]^1_{H_{1p}} = G(Q_1, Q_2) \tag{2.11}$$

Доказательство леммы 2.5 можно провести, интегрируя по частям левую часть (2.11).

Несколько проще можно получить это утверждение, если ввести систему собственных чисел λ_n и функций χ_n интегрального уравнения

$$\chi_n = \lambda_n \int\limits_C G(P, Q) \chi_n(Q) \, dQ \tag{2.12}$$

В силу положительной определенности и симметричности $G(P, Q)$ существует счетное множество собственных элементов χ_n, λ_n, причем $\lambda_n > 0$.

---

1 Левая часть (2.11) есть скалярное произведение $G(P, Q_1)$ и $G(P, Q_2)$ в метрике H_1, если эти функции рассматривать как функции точки P при фиксированных Q_1 и Q_2.

Далее, известно, что $\chi_n / \sqrt{\lambda_n}$ есть замкнутая ортонормированная система в H_1 и для $G(P, Q_1)$ и $G(P, Q_2)$ справедливы сходящиеся по норме H_1 разложения

$$G(P, Q_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(P)}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\chi_n(Q_1)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad G(P, Q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(P)}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\chi_n(Q_2)}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{2.13}$$

Из (2.13) следует

$$[G(P, Q_1) G(P, Q_2)]_{H_{1P}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(Q_1)}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\chi_n(Q_2)}{\sqrt{\lambda_n}} = G(Q_1, Q_2) \tag{2.14}$$

Заметим также, что если $\varphi_n(P)$ произвольная ортонормированная в H_1 система функций, но такая, что по норме в H_{1P} имеет место разложение

$$R_n(P, Q) = \sum_{m=n}^{\infty} \varphi_n(P) \varphi_m(Q) \tag{2.15}$$

то справедливо соотношение

$$[R_n(P, Q_1) R_n(P, Q_2)]_{H_{1P}} = R_n(Q_1, Q_2) \tag{2.16}$$

Лемма 2.6. Пусть $\Phi(Q)$ интегрируема в C с квадратом, $\Psi(Q)$ интегрируема в C с любой степенью $p > 0$. В этом случае функция $\Phi(Q)\,\Psi(Q)$ интегрируема со степенью $2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leqslant 2$. Доказательство леммы дается сразу применением неравенства Гельдера:

$$\int_C |\Phi\Psi|^{2-\varepsilon} dQ \leqslant \Big\{\int_C |\Phi|^{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}} dQ\Big\}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \Big\{\int_C |\Psi|^{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}2} dQ\Big\}^{\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \Big\{\int_C \Phi^2\, dQ\Big\}^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \Big\{\int_C |\Psi|^{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}2} dQ\Big\}^{\frac{\varepsilon}{2}} \tag{2.17}$$

Лемма 2.7. Пусть последовательность $\Phi_n(Q)$ сходится по норме в $L_{2-\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 1$. В этом случае последовательности

$$\alpha_n = \int_C G_{ijx}(P, Q)\, \Phi_n(Q)\, dQ, \qquad \beta_n = \int_C G_{ijy}(P, Q)\, \Phi_n(Q)\, dQ \tag{2.18}$$

сходятся по норме в L_p, $p > 1$.

Рассмотрим, например, последовательность α_n. Принимая во внимание, что $|G_{ijx}(P, Q)| \leqslant \nu_1 / r_{PQ}$, получим

$$|\alpha_m - \alpha_n| \leqslant \nu \int_C \frac{|\Phi_m - \Phi_n|}{r_{PQ}} dQ$$

В силу известных свойств интегралов типа потенциала [9] имеем

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|_{L_{q^\circ}} \leqslant \sigma \|\Phi_m - {}_n\|_{L_{2-\varepsilon}} \tag{2.19}$$

При этом

$$q^0 < \frac{2(2-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{4}{\varepsilon} - 2$$

Поскольку ε сколь угодно мало, то q^0 может быть сколь угодно велико. Совершенно аналогично доказывается лемма 2.7 и в отношении последовательности β_n.

Лемма 2.8. Пусть имеется некоторое множество $w_n \in H_1$, причем $\|w_n\| \leqslant \rho$ (ρ от n не зависит). В этом случае

$$\left| \int_C A\{w_n\}\, dQ \right| \leqslant R$$

причем R от n также не зависит.

Поскольку $w_n \in H_1$, то согласно лемме 2.3 $w_{nx}, w_{ny} \in L_p$, причем $p > 1$, $\|w_{nx}\|_{L_p} \leqslant m \|w_n\|_{H_1}$ и аналогичная оценка имеет место и для w_{ny}.

Далее из формулы (2.17) получаем $w_{nx} w_{nxx} \in L_{2-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое число, причем

$$\| w_{nx} w_{nxx} \|_{L_{2-\varepsilon}} \leqslant m \| w_{nxx} \|_{L_2} \| w_{nx} \|_{L_{\frac{2(2-\varepsilon)}{\varepsilon}}} \leqslant m \| w_n \|_{H_1}{}^2 \leqslant m\rho^2$$

m зависит только от ε. Аналогичные неравенства можно получить и для произведений вида $w_{nx} w_{nyy} \ldots$

После этого из (1.12), (1.13) заключаем, что $f_i \in L_{2-\varepsilon}$, где ε сколь угодно мало, причем

$$\|f_i\|_{L_{2-\varepsilon}} \leqslant C_1\rho + D_1\rho^2 \tag{2.20}$$

где C_1, D_1 зависят только от ε.

Далее из (1.10), (1.11) при помощи оценки (1.15) заключаем, что u_x, v_y, u_y, v_x даются через f_1, f_2 при помощи интегралов типа потенциала, вследствие чего имеют место оценки

$$\|u_x\|_{L_p} \leqslant m \{ \|u^0\|_{L_2} + \|f_1\|_{L_{2-\varepsilon}} + \|f_2\|_{L_{2-\varepsilon}} \} \leqslant B_1 + C_2\rho + C_3\rho^2 \tag{2.21}$$

Далее из (1.2) получаем $\|N_1\|_{L_p} \leqslant B_2 + C_4\rho + D_2\rho^2$, где B_2, D_2, C_4 зависят только от p.

Из (1.16), учтя, что k_1, k_2, q суммируемы в C с квадратом при помощи оценки для $\| N_1 \| L_p$, получаем

$$\int_C |A\{w_n\}|\, dQ \leqslant B_3 + C_5\rho + D_3\rho^2 + E_3\rho^3 \tag{2.22}$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Существование решения. Для доказательства существования решения нашей задачи мы используем тот факт, что

$$\mathrm{grad}_{H_1} J = Dw - \int_C G(P, Q)\, A\{w\}\, dQ$$

Эту формулу можно доказать непосредственно, исходя из определения градиента функционала. Поскольку этот факт механически очевиден, более подробно мы здесь обосновывать его не будем. Таким образом, доказательство существования решений уравнения (1.16) сводится фактически к доказательству существования критических точек у функционала J. Последнее основывается на следующих леммах.

Лемма 3.1. Функционал J ограничен в H_1 снизу. Данная лемма является следствием следующей цепи неравенств:

$$J = \frac{D}{2}\|w\|_{H_1}{}^2 + \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_C \left[\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \tfrac{1}{2}(1-\mu)\,\varepsilon_{12}{}^2 \right] dQ - \tag{3.1}$$

$$- \int_C qw\, dQ \geqslant \frac{D}{2}\|w\|_{H_1}{}^2 - \int_C \frac{q^2}{2\varepsilon}\, dQ - \int_C \frac{\varepsilon w^2}{2}\, dQ \geqslant \left(\frac{D}{2} - \frac{\varepsilon}{2m} \right) \|w\|_{H_1}{}^2 - \int_C \frac{q^2}{2\varepsilon}\, dQ$$

вытекающей из положительности потенциальной энергии растяжения срединной поверхности, неравенства (2.6) и элементарного неравенства $|ab| \leqslant a^2/2\varepsilon + {}^1/_2\varepsilon b^2$, справедливого при любом $\varepsilon > 0$. Выбрав ε так, чтобы ${}^1/_2 D - \varepsilon/2m > 0$, заключаем, что

$$J \geqslant -\int\limits_C \frac{q^2}{2\varepsilon} dQ$$

Пусть d_0 — точная нижняя грань J в H_1 и пусть w_n — минимизирующая последовательность.

Лемма 3.2. Всякая минимизирующая последовательность слабо компактна в H_1.

Поскольку $\lim J\{w_n\} = d_0$ при $n \to \infty$, то $J\{w_n\} < D_0$, где D_0 — некоторая константа. Отсюда получаем

$$\|w_n\|_{H_1}^2 \left(\frac{D}{2} - \frac{\varepsilon}{2m}\right) - \int\limits_C \frac{q^2}{2\varepsilon} dQ \leqslant J\{w_n\} \leqslant D_0$$

Это дает

$$\|w_n\|_{H_1}^2 \leqslant \frac{1}{{}^1/_2 D - {}^1/_2\,\varepsilon/m}\left(D_0 + \int\limits_C \frac{q^2}{2\varepsilon} dQ\right)$$

Таким образом, вся последовательность w_n содержится в сфере некоторого радиуса пространства H_1 и, следовательно, слабо компактна.

Лемма 3.3. Функционал J_2 слабо непрерывен в H_1.

Легко видеть, что в силу неравенства (2.6) функционал

$$\int\limits_C qw\,dQ$$

является линейным в H_1, поэтому надлежит рассмотреть функционал

$$J_3 = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int\limits_C \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\,\varepsilon_{12}^2\right] dQ$$

Пусть последовательность $\Theta_n \in H_1$ слабо сходится к Θ_0. Докажем, что последовательности ε_{1n}, ε_{2n}, ε_{12n} будут сходиться сильно в любом $L_p\,(2 \geqslant p > 1)$, чем и будет показана слабая непрерывность J_3.

Рассмотрим для примера ε_{1n}. Имеем $\varepsilon_{1n} = u_{nx} + {}^1/_2\,\Theta_{nx}^2$. Поскольку Θ_n слабо сходится в H_1, то из теорем вложения С. Л. Соболева и В. И. Кондрашова вытекает сильная сходимость в любом L_p, $p > 1$ последовательностей Θ_{nx}, Θ_{ny}.

Рассмотрим теперь u_{nx}. Из (1.10) имеем

$$u_{nx} = \int\limits_C G_{11x} f_{1n}\, dQ + \int\limits_C G_{12x} f_{2n}\, dQ + u_x^0 \tag{3.2}$$

Функции f_{1n}, f_{2n} содержат слагаемые вида $\Theta_{nx}\Theta_{nxx}$. Следовательно, можно ограничиться изучением последовательностей вида

$$\int\limits_C G_{11x}\Theta_{nx}\Theta_{nxx}\, dQ \ldots$$

Имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_C G_{11x}(\Theta_{0x}\Theta_{0xx} - \Theta_{nx}\Theta_{nxx})\, dQ = \\ = \int\limits_C G_{11x}(\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx})\,\Theta_{0x}\, dQ - \int\limits_C G_{11x}(\Theta_{0x} - \Theta_{nx})\,\Theta_{nxx}\, dQ\end{gathered} \tag{3.3}$$

Из леммы 2.7 заключаем, что второй из интегралов правой части (3.3) сходится к нулю в любом $L_p (p > 1)$. В силу леммы 2.6 последовательность $(\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx})\Theta_{0x} \in L_{2-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое число. Докажем, что эта последовательность слабо сходится к нулю в $L_{2-\varepsilon}$. Действительно, произвольный функционал в $L_{2-\varepsilon}$ будет иметь вид:

$$F_n = \int\limits_C \Psi (\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx})\,\Theta_{0x}\, dQ \qquad (\Psi \in L_{(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)})$$

Этот же функционал можно рассматривать как линейный в H_1 относительно $\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx}$. В самом деле, имеем

$$\Big|\int\limits_C \Psi (\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx})\,\Theta_{0x}\, dQ\Big| =$$

$$= \Big\{\int\limits_C |\Psi|^{\frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}} dQ\Big\}^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} \Big\{\int\limits_C |\Theta|^{\frac{2(2-\varepsilon)}{\varepsilon}} d\Theta\Big\}^{\frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}} \Big\{\int\limits_C (\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx})^2\, dQ\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

где ε — сколь угодно малое число. В силу слабой сходимости $\Theta_0 - \Theta_n$ к нулю в H_1 имеем $\lim F_n = 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $(\Theta_{0xx} - \Theta_{nxx})\Theta_{0x}$ слабо сходится в $L_{2-\varepsilon}$. В силу оценки (1.15) интегралы (3.3) являются интегралами типа потенциала, а поэтому сходятся к нулю в любом $L_p (p > 1)$. Отсюда следует, что и u_{nx} сходится в любом $L_p (2 \geqslant p > 1)$.

Теорема. Всякая минимизирующая последовательность сильно компактна в H_1.

Для доказательства рассмотрим некоторое бесконечное подмножество w_n. Выделим слабо сходящуюся последовательность w_m, и пусть w_k и w_l — два члена этой последовательности с достаточно большими номерами.

В силу квадратичности J_1 имеем[1]

$$J_1 \{\tfrac{1}{2}(w_k - w_l)\} = \tfrac{1}{2} J_1 \{w_k\} + \tfrac{1}{2} J_1 \{w_l\} - J_1 \{\tfrac{1}{2}(w_k + w_l)\} + \tfrac{1}{2} J_2 \{w_k\} * \quad (3.4)$$

$$+ \tfrac{1}{2} J_2 \{w_l\} - \tfrac{1}{2} J_2 \{w_k\} - \tfrac{1}{2} J_2 \{w_l\} - J_2 \{\tfrac{1}{2}(w_k + w_l)\} + J_2 \{\tfrac{1}{2}(w_k - w_l)\}$$

Последние шесть членов в формуле (3.4) взаимно уничтожаются. В силу того, что w_n — минимизирующая последовательность, для достаточно больших k и l будут иметь место неравенства

$$\tfrac{1}{2} J_1 \{w_k\} + \tfrac{1}{2} \{w_k\} \leqslant \tfrac{1}{2} d_0 + \varepsilon_k, \quad \tfrac{1}{2} J_1 \{w_l\} + \tfrac{1}{2} J_2 \{w_l\} \leqslant \tfrac{1}{2} d_0 + \varepsilon_l$$

$$J_1 \{\tfrac{1}{2}(w_k + w_l)\} + J_2 \{\tfrac{1}{2}(w_k + w_l)\} > d_0$$

Учтя эти соотношения, а также слабую непрерывность J_2 в H_1, из (3.4) получаем $J_1 \{{}^1/_2 (w_k - w_l\} < \varepsilon_{kl}$, где ε_{kl} будет сколь угодно малым, если k и l достаточно велики. Отсюда вытекают сильная сходимость w_m и сильная компактность минимизирующей последовательности в H_1.

Пусть теперь w_0—слабый предел w_n в H_1. В силу доказанной теоремы w_0 будет также сильным пределом в H_1; следовательно, $J \{w_0\} = \lim J \{w_n\} = d_0$ при $n \to \infty$. Следовательно, w_0 — одна из критических точек функционала J.

---

[1] Данный прием применялся при исследовании полигармонических уравнений [9].

Отметим, что существование хотя бы одного решения нашей задачи может быть показано при помощи одной теоремы, данной в работе [11] без доказательства. При использовании этой теоремы предварительно требуется доказать полную непрерывность оператора $\int G(P, Q)\, A\{w\}\, dQ$. Это утверждение для случая заделанной оболочки доказано [12]. Однако легко видеть, что доказательство без всяких изменений может быть применено и в рассматриваемом здесь случае шарнирно-опертой оболочки. Заметим также, что после доказательства слабой непрерывности J_2 в H_1 полная непрерывность $\int G(P,Q)\, A\, dQ$ следует из теоремы о том, что градиент слабо непрерывного функционала в H_1 есть вполне непрерывный оператор [13]. Здесь дается непосредственное доказательство существования решения рассматриваемой задачи, так как при этом попутно выясняются некоторые важные свойства минимизирующих последовательностей (сильная компактность в H_1). Заметим также, что формула (1.16) позволяет установить степень гладкости полученного решения в зависимости от гладкости q, k_1, k_2 и гладкости контура Г.

§ 4. Обоснование метода Бубнова—Галеркина и метода Ритца в нелинейной теории пологих оболочек. Первый вопрос, с которым приходится сталкиваться при применении указанных прямых методов, это разрешимость основных алгебраических уравнений, которые мы получаем на каждом этапе применения методов.

Теорема. Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ принадлежат H_1. Предположим, что приближенное представление для w ищется в виде $w_n = c_{n1} + \cdots + c_{nn}\varphi_n$, а c_{nk} определяются методом Бубнова—Галеркина в форме П. Ф. Папковича или методом Ритца, примененного к функционалу J. В этом случае при использовании обоих методов мы получаем относительно c_{nk} одну и ту же систему алгебраических уравнений, допускающую всегда по крайней мере одно действительное решение.

Доказательство этого факта для случая заделанной оболочки дано в [12], и оно опирается только на неравенство Фридрихса. Поскольку это неравенство доказано и для случая шарнирно-опертой оболочки (лемма 2.2), доказательство этого факта в [12] целиком переносится на случай шарнирно-опертой оболочки.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых свойств приближений w_n. Пусть $\varphi_1, \ldots$ образуют в H_1 ортонормированный базис. Мы полагаем $\varphi_1, \ldots$ ортонормированными, так как это удобно при практическом применении метода, а также при теоретических рассмотрениях, хотя по существу и не принципиально. Докажем, что при этих условиях w_n будет содержать минимизирующую последовательность. Действительно, мы показали, что в H_1 имеется функция w_0 такая, что $J\{w_0\} = d_0$. Поскольку φ_n образуют в H_1 базис, то существует комбинация $c_{n1}^{0}\varphi_1 + \cdots + c_{n1}^{0}\varphi_n$, такая, что $\|w_0 - (c_{n1}^{0}\varphi_1 + \cdots + c_{nn}^{0}\varphi_n)\| \leqslant \varepsilon_n$, где ε_n сколь угодно мало. В силу сильной непрерывности J будем иметь

$$d_0 + \tau_n \geqslant J\{c_{n1}^{0}\varphi_1 + \cdots + c_{nn}^{0}\varphi_n\} \geqslant d_0 \, (\lim \tau_n = 0 \text{ при } n \to \infty) \tag{4.1}$$

Показано [12], что среди w_n, определяемых по методу Бубнова—Галеркина или Ритца (что в данном случае одно и то же), имеется такая функция w_n^{0}, которая придает J на линеале $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ минимум. В силу этого должны осуществляться неравенства $d_0 + \tau_n \geqslant J\{w_n^0\} \geqslant d_0$. Поскольку $\lim \tau_n = 0$ при $n \to \infty$, то w_n есть минимизирующая последовательность. По ранее доказанному, она сильно компактна. Однако на каждом этапе применения указанных прямых методов мы, вообще говоря, будем получать не единственное решение для c_{nk}, и если оболочка при данной нагрузке имеет несколько форм равновесия, то множество приближенных решений вовсе не исчерпывается минимизирующей последовательностью. Роль остальных приближений в аппроксимации других форм равновесия оболочки, которым не соответствует абсолютный минимум энергии, определяет следующая теорема.

Теорема. Все множество приближений, получаемых по методу Бубнова—Галеркина, заключенное в сфере пространства H_1 достаточно большого произвольного радиуса, бесконечно и сильно компактно в H_1. Каждая предельная точка w_n в H_1 есть решение уравнения (1.16).

Предварительно будет доказана

Лемма 4.1. Пусть $\varphi_1, \ldots$ образуют в H_1 ортонормированный базис. В этом случае имеет место разложение

$$G(P, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)\varphi_k(Q) \tag{4.2}$$

в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| G(P, Q) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(P)\varphi_k(Q) \right\|_{H_{1P}} = \lim_{n\to\infty} \| R_n(P, Q) \|_{H_{1P}} = 0$$

равномерно, если $Q \in \overline{C}$.

Легко видеть, что система $\varphi_m(P)\varphi_n(Q)$ образует базис на множестве функций $\Omega(P, Q)$, удовлетворяющих условиям: $[\Omega(P, Q)\varphi_n(Q)]_{H_1 Q} \in H_1$ для любого n и, наоборот, $[\Omega(P, Q)\varphi_m(P)]_{H_{1P}} \in H_1$ для любого m.

В силу этого имеет место разложение

$$G(P, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_{kl}\varphi_k(P)\varphi_l(Q) \tag{4.3}$$

Докажем теперь, что

$$g_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l \\ 1, & \text{если } k = l \end{cases} \tag{4.4}$$

В самом деле, имеем

$$G(P, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_n(P)\Psi_n(Q) \tag{4.5}$$

где $\Psi_n(P)$ — собственные функции уравнения

$$\Psi_n = \lambda_n \int_C G(P, Q)\Psi_n dQ$$

ортонормированные в H_1. Отсюда получаем

$$g_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi_k \varphi_m)_{H_1} (\Psi_k \varphi_n)_{H_1}$$

Вместе с этим справедливы соотношения

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_m \Psi_k)_{H_1} \Psi_k, \quad \varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_n \Psi_k)_{H_1} \Psi_k$$

Отсюда следует

$$(\varphi_m \varphi_n)_{H_1} = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_n \Psi_k)_{H_1} (\varphi_m \Psi_k)_{H_1} = g_{mn}$$

В силу ортонормированности φ_n мы получаем (4.4).

Рассмотрим теперь

$$\| Rn(P, Q) \|^2_{H_{1Q}} = \left\| G(P, Q) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(P) \varphi_k(Q) \right\|^2_{H_{1Q}} = Rn(P, P) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k^2 \quad (4.6)$$

Ряд (4.2) сходится равномерно относительно P при фиксированном Q. Это следует из того, что ряд (4,2) сходится при фиксированном P в норме H_{1Q} и из леммы 2.4.

Таким образом, ряд (4.6) сходится в каждой точке. Но поскольку все члены ряда положительные непрерывные функции и сумма ряда также непрерывная функция, ряд (4.6) сходится равномерно.

Перейдем теперь к доказательству сформулированной теоремы. Поскольку, как было показано ранее, совокупность приближений, получаемых по методу Бубнова—Галеркина, содержит минимизирующую последовательность, то в сфере H_1 достаточно большого радиуса содержится бесконечное число приближений.

Для доказательства их сильной компактности образуем вспомогательное множество $w_n^{\times}$ следующим образом:

$$w_n^{\times} = \int_C G(P, Q) A\{w_n\} dQ$$

Поскольку оператор $\int_C G(P, Q) A\{w_n\} dQ$ вполне непрерывен, то $w_n^{\times}$ сильно компактно в H_1. Далее имеет место соотношение

$$w_n = \int_C G_n(P, Q) A\{w_n\} dQ$$

из которого получаем

$$w_n^{\times} - w_n = \int_C R_n(P, Q) A\{w_n\} dQ$$

Отсюда

$$\| w_x^{\times} - w_n \|_{H_1}^2 = \int_C \int_C [R_n(P, Q_1) R_n(P, Q_2)]_{H_1 P} A_{Q_1}\{w_n\} A_{Q_2}\{w_n\} dQ_1 dQ_2 =$$

$$= \int_C \int_C R_n(Q_1, Q_2) A_{Q_1}\{w_n\} A_{Q_2}\{w_n\} dQ_1 dQ_2$$

В последнем преобразовании использовалось соотношение (2.16) леммы 2.5. В силу того, что $\lim R_n(Q_1, Q_2) = 0$ при $n \to \infty$, если $Q_1, Q_2 \in \overline{C}$, а также в силу леммы 2.8 заключаем $\lim \| w_n^{\times} - w_n \|_{H_1} = 0$ при $n \to \infty$, откуда и вытекает сильная компактность w_n.

Пусть теперь w_0 — какая-либо предельная точка множества w_n. Легко доказывается [12], что w_0 есть решение уравнения (1.16).

Как видно из предыдущего, в основе проведенных рассмотрений лежат неравенство Фридрихса и факт существования функций Грина для плоской задачи теории упругости и задачи изгиба пластины, ограниченной тем же контуром, что и оболочка. В силу этого на основе результатов, данных в [14—18], все изложенные выше факты можно распространить на все практически интересные условия, в том числе и смешанные закрепления оболочки относительно тангенциального и изгибного напряженных состояний. В основном весь вопрос сведется к получению оценок для функций Грина и их производных.

§ 5. О характере сходимости последовательностей из w_n. В предыдущем параграфе было показано, что при определенных условиях множество приближений w_n сильно компактно в H_1. Сильная сходимость в H_1 означает сходимость в среднем последовательностей $w_{nxx}, w_{nxy}, w_{nyy}$, сходимость в любом L_p, $p > 1$ последовательностей w_{nx}, w_{ny}, а также равномерную сходимость в $\overline{C}$ последовательности w_n. При этом следует заметить, что наиболее интересные с практической точки зрения величины — напряжения в оболочке — выражаются через вторые производные от w.

Поэтому для надежного определения напряжений было бы желательно установить условия, которые обеспечивали бы равномерную сходимость последовательностей $w_{nxx}, w_{nxy}, w_{nyy}$ в C. Предположим, что функции $\varphi_n(P)$ помимо условия (4.2) подчинены еще следующим условиям:

$$\left| G_{xx} - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kxx}(P)\varphi_k(Q) \right| \leqslant \frac{\delta_n}{r_{PQ}^{\sigma}} \tag{5.1}$$

$$\left| G_{xy} - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kxy}(P)\varphi_k(Q) \right| \leqslant \frac{\delta_n}{r_{PQ}^{\sigma}} \tag{5.2}$$

$$\left| G_{yy} - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kyy}(P)\varphi_k(Q) \right| \leqslant \frac{\delta_n}{r_{PQ}^{\sigma}} \tag{5.3}$$

причем $0 < \sigma < 2$ и δ_n — некоторая числовая последовательность, сходящаяся к нулю. Пусть, далее, $u^0, v^0 \in W_\infty^{(1)}$. Здесь через $W_\infty^{(1)}$ обозначено множество функций, определенных в C и имеющих первые производные, интегрируемые со сколь угодно большой степенью.

Рассмотрим теперь соотношение

$$w_{xx} - w_{nxx} = \int_C G_{xx} A\{w\}\, dQ - \int_C G_{nxx} A\{w_n\}\, dQ =$$

$$= \int_C (G_{xx} - G_{nxx})\, A\{w_n\}\, dQ + \int_C G_{xx}\,[A\{w\} - A\{w_n\}]\, dQ \tag{5.4}$$

Изучим более подробно каждый из двух членов правой части соотношения (5.4). Последовательность $A\{w_n\}$ сходится к $A\{w\}$ по норме в любом пространстве L_p, где p — число, большее 1 и сколь угодно близкое к 2, но меньшее 2.

Поскольку $G_{xx} \in L_{2+\varepsilon}$, где ε — определенное число, то отсюда, используя неравенство Гельдера, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_C G_{xx}(P, Q)\,[A\{w\} - A\{w_n\}]\,dQ \right| = 0$$

причем равномерно относительно $P \in \overline{C}$.

Рассмотрим теперь более подробно первый член соотношения, предположив, что $\sigma < 1$. Имеем

$$\left| \int_C (G_{xx} - G_{nxx})\,A\{w_n\}\,dQ \right| \leqslant \delta_n \int_C \frac{1}{r_{PQ}^{\sigma}} |A\{w_n\}|\,dQ \tag{5.5}$$

Правая часть (5.5) есть интеграл типа потенциала.

При этом $A\{w_n\} \in L_{2-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое число и, кроме того, $\|A\{w_n\}\|_{L_{2-\varepsilon}} \leqslant M_1$ (M_1 от n не зависит). В силу известных свойств интегралов типа потенциала заключаем, что

$$\int_C \frac{1}{r_{PQ}^{\sigma}} |A\{w_n\}|\,dQ \leqslant M_2$$

где M_2 также от n не зависит. Поскольку $\delta_n \to \infty$, то отсюда заключаем, что при сделанных предположениях $\lim |w_{nxx} - w_{oxx}| = 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $P \in \overline{C}$. Точно так же в этом случае доказывается равномерная сходимость w_{nxy}, w_{nyy}.

Рассмотрим теперь случай $1 \leqslant \sigma < 2$. Пусть q непрерывна в $\overline{C}$. В этом случае

$$\int_C \frac{1}{r_{PQ}^{\sigma}} |A\{w_n\}|\,dQ$$

не будет ограничен по абсолютной величине, но будет ограничен по норме в некотором L_{q_1}.

При этом в силу свойств интегралов типа потенциала имеем

$$q_1 = \frac{2q_0}{2 - (2-\sigma)\,q_0} - \lambda \tag{5.6}$$

где $q_0 = 2 - \varepsilon$ и ε и λ могут быть взяты сколь угодно малыми. Из (5.6) видно, что q_1 может быть взято несколько больше q_0. Таким образом, мы показали, что w_{nxx} сходится по норме в некотором L_{q_1}, причем $q_1 > q_0$. После этого можно уже утверждать, что $A\{w_n\}$ сходится в пространстве $L_{q_1-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое число.

Повторив весь цикл рассуждений, можно показать, что w_{nxx} будет сходиться по норме в L_{q_2}, причем q_2 несколько больше q_1 и т. д.

Докажем, что при достаточно большом s — числе шагов — мы получим такое q_s, что можно будет сделать заключение о равномерной сходимости w_{nxx}. Для этого лучше всего обратиться к геометрической интерпретации этих фактов.

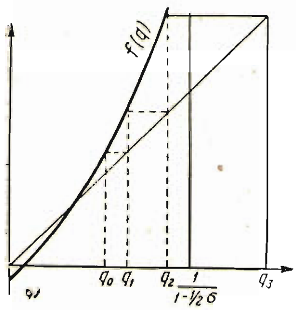
Из (5.6) следует, что для q_s можно принять рекурентное соотношение

$$q_{s+1} = \frac{2q_s}{2 - (2-\sigma)\,q_s} - \lambda \tag{5.7}$$

Из свойств интегралов типа потенциала можно сделать заключение о равномерной сходимости w_{nxx}, если

$$\sigma < 2\left(1 - \frac{1}{q_s}\right), \qquad \text{или} \quad q_s > \frac{1}{1 - {}^1/_2\sigma} \tag{5.8}$$

На фиг. 2 дан график правой части (5.7). Легко видеть, что q_s получаются такими, как если бы мы решали уравнение



Фиг. 2

$$q = \frac{2q}{2 - (2 - \sigma)\, q} - \lambda \tag{5.9}$$

последовательными приближениями по схеме (5.7). Очевидно также, что если нулевое приближение выбрано справа от точки пересечения биссектрисы координатного угла и кривой (5.9) (фиг. 2), то процесс итераций будет расходиться, и при достаточном числе шагов s согласно неравенству (5.8) можно сделать заключение о равномерной сходимости w_{nxx}. Однако в силу того, что λ может быть выбрано сколь угодно малым, точка B (фиг. 2) может быть передвинута сколь угодно близко к началу координат, а q_0 может быть взято сколь угодно близким к 2.

Таким образом, и в этом случае равномерно в $\bar{C}$ сходятся последовательности w_{nxx}, w_{nxy}, w_{nyy}.

§ 6. Некоторые вспомогательные соотношения. Рассмотрим основное интегро-дифференциальное уравнение нашей задачи:

$$w(P) = \int_C G(P, Q)\, A\{w\}\, dQ \tag{6.1}$$

Наряду с ним рассмотрим другое уравнение, «близкое» к (6.1):

$$w(P) = \int_C G(P, Q)\, A\{w\}\, dQ + B^\circ\{w\} \tag{6.2}$$

где $B_0\{w\}$ — некоторый нелинейный оператор, определенный в H_1; свойства этого оператора будут описаны несколько ниже. Пусть уравнение (6.1) имеет решение w_0, а уравнение (6.2) решение $w_0 + w_1$.

Учтя, что $A\{w\}$ есть полилинейный оператор от w, мы для w_1 получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$w_1 = A_1\{w_1\} + A_2\{w_1\} + A_3\{w_1\} + B^\circ\{w_0 + w_1\} \tag{6.3}$$

Здесь $A_1\{w_1\}$ — линейный оператор, являющийся производной Фреше оператора $\int G(P, Q)\, A dQ$; через $A_2\{w_1\}$ обозначен полилинейный оператор второй степени, $A_3\{w_1\}$ — полилинейный оператор третьей степени.

Фактическое решение уравнения (6.3) иногда производят приближенно [19], применяя разложения по степеням малого параметра, введенного в уравнение. Этот метод впервые к нелинейным интегральным уравнениям был применен Ляпуновым, а в последнее время он использовался и для исследования некоторых функциональных уравнений. Мы при некоторых условиях дадим обоснование метода малого параметра в применении к нашей задаче.

При этом дополнительно получим некоторые данные о свойствах решений уравнения (6.3). Для этого прежде всего заметим, что из (1.16) следует, что при достаточно гладком контуре Γ всякое решение уравнения (1.16), принадлежащее H_1, имеет в $\overline{C}$ непрерывные производные первого и второго порядка.

Изучим теперь более подробно операторы $A_1\{w_1\}$, $A_2\{w_1\}$, $A_3\{w_1\}$, так как свойствами этих операторов по существу и определяются свойства решений уравнения (6.3). Рассмотрим тангенциальные усилия, соответствующие прогибу $w_0 + w_1$.

Соотношения (1.1), (1.2), (1.10), (1.11) дают возможность придать тангенциальным усилиям следующий вид:

$$N_1 = N_{10} + N_{11} + N_{12}, \qquad N_2 = N_{20} + N_{21} + N_{22},$$
$$N_{12} = N_{120} + N_{121} + N_{122} \tag{6.4}$$

Здесь N_{10}, N_{20}, N_{120} — тангенциальные усилия, соответствующие перемещению w_0; $N_{11} + N_{12}$, $N_{21} + N_{22}$, ... — дополнительные усилия, возникающие за счет дополнительного прогиба w_1, причем

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[(u_{x1} + k_1 w_1 + w_{0x} w_{1x}) + \mu (v_{y1} + k_2 w_1 + w_{0y} w_{1y})\right] \tag{6.5}$$

где

$$u_{x1} = \int\limits_C G_{11x} f_{11} dQ + \int\limits_C G_{12x} f_{21}\, dQ \tag{6.6}$$

$$v_{y1} = \int\limits_C G_{21y} f_{11} dQ + \int\limits_C G_{22y} f_{21} dQ \tag{6.7}$$

$$f_{11} = \frac{\partial}{\partial \mu} f_1 \{w_0 + \mu w_1\}\Big|_{\mu=0}, \qquad f_{21} = \frac{\partial}{\partial \mu} f_2 \{w_0 + \mu w_1\}\Big|_{\mu=0} \tag{6.8}$$

и аналогичные соотношения могут быть получены и для N_{21}, N_{121}.

Лемма 6.1. Оператор $A_1\{w_1\}$ есть вполне непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_1.

Данная лемма вытекает из теоремы Шаудера — Лерея о полной непрерывности оператора, являющегося производной Фреше вполне непрерывного оператора.

Лемма 6.2. Однородный квадратичный оператор A_2 может быть представлен в виде

$$A_2\{w_1\} = \sum_{i=1}^{n_1} B_i \{C_{i1}\{w_1\}\, C_{i2}\{w_1\}\} \tag{6.9}$$

где B_i, C_{i1}, C_{i2} являются линейными операторами, причем

$$\| B_i \{C_{i1}\{\varphi\}\, C_{i2}\{\psi\}\} \|_{H_1} \leqslant \sigma_1 \|\varphi\|_{H_1} \|\psi\|_{H_1} \tag{6.10}$$

где σ_1 — некоторая постоянная.

Для доказательства рассмотрим явный вид оператора A_2. Имеем

$$A_2\{w_1\} = \int\limits_C C(P, Q)\,(N_{12} w_{0xx} + N_{22} w_{0yy} + 2N_{122} w_{0xy} +$$
$$+ N_{11} w_{1xx} + N_{21} w_{1yy} + 2N_{121} w_{1xy} - k_1 N_{12} - k_2 N_{122})\, dQ \tag{6.11}$$

Как видно из (6.11), $A_2\{w_1\}$ состоит из членов вида

$$P_1\{w_1\}=\int\limits_C GN_{11}w_{1xx}\,dQ, \quad P_2\{w_1\}=\int\limits_C GN_{12}(-k_1+w_{0xx})\,dQ \tag{6.12}$$

Поэтому рассмотрим каждый из таких членов в отдельности. Имеем

$$P_1\{w_1\}=\int\limits_C GN_{11}w_{1xx}\,dQ=\frac{E}{1-\mu^2}\int\limits_C [u_{x1}+k_1w_1+w_{0x}w_{1x}+$$
$$+\mu(v_{y1}+k_2w_1+w_{0y}w_{1y})]\,w_{1xx}\,dQ$$

причем u_{x1} и v_{y1} должны быть взяты из соотношений (6.6), (6.7). Легко видеть, что

$$P_1\{w_1\}=P\{\varphi,\psi\}\Big|_{\varphi=\psi=w_1}=$$

$$=\frac{E}{1-\mu^2}\int\limits_C G\,[u_{x1}\{\varphi\}+k_1\varphi+w_{0x}\varphi_x+\mu(v_{y1}\{\varphi\}+k_2\varphi+w_{0y}\varphi_y)]\,\psi_{xx}\,dQ\Big|_{\varphi=\psi=w_1}$$

где u_{x1} и v_{y1} определяются соотношениями (6.6), (6.7), в которые вместо w_1 следует подставить φ.

Неравенство (6.10) для данного слагаемого будет получено, если будут доказаны следующие неравенства:

$$\Big\|\int\limits_C Gu_{x1}\{\varphi\}\,\psi_{xx}\,dQ\Big\|_{H_1}\leqslant\sigma_2\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \tag{6.13}$$

$$\Big\|\int\limits_C Gv_{y1}\{\varphi\}\,\psi_{xx}\,dQ\Big\|_{H_1}\leqslant\sigma_3\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \tag{6.14}$$

$$\Big\|\int\limits_C Gw_{0x}\varphi_x\psi_{xx}\,dQ\Big\|_{H_1}\leqslant\sigma_4\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \tag{6.15}$$

$$\Big\|\int\limits_C Gw_{0y}\,\varphi_y\psi_{xx}\,dQ\Big\|_{H_1}\leqslant\sigma_5\|\varphi\|_{H_1} \tag{6.16}$$

Неравенства вида

$$\Big\|\int\limits_C Gk_1\varphi\psi_{xx}\,dQ\Big\|_{H_1}\leqslant\sigma_6\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1}$$

очевидны. Докажем неравенство (6.13):

$$\Big\|\int\limits_C Gu_{x1}\{\varphi\}\,\psi_{xx}dQ\Big\|_{H_1}^2=$$

$$=\int\limits_C\int\limits_C G(Q_1,Q_2)\,u_{x1}\{\varphi(Q_1)\}\,u_{x1}\{\varphi(Q_2)\}\,\psi_{xx}(Q_1)\,\psi_{xx}(Q_2)\,dQ_1\,dQ_2\leqslant$$

$$\leqslant G_{\max}\int\limits_C u_{x1}^2\,dQ\int\limits_C\psi_{xx}^2\,dQ\sigma_7$$

Далее легко видеть, что

$$\int\limits_C u_{x1}^2\,dQ\leqslant\sigma_8\|\varphi\|_{H_1}^2 \tag{6.17}$$

Это неравенство вытекает из неравенства (6.6), если при этом учесть, что f_{11} и f_{21} даются соотношениями (6.8). Кроме того, из (2.5) следует

$$\int\limits_C\psi_{xx}^2\,dQ\leqslant\sigma_9\|\psi\|_{H_1}^2 \tag{6.18}$$

Из (6.17) и (6.18) получаем

$$\Big\|\int\limits_C Gu_{x1}\{\varphi\}\,\psi_{xx}\,dQ\Big\|_{H_1}\leqslant\sigma_{10}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \tag{6.19}$$

Доказательство неравенства (6.14) производится совершенно аналогично. Рассмотрим теперь неравенство (6.15)

$$\left\| \int\limits_C G w_{0x} \varphi_x \psi_{xx} \, dQ \right\|_{H_1}^2 =$$

$$= \int\limits_C \int\limits_C G(Q_1, Q_2) w_{0x}(Q_1) w_{0x}(Q_2) \varphi_x(Q_1) \varphi_x(Q_2) \psi_{xx}(Q_1) \psi_{xx}(Q_2) \, dQ_1 \, dQ_2 \leqslant$$

$$\leqslant \max | G(Q_1, Q_2) w_{0x}(Q_1) w_{0x}(Q_2) | \left(\int\limits_C \varphi_x(Q) \psi_{xx}(Q) \, dQ \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{11} \int\limits_C \varphi_x^2 dQ \int\limits_C \psi_{xx}^2 \, dQ \leqslant \sigma_4 \| \varphi \|_{H_1}^2 \| \psi \|_{H_1}^2$$

Так же доказывается и неравенство (6.16).

Перейдем теперь к рассмотрению членов вида $P_2\{w_1\}$. Имеем

$$P_2\{w_1\} \|_{H_1}^2 = \int\limits_C \int\limits_C G(Q, Q_2) N_{12}(Q_1) N_{12}(Q_2) (w_{0xx} - k_1)_{Q_1} (w_{0xx} - k_2)_{Q_2} \, dQ_1 \, dQ_2 \leqslant$$

$$\leqslant G_{\max} \left[\int\limits_C N_{12}(Q) (w_{0xx} - k_1) \, dQ \right]^2 \leqslant G_{\max} \int\limits_C N_{12}^2 \, dQ \int\limits_C (w_{0xx} - k_1)^2 \, dQ \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{12} \int\limits_C N_{12}^2 \, dQ = \sigma_{12} \| N_{12} \|_{L_2}^2 \qquad (6.20)$$

Далее

$$N_{12} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[u_{x2} + \frac{1}{2} w_{1x}^2 + \mu \left(v_{y2} + \frac{1}{2} w_{1y}^2 \right) \right] \qquad (6.21)$$

причем

$$u_{x2} = \int\limits_C G_{11x} f_{12} dQ + \int\limits_C G_{12x} f_{22} dQ, \quad v_{y2} = \int\limits_C C_{21x} f_{12} \, dQ + \int\limits_C C_{22x} f_{22} \, dQ \qquad (6.22)$$

где **(6.23)**

$$f_{12} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} f_1 \{ w_0 + \nu w_1 \} |_{\nu=0} = - \frac{2}{1-\mu} (w_{1x} w_{1xx} + \mu w_{1y} w_{1xy}) - w_{1y} w_{1xy} - w_{1x} w_{1yy}$$

$$f_{22} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} f_2 \{ w_0 + \nu w_1 \} |_{\nu=0} = - \frac{2}{1-\mu} (w_{1y} w_{1yy} + \mu w_{1x} w_{1xy}) -$$

$$- w_{1x} w_{1xy} - w_{1y} w_{1xx} \qquad (6.24)$$

Легко видеть, что

$$N_{12} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[u_{x_2} \{\varphi, \psi\} + \mu \bar{v}_y \{\varphi, \psi\} + \frac{1}{2} \varphi_x \psi_x + \frac{1}{2} \mu \varphi_y \psi_y \right]_{\varphi=\psi=w_1} \qquad (6.25)$$

где u_{x2}, v_{y2} — билинейные операторы от φ, ψ, определяющиеся соотношениями (6.22), (6.23), (6.24). При этом в каждом члене правой части формул (6.22), (6.23), (6.24) вместо одного множителя подставляется соответственно φ_x или φ_y, а вместо другого ψ_{xx}, или ψ_{yy}, или ψ_{xy}.

Оценим теперь норму каждого члена правой части формулы (6.25) в L_2, учтя, что φ и $\psi \in H_1$.

Для этого вспомним, что φ_x, φ_y принадлежат L_p при $p > 1$, а ψ_{xx}, ψ_{xy}, ψ_{yy} интегрируемы с квадратом, благодаря чему в силу леммы 2.6 произведения вида $\varphi_x \psi_{yy}$ и т. д. принадлежат $L_{2-\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leqslant 2$, причем

$$\| \varphi_x \psi_{xx} \|_{L_{2-\varepsilon}} \leqslant \sigma_{13} \| \varphi \|_{H_1} \| \psi \|_{H_1}$$

Далее, в силу известных свойств интегралов типа потенциала[9], каждое из слагаемых в правых частях (6.22) принадлежит L_2 и, кроме того,

$$\| u_{x_2}\{\varphi, \psi\}\|_{L_2} \leqslant \sigma_{14}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1}, \qquad \| v_{y_2}\{\varphi, \psi\}\|_{L_2} \leqslant \sigma_{15}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \quad (6.26)$$

Последние же два слагаемых в правой части (6.25) допускают очевидную оценку

$$\|\varphi_x\psi_x\|_{L_2} \leqslant \sigma_{16}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1}, \qquad \|\varphi_y\psi_y\|_{L_2} \leqslant \sigma_{17}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \quad (6.27)$$

Из (6.22) — (6.25) следует, что $\|N_{12}\|_{L_2} \leqslant \sigma_{18}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1}$. Из (6.20) имеем

$$\|P_2\{\varphi, \psi\}\|_{H_1} \leqslant \sigma_{19}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \quad (6.28)$$

Аналогичные неравенства могут быть доказаны и для всех остальных членов $A_2\{w_1\}$ вида P_2.

Таким образом, каждый член правой части (6.12) оценивается неравенством вида (6.28). Вследствие этого соотношения (6.9) и (6.10) можно считать доказанными.

Лемма 6.3. Оператор $A_3\{w_1\}$ есть однородный оператор третьей степени относительно w_1, представимый в виде

$$A_3\{w_1\} = \sum_{i=1}^{n_2} E_i\{M_{i1}\{w_1\} M_{i2}\{w_1\} M_{i3}\{w_1\}\}$$

где E_i, M_{i1}, M_{i2}, M_{i3} — линейные операторы, причем

$$\|E_i\{M_{i1}\{\varphi\} M_{i2}\{\psi\}, M_{i3}\{\chi\}\|_{H_1} \leqslant \sigma_{20}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1}\|\chi\|_{H_1} \quad (6.29)$$

Для доказательства леммы рассмотрим явный вид оператора $A_3\{w_1\}$:

$$A_3\{w_1\} = \int_C G(N_{12}w_{1xx} + N_{22}w_{1yy} + 2N_{122}w_{1xy})\, dQ \quad (6.30)$$

Рассмотрим каждый член суммы, стоящей в правой части (6.30). Для примера возьмем

$$\int_C GN_{12}w_{1xx}dQ = \int_C G\frac{E}{1-\mu^2} w_{1xx}\left[u_{x2} + \tfrac{1}{2}w_{1x}^2 + \mu\left(v_{y2} + \tfrac{1}{2}w_{1y}^2\right)\right] dQ =$$

$$= \int_C G\frac{E}{1-\mu^2}\chi_{xx}\left[u_{x2}\{\varphi, \psi\} + \tfrac{1}{2}\varphi_x\psi_x + \mu v_{y2}\{\varphi, \psi\} + \frac{\mu}{2}\varphi_y\psi_y\right] dQ \Big|_{\chi=\varphi=\psi=w_1} \quad (6.31)$$

В правой части (6.31) имеем слагаемые двух видов:

$$P_3\{\varphi, \psi, \chi\} = \int_C G\chi_{xx}u_{x2}dQ, \qquad P_4\{\varphi, \psi, \chi\} = \int_C G\chi_{xx}\varphi_x\psi_x dQ$$

Постоянный множитель $E/(1-\mu^2)$ ради краткости будем считать включенным в G. Имеем

$$\|P_3\|_{H_1}^2 = \int_C\int_C G(Q_1, Q_2)\chi_{xx}(Q_1)\chi_{xx}(Q_2)u_{x2}(Q_1)u_{x2}(Q_2)\,dQ_1dQ_2 \leqslant$$

$$\leqslant G_{\max}\int_C \chi_{xx}^2\, dQ \int_C u_{x2}^2 dQ\sigma_{21}$$

Учтя неравенства (2.5) и неравенства (6.26), окончательно получим

$$\|P_3\|_{H_1}^2 \leqslant \sigma_{22}^2\|\chi\|_{H_1}^2\|\varphi\|_{H_1}^2\|\psi\|_{H_1}^2 \quad \text{или} \quad \|P_3\|_{H_1}^2 \leqslant \sigma_{22}\|\chi\|_{H_1}\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{H_1} \quad (6.32)$$

Рассмотрим теперь

$$\| P_4 \|_{H_1}{}^2 = \| \int_C G \chi_{xx} \varphi_x \psi_x dQ \|_{H_1}{}^2 =$$

$$= \int_C \int_C G(Q_1, Q_2) \chi_{xx}(Q_1) \chi_{xx}(Q_2) \varphi_x(Q_1) \varphi_x(Q_2) \psi_x(Q_1) \psi_x(Q_2) dQ_1 dQ_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{23} \left\{ \int_C \chi_{xx}(Q_1) \varphi_x(Q_1) \psi_x(Q_1) dQ_1 \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{24} \int_C \chi_{xx}{}^2 dQ \left(\int_C \varphi_x{}^4 dQ \right)^{1/2} \left(\int_C \psi_x{}^4 dQ \right)^{1/2} \leqslant \sigma_{25}{}^2 \| \chi \|_{H_1}{}^2 \| \varphi \|_{H_1}{}^2 \| \psi \|_{H_1}{}^2$$

Отсюда

$$\| P_4 \|_{H_1} \leqslant \sigma_{25} \| \chi \|_{H_1} \| \varphi \|_{H_1} \| \psi \|_{H_1} \tag{6.33}$$

Таким образом, для любого члена правой части (6.31) справедливы оценки типа (6.32) или (6.33). Вследствие этого становится очевидной и оценка (6.29).

§ 7. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра в случае, если $\lambda = 1$ не есть собственное значение уравнения первого приближения (неособое решение). Рассмотрим уравнение, получающееся введением в (6.3) параметра ν:

$$w_1 = A_1\{w_1\} + A_2\{w_1\} + A_3\{w_1\} + \nu B^\circ\{w_0 + w_1\} \tag{7.1}$$

Относительно оператора B° предположим, что

$$B^\circ\{w_0 + w_1\} = B^\circ\{w\} + B_1{}^\circ\{w_1\} + B_2{}^\circ\{w_1\} + B_3{}^\circ\{w_1\} \tag{7.2}$$

причем оператор $B_1{}^\circ\{w_1\}$ есть линейный оператор, $B_2{}^\circ\{w_1\}$ — полилинейный оператор второй степени, а $B_3{}^\circ\{w_1\}$ — полилинейный оператор третьей степени. Операторы $B_2{}^\circ$, $B_3{}^\circ$ определяются следующим образом:

$$B_2{}^\circ\{w_1\} = \sum_{i=1}^{n_3} Q_i\{S_{i1}\{w_1\} S_{i2}\{w_1\}\} \tag{7.3}$$

$$B_3{}^\circ\{w_1\} = \sum_{i=1}^{n_4} T_i\{F_{i1}\{w_1\} F_{i2}\{w_1\} F_{i3}\{w_1\}\} \tag{7.4}$$

где Q_i, S_{i1}, S_{i2}, T_i, F_{i1} F_{i2}, F_{i3} — линейные операторы, действующие из H_1 в H_1, при этом, кроме того, выполняются соотношения

$$\| B^\circ\{w_0\} \|_{H_1} \leqslant \varepsilon a, \qquad \| Q_i\{S_{i1}\{\varphi\} S_{i2}\{\psi\}\} \|_{H_1} \leqslant \varepsilon b \| \varphi \|_{H_1} \| \psi \|_{H_1} \tag{7.5}$$

$$\| B_1{}^\circ \|_{H_1} \leqslant \varepsilon, \qquad \| T_i\{F_{i1}\{\varphi\} F_{i2}\{\psi\} F_{i3}\{\chi\}\} \|_{H_1} \leqslant \varepsilon c \| \varphi \|_{H_1} \| \psi \|_{H_1} \| \chi \|_{H_1}$$

где a, b, c, ε — некоторые константы.

Поскольку оператор $A_1\{w_1\}$ является вполне непрерывным, уравнение $w_1 - \lambda A_1\{w_1\} = 0$ имеет дискретный спектр. Предположим, что $\lambda = 1$ не есть собственное число уравнения $w_1 - \lambda A_1\{w_1\} = 0$. Механический смысл этого условия будет выяснен ниже.

В этом случае оператор $w_1 - A_1\{w_1\}$ имеет ограниченный обратный оператор K^* и уравнение (7.1) может быть записано в следующем виде:

$$w_1 = K^* A_2\{w_1\} + K^* A_3\{w_1\} + \nu K^* B^\circ\{w_0\} +$$

$$+ \nu K^* B_1{}^\circ\{w_1\} + \nu K^* B_2{}^0\{w_1\} + \nu K^* B_3{}^\circ\{w_1\} \tag{7.6}$$

Будем искать решение уравнения (7.1) в виде степенного ряда

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n w_{1n} \tag{7.7}$$

Все коэффициенты w_{1n} последовательно найдутся, если подставить (7.7) в (7.6) и приравнять в правой или левой части коэффициенты при одинаковых степенях ν.

Следует теперь только выяснить характер сходимости ряда (7.7). Для этого рассмотрим алгебраическое уравнение относительно неизвестной $\varkappa$:

$$\varkappa = \|K^*\|\, k_3\sigma_1\varkappa^2 + \|K^*\|\, k_4\sigma_{20}\varkappa^3 + \nu\|K^*\|\,\varepsilon\,(a + \varkappa + bk_5\varkappa^2 + ck_6\varkappa^3) \tag{7.8}$$

где k_3, k_4, k_5, k_6 — постоянные; $\|K^*\|$ есть норма оператора K^* в H_1.

Будем решать наше уравнение, разлагая $\varkappa$ по степеням ν:

$$\varkappa = \sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_m \nu^m \tag{7.9}$$

Все коэффициенты $\varkappa_m$ найдутся из (7.8), если подставить туда (7.9) и приравнять все коэффициенты при одинаковых степенях ν в правой и левой частях.

Далее вследствие неравенств (6.10), (6.29), (7.5) можно выбрать постоянные k_3, k_4, k_5, k_6 таким образом, что ряд (7.9) будет мажорирующим для ряда (7.7) и поэтому ряд (7.7) будет безусловно сходиться по норме в H_1 при тех же значениях ν, при которых сходится ряд (7.9).

Радиус сходимости (7.9) легко определяется из следующих соображений. Уравнение (7.8) определяет, вообще говоря, $\varkappa$ как голоморфную функцию ν в окрестности $\nu = 0$. Голоморфность $\varkappa(\nu)$ сохранится до того значения ν^*, при котором уравнение (7.8) будет иметь краткий корень. Это значение определяется как функция $\|K^*\|$ и ε, причем простое исследование показывает, что ν^* будет не меньше 1, если ε будет меньше некоторого $\varepsilon_0(\|K^*\|)$. Таким образом, w_1 представляется в виде сходящегося в норме H_1 ряда (7.7), который при достаточно малых $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0\|K^*\|)$ сходится при $\nu = 1$. Далее из (7.8) следует, что если $\varepsilon \to 0$, то при $\nu = 1$ это уравнение имеет корень $\varkappa \to 0$, причем $\varkappa \leqslant m\varepsilon$.

Поэтому, если в неравенствах (7.5) $\varepsilon \to 0$, то $\|w\|_{H_1} \to 0$, причем $w_1\|_{H_1} \leqslant m\varepsilon$.

В разных конкретных случаях оператору B^0 можно придавать различный вид и получать различные разложения для w_1.

§ 8. Разложение решения в ряд в случае, если $\lambda = 1$ есть собственное значение уравнения $w_1 = \lambda A_1\{w_1\}$ (особое решение). Как известно, в этом случае уравнение $w_1 = A_1\{w_1\}$ может иметь только конечное число собственных элементов, соответствующих собственному значению $\lambda = 1$. Мы предположим, что имеется только один собственный элемент $\theta^0(P)$, хотя все сказанное ниже легко может быть получено и в общем случае.

Исследование уравнения (6.3) в этих условиях легко может быть произведено методом Э. Шмидта, после того как доказаны неравенства (6.10), (6.29), и если выполняются неравенства (7.5). Полагая, что уравнение (6.3) разрешимо, несмотря на то, что $\lambda = 1$ есть собственное значение уравнения $w_1 = \lambda A_1\{w_1\}$, мы можем его свести к следующему уравнению:

$$w_1 = K^* A_2\{w_1\} + K^* A_3\{w_1\} + K^* B^\circ\{w_0 + w_1\} + l\theta^\circ \tag{8.1}$$

где K^* — оператор, обратный $w_1 - A_1\{w_1\}$ в случае его существования, а l — некоторая постоянная, определяющаяся из условия существования K^*.

Вместо уравнения (8.1) рассмотрим уравнение с параметром

$$w_1 = K^* A_2\{w_1\} + K^* A_3\{w_1\} + \nu K^* B^\circ\{w_0 + w_1\} + l\theta^\circ \tag{8.2}$$

Попробуем теперь решать уравнение (8.2), представив решение в виде

$$w_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{1mn}\nu^m l^n, \qquad w_{00} \equiv 0 \tag{8.3}$$

Такое представление решения w_1 возможно для достаточно малых ν и l. Действительно, если наряду с (8.2) рассмотреть уравнение (8.4)

$$\varkappa = \|K^*\| k_3\sigma_1\varkappa^2 + \|K^*\| k_4\sigma_{20}\varkappa^3 + \nu\|K^*\|\varepsilon(a + \varkappa + $$
$$+ bk_5\varkappa^2 + ck_6\varkappa^3) + |-l\,|\,\|\theta^\circ\|_{H_1}$$

где $\|K^*\|$ — норма оператора K^*, то легко заметить, что корень уравнения (8.4), обращающийся в нуль при $l = \nu = 0$, дается рядом

$$\varkappa = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_{mn} l^m \nu^n, \qquad \varkappa_{00} = 0 \tag{8.5}$$

Кроме того, ряд (8.5) будет мажорирующим для ряда (8.3), если k_3, k_4, k_5, k_6 соответствующим образом выбраны. Несложное исследование показывает, что ряд (8.5) имеет конечный радиус сходимости.

Для определения постоянной l следует ряд (8.5) подставить в выражение

$$A_2\{w_1\} + A_3\{w_1\} + \nu B^\circ\{w_0 + w_1\} \tag{8.6}$$

и потребовать, чтобы (8.6) было ортогонально θ° в метрике H_1. В результате получаем уравнение вида

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}\nu^m l^n = 0 \tag{8.7}$$

При этом все дальнейшие выводы существенно зависят от того, какие из первых коэффициентов ряда (8.7) не равны нулю.

Мы не будем производить полного исследования всех возможных здесь вариантов, а остановимся на важнейших. Предположим, что в (8.7) $\alpha_{10} \neq 0$. Легко видеть, что $\alpha_{10} = (B^\circ\{w_0\}\,\theta^\circ)_{H_1}$.

Рассмотрим далее те члены (8.7), которые содержат только l в какой-либо степени.

Во всех практически важных случаях наинизшая степень в этих членах будет 2.

В этом случае для достаточно малых ν будет справедливо разложение

$$l = \beta_1 \nu^{1/2} + \beta_2 \nu^{2/2} + \beta_3 \nu^{3/2} + \ldots \tag{8.8}$$

вытекающее из (8.7). При этом коэффициенты β_1, $\beta_2, \ldots$ не всегда действительны. Если (8.8) подставить в (8.3), то мы снова получим разложение w_1 в ряд, но не по целым степеням ν, а по степеням $\nu^{1/2}$. Этот ряд будет сходиться при $\nu = 1$, если ε достаточно мало.

Далее из (8.4) следует, что при $\varepsilon \to 0$ и l, определяемом соотношением (8.8), корень уравнения (8.4), стремящийся к нулю, удовлетворяет неравенству

$$|\varkappa| \leqslant m|l| \tag{8.9}$$

Отметим в заключение, что леммы 6.1, 6.2, 6.3 позволяют обосновать также и применение к уравнению (6.3) разных вариантов метода последовательных приближений.

§ 9. Некоторые свойства решений нелинейной теории пологих оболочек. *Лемма. 9.1.* Пусть решение w_0 не является особым, т. е. пусть $\lambda = 1$ не есть собственное значение уравнения первого приближения. В этом случае решение w_0 принадлежит множеству предельных точек приближенных решений $\{w_n\}$, получаемых по методу Бубнова—Галеркина, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют в H_1 базис.

Эта лемма вытекает из одного весьма общего результата, данного в работе [20], поскольку оператор $\int G(P,Q)\, A\{w\}\, dQ$ является вполне непрерывным.

Кроме того, в силу этого же результата погрешность приближения w_0 посредством w_n оценивается в метрике H_1 следующим образом:

$$\| w_0 - w_n \|_{H_1} \leqslant (1 + \varepsilon_n) \| \rho_n \|_{H_1} \tag{9.1}$$

где ρ_n — остаток ряда Фурье w_0 по φ_n и $\lim \varepsilon_n = 0$ при $n \to \infty$. Оценка (9.1) может быть использована очень часто практически, поскольку из (1.16) возможно оценить степень гладкости решений w_0 в зависимости от степени гладкости q, k_1, k_2 и контура Γ. Зная же гладкость решений, можно оценить быстроту сходимости ряда Фурье по крайней мере в том случае, если φ_n являются тригонометрическими функциями или полиномами относительно x, y. Наряду с оценкой (9.1) можно использовать и другую оценку, которую легко получить на основе результатов § 7. В самом деле, приближенное решение w_n определяется уравнением:

$$w_n = \int\limits_C G_n(P,\ Q)\, A\{w_n\}\, dQ = \int\limits_C G A\{w_n\}\, dQ - \int\limits_C R_n A\{w_n\}\, dQ \tag{9.2}$$

Совершим замену $w_n = w_0 + w_1$. Легко видеть, что

$$w_1 = A_1\{w_1\} + A_2\{w_1\} + A_3\{w_1\} - \int\limits_C R_n A\{w_0 + w_1\}\, dQ \tag{9.3}$$

причем оператор $-\int R_n(P,\ Q)\, A\{w_0 + w_1\}\, dQ$ удовлетворяет всем условиям (7.2), (7.3), (7.4) и может быть принят в качестве оператора B°, а $\varepsilon = \max|R_n(P,\ Q)|$, если $P,\ Q \in \overline{C}$. Отсюда на основе результатов § 7 заключаем, что справедливо следующее утверждение:

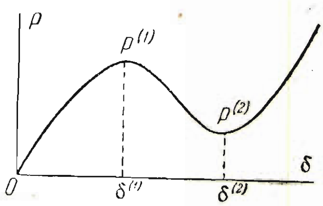
Погрешность приближений, получаемых по методу Бубнова—Галеркина, если φ_k образуют в H_1 ортонормированный базис, дается неравенством

$$\| w_1 \|_{H_1} \leqslant m \max | R_n(P, Q) |, \qquad P, Q \in \overline{C} \tag{9.4}$$

В случае, если φ_k еще дополнительно удовлетворяют условиям (5.1), (5.2), (5.3), будет иметь место оценка

$$| w_1 | + | w_{1x} | + | w_{1y} | + | w_{1xx} | + | w_{1xy} | + | w_{1yy} | \leqslant m\delta_n \tag{9.5}$$

Заметим, что оценка (9.4) будет во многих случаях хуже, чем оценка (9.1). Однако ее использование не связано с знанием быстроты сходимости ряда Фурье заранее неизвестного решения. Если мы имеем дело с особым решением, то, как уже отмечалось, в наиболее распространенных практических случаях ряд для l имеет вид (8.8). Результаты § 8 позволяют для этого случая сформулировать следующее утверждение.



Фиг. 3

Погрешность приближений, получаемых по методу Бубнова—Галеркина, если φ_k образуют в H_1 ортонормированный базис, может оказаться комплексной, т. е. действительное решение может оказаться пределом комплексных приближений. При этом погрешность, если имеет место разложение (8.8), будет даваться соотношением

$$\| w_1 \|_{H_1} \leqslant m \max | R_n(P, Q) |^{1/2}, \qquad P, Q \in C \tag{9.6}$$

В случае, если, кроме того, выполнены соотношения (5.1), (5.2), (5.3), будет иметь место еще и следующая оценка погрешности:

$$| w_1 | + | w_{1x} | + | w_{1y} | + | w_{1xx} | + | w_{1xy} | + | w_{1yy} | \leqslant m\delta_n{}^{1/2} \tag{9.7}$$

Заметим в заключение, что особое и неособое напряженные состояния оболочки различаются также и по своим механическим свойствам. Это различие заключается в следующем. Предположим для примера, что заделанная оболочка в виде сферического сегмента достаточно большой кривизны нагружена равномерным давлением.

В этом случае, как известно, зависимость максимального прогиба оболочки δ от нагрузки дается в характерных случаях (фиг. 3) (по крайней мере для не слишком больших δ).

Особые решения соответствуют напряженным состояниям оболочки, получающимся при экстремальных нагрузках, которые мы условно обозначим на фиг. 3 через $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$. Им соответствуют прогибы $\delta^{(1)}$ и $\delta^{(2)}$.

При этих напряженных состояниях сколь угодно малые произвольные изменения нагрузки неизбежно приводят к «хлопку», к перескоку из одного напряженного состояния в другое. Все остальные напряженные состояния даются неособыми решениями. В этих случаях произвольным, но малым изменениям нагрузки всегда соответствуют малые изменения напряженного состояния.

Поступила 29 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Теория устойчивости и больших деформаций цилиндрической оболочки при сжатии и сдвиге. Сборник «Расчет пространственных конструкций». Изд. Министерства строительства предприятий машиностроения, 1950.
2. Колтунов М. А. Учет конечных перемещений в задаче изгиба и устойчивости пологих оболочек. Вестник Московского университета, № 5, 1952.
3. Муштари Х. М., Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1950.
4. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. ПММ, т. XII, вып. 4, 1948.
5. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
6. Власов В. З. Общая теория оболочек. ГИТТЛ, М.— Л., 1949.
7. Фридман М. М. Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной плиты, опертой вдоль края. ПММ, т. XVI, 1952.
8. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
9. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова, 1950.
10. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.— Л., 1952.
11. Красносельский М. А. Новые теоремы существования решений у нелинейных интегральных уравнений. ДАН СССР, т. 88, вып. 6, 1953.
12. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек. ДАН СССР, сер. математич., т. 19, № 3, 1955.
13. Цитланадзе Э. С. О дифференцировании функционалов. Математический сборник, т. 29, 71, вып. 1, 1951.
14. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. ОГИЗ, М.— Л., 1948.
15. Векуа И. Н. Об изгибе пластинки со свободным краем. Сообщение АН Грузинской ССР, т. III, № 7, 1942.
16. Каландия И. А. Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
17. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.— Л., 1948.
18. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 100, 1940.
19. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу об устойчивости пластинки. ПММ, т. III, вып. 1, 1936.
20. Красносельский М. А. Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений. ДАН СССР, т. 73, вып. 6, 1950.