ЗАМЕЧАНИЕ К § 81 МОНОГРАФИИ И. Г. МАЛКИНА «ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ», ГОСТЕХТЕОРЕТИЗДАТ, 1952

Рассмотрим систему однородных линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = p_{1i}x_1 + \cdots + p_{ni}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с коэффициентами $p_{ij} = p_{ij}(t)$, заданными, непрерывными и ограниченными для $t \geqslant 0$. Если $x_{i1}, \ldots, x_{in}$; $i = 1, \ldots, n$ — фундаментальная система решений (1) с характеристичными числами решений $\mu_1', \ldots, \mu_n'$, то всегда

$$\mu_1' + \cdots + \mu_n' + \varliminf_{t\to\infty} \int_0^t (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})\, dt \leqslant 0 \tag{2}$$

Система (1) правильна тогда и только тогда, если можно указать такую фундаментальную систему решений ее, для которой в (2) имеет место знак равенства. Если такая фундаментальная система решений существует, то она необходимо нормальная согласно Ляпунову.

Пусть $X(t, \tau) \equiv (x_{ij}(t, \tau))$ — матрица, которая при фиксированном τ представляет собой фундаментальную систему решений (1), нормированную для $t = \tau$ ($X(\tau, \tau) = I$), а μ_i означает характеристичное число решения (1) $x_{i1}(t, 0), \ldots, x_{in}(t, 0)$.

Определение. Назовем (1) системой A, если по любому положительному γ можно указать постоянное C_γ, не зависящее ни от t, ни от τ, такое, что

$$|x_{ij}(t, \tau)| < \begin{cases} C_\gamma \exp[(\gamma - \mu_i)(t - \tau)] & (0 \leqslant \tau \leqslant t) \quad (3) \\ C_\gamma \exp[(\gamma + \mu_i)(\tau - t)] & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \quad (3') \end{cases}$$

Именно такие системы рассматриваются в одном из разделов (§ 81) книги И. Г. Малкина [2]. В указанном разделе доказывается, что если система (1) удовлетворяет условию (3) и правильна, то ее характеристичные числа устойчивы. Нетрудно убедиться, что верно следующее предложение. Системы A всегда правильны (следствие: характеристичные числа любой системы A устойчивы).

Доказательство. Из известных свойств фундаментальных систем решений следует, что $X(t, \tau) = X^{-1}(\tau, 0)\, X(t, 0)$. Поэтому $X^{-1}(t, \tau) = X(\tau, t)$, $X^{-1}(t, 0) = X(0, t)$. Далее

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}\, dt = -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|\det X^{-1}(t, 0)| = -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|\det X(0, t)|$$

но $|\det X(0, t)| \leqslant C_\gamma^n n! \exp(n\gamma + \mu_1 + \cdots + \mu_n)$ (см. (3′) при $t = 0$, $\tau = t$). Поэтому

$$-\varlimsup_{t\to\infty} (t^{-1} \ln|\det X(0, t)|) \geqslant -n\gamma - \mu_1 - \cdots - \mu_n \text{ при } t \to \infty$$

Число γ — произвольное, значит,

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}\, dt = -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln|\det X(0, t)| \geqslant -\mu_1 - \cdots - \mu_n$$

Таким образом для фундаментальной системы решений системы (1)

$$\mu_1 + \cdots + \mu_n + \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})\, dt \geqslant 0 \tag{4}$$

Сопоставляя (4) с соотношением (2), верным для любой фундаментальной системы решений (1), приходим к заключению, что (4) должно быть равенством, а это и доказывает правильность системы (1) — произвольной системы A (фундаментальная система решений (1), нормированная в точке $t = 0$, попутно оказалась нормальной).

Замечание 1. Условия (3) можно сформулировать, не предполагая μ_i характеристичными числами системы (1), но лишь некоторыми постоянными, не зависящими ни от γ, ни от τ. Однако из проведенных рассуждений ясно, что ничем другим как характеристичными числами системы (1) μ_i быть не могут.

Замечание 2. Если (1)-система A, то нормальной будет любая фундаментальная система решений (1), нормированная в какой-нибудь точке $t = \tau$, поэтому, например, из $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n$ следует, что $p_{ij} \equiv 0$ для $i < j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Поступила 13 IV 1956

Ю. С. Богданов