ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

В. С. Галкин

(Жуковский)

В настоящей работе при помощи кинетического уравнения Больцмана найдены точные выражения для давления, температуры, напряжений изучаемого течения идеального газа, причем использована простейшая модель взаимодействия молекул (под идеальным газом здесь понимается газ, состояние которого точно описывается уравнением Больцмана).

Полученное решение совпадает с решением уравнений Грэда [1]. Путем сравнения выявляется влияние плотности и градиента скорости на отклонение состояния газа от состояния, описываемого приближением Навье-Стокса. Имеющиеся точные решения уравнения Больцмана (в том числе и для простейших моделей взаимодействия молекул) не позволяют провести такое сравнение: в локально-максвелловых течениях [1] тождественно равны нулю напряжения и тепловые потоки, решение Карлемана [1] не содержит градиентов параметров состояния газа по координатам.

Рассмотрим течение одноатомного идеального газа, вязкость которого $\mu = \mu_0 T$ (сила взаимодействия молекул обратно пропорциональна пятой степени расстояния между ними):

$$v \equiv w \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \qquad \frac{du}{dy} = \text{const}$$

где u, v, w соответственно x, y, z-компоненты макроскопической скорости $\mathbf{v}$, плотность ρ постоянна, давление $p = p(t)$. Внутреннее состояние газа зависит от времени t, т. е. напряжения $p_{ij} = p_{ij}(t)$, тепловые потоки $s_r = s_r(t)$ и т. д. При этом уравнения сохранения массы и импульса удовлетворяются тождественно, уравнение сохранения энергии сводится к виду

$$\frac{dp}{dt} + \frac{2}{3} p_{xy} \frac{du}{dy} = 0 \tag{1}$$

В приближении Навье-Стокса имеем $p_{xy} = -\mu\, du / dy$ (существенно отметить, что приближение Барнета дает такой же результат). Используя соотношения

$$p_{xy} = -\mu \frac{du}{dy}, \qquad \mu = \mu_0 T, \qquad p = R\rho T$$

из уравнения (1) получим

$$p = p(0) \exp\left(\frac{\gamma^2}{\alpha} t\right) \qquad \left(\alpha = \frac{R\rho}{\mu_0}, \ \gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{du}{dy}}\right) \tag{2}$$

Дополняя уравнение (1) уравнением (5.15) работы [1]

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r}(u_r p_{ij}) + \frac{\partial s_{ijr}}{\partial x_r} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial s_r}{\partial x_r} + p_{ir}\frac{\partial u_j}{\partial x_r} + p_{jr}\frac{\partial u_i}{\partial x_r} -$$

$$- \frac{2}{3}\delta_{ij} p_{rs}\frac{\partial u_r}{\partial x_s} + p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_r}{\partial x_r}\right) + \frac{p}{\mu} p_{ij} = 0$$

полученным из кинетического уравнения Больцмана умножением последнего на $c_i c_j\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ и дальнейшим интегрированием по ξ, η, ζ, где $\mathbf{c} = \xi - \mathbf{v}$, ξ — вектор абсолютной скорости молекулы с компонентами ξ, η, ζ, учитывая соотношения

$$p = R\rho T, \qquad \frac{\partial s_{xyy}}{\partial y} \equiv \frac{\partial s_{yyy}}{\partial y} \equiv 0 \qquad \left(s_r = \sum_{k=1}^{3} s_{rkk}\right)$$

для определения p, p_{xy}, p_{yy} получим систему

$$\frac{dp}{dt} + \frac{2}{3} p_{xy} \frac{du}{dy} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{dp_{xy}}{dt} + (p_{yy} + p)\frac{du}{dy} + \frac{R\rho}{\mu_0} p_{xy} = 0, \qquad \frac{dp_{yy}}{dt} - \frac{2}{3} p_{xy}\frac{du}{dy} + \frac{R\rho}{\mu_0} p_{yy} = 0$$

Характеристическое уравнение системы (3)

$$\lambda^3 + 2\alpha\lambda^2 + \alpha^2\lambda - \alpha\gamma^2 = 0 \tag{4}$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}\alpha + \psi_1 + \psi_2, \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\psi_1 - \psi_2) \tag{5}$$

где

$$\psi_{1,2} = \frac{1}{3}\alpha\left\{1 + \frac{27}{2}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \pm 3\sqrt{3}\frac{\gamma}{\alpha}\left[1 + \frac{27}{4}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3}$$

Отсюда

$$p_{xy} = c_1 \exp(\lambda_1 t) + \left[c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\psi_1 - \psi_2)\,t + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(\psi_1 - \psi_2)\,t\right] \exp\left[-\alpha\left(1 + \frac{\lambda_1}{2\alpha}\right)t\right] \tag{6}$$

После этого p и p_{yy} находятся очевидным образом.

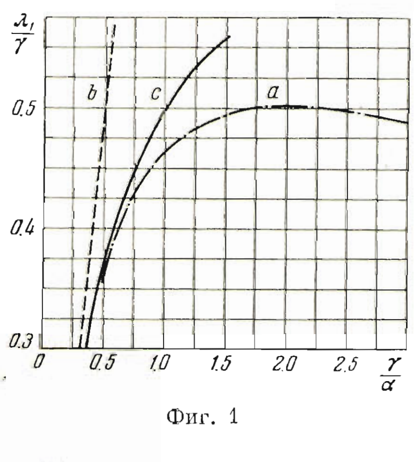
Относительная скорость убывания гармонических возмущений, наложенных на основной процесс $c_1 \exp(\lambda_1 t)$, т. е. величина $\exp[-\alpha(1 + {}^3/_2\,\lambda_1/\alpha)\,t]$, при фиксированном значении du/dy тем меньше, чем меньше плотность, и тем больше, чем больше du/dy при фиксированном значении плотности. Точно так же меняется и частота ${}^1/_2\sqrt{3}\,(\psi_1 - \psi_2)$.

Решение более удобно описывать двумя другими параметрами:

$$\alpha,\quad \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}x}\,\frac{M^2}{N_{\mathrm{Re}}} \qquad \left(x = \frac{c_p}{c_v},\quad M = \frac{v}{\sqrt{xRT}},\quad N_{\mathrm{Re}} = \frac{\rho v l}{\mu},\quad \frac{v}{l} = \frac{du}{dy}\right)$$

Параметр γ/α характеризует влияние плотности и градиента du/dy на степень отклонения состояния газа от изотропного, характеризует соотношение между точным и приближенным значениями корня λ_1.

Роль параметра α особо отчетливо проявляется в случае $\gamma/\alpha \ll 1$. Тогда время релаксации $\tau = \alpha^{-1}$ определяет скорость исчезновения возмущений.



Фиг. 1

Приближение Навье-Стокса, очевидно, обосновано при $\gamma/\alpha \ll 1$ и достаточно малом τ. В рассматриваемом случае приближение Навье-Стокса применимо с точностью до 2% в диапазоне $0 < \gamma/\alpha < 0.1$, так как $\lambda_1 = \gamma^2/\alpha\,(1 - 2\gamma^2/\alpha^2)$ при малых значениях γ/α; при этом величина τ достаточно мала.

Рассмотрим асимптотическое поведение p, p_{xy}, p_{yy} при достаточно большом t, когда возмущениями можно пренебречь.

Тогда

$$\frac{p_{xy}}{p} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\lambda_1}{\gamma}, \quad \frac{p_{yy}}{p} = -1 + \frac{\alpha\lambda_1}{\gamma^2} + \frac{\lambda_1^2}{\gamma^2}$$

Последнее отношение меняется от $p_{yy}/p = 0$ при $\gamma/\alpha = 0$ до $p_{yy}/p = -1$ при $\gamma/\alpha = \infty$.

Изменения величины $|p_{xy}/p| = \sqrt{{}^3/_2}\,\lambda_1/\gamma$ в функции γ/α, а также соотношение между точным значением (a) корня λ_1, приближенным значением (b) Навье-Стокса $\lambda_1 = \gamma^2/\alpha$ и величиной (c) корня $\lambda_1 = {}^1/_4\,\alpha(-1 + \sqrt{1 + 8\gamma^2/\alpha^2})$ уравнения $2\lambda^2 + \alpha\lambda - \gamma^2 = 0$ графически представлены на фигуре.

Рост величины $|p_{xy}/p|$ имеет место до ее максимального значения при $\gamma/\alpha = 2.00$.

Поступила 13 II 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. Сб. Механика, вып. 4, стр. 71; вып. 5, стр. 61, 1952.